

M. A.

**An Elementary Treatise on Statics (Higher).**

by

S. L. LONEY.

سکویات ( اعلیٰ )

ترجمہ

مولوی شیخ برکت علی، ایم۔ اے۔

UNIVERSAL  
LIBRARY

**OU\_188185**

UNIVERSAL  
LIBRARY







تصانیف مولانا محمد علی عثمانی

# سکونیاتِ اعلیٰ

تصنیف

پروفیسر ایس۔ ایل۔ لونی ایم۔ اے

ترجمہ

مولوی شیخ برکت علی صاحب ایم۔ اے (عثمانیہ)

پروفیسر ریاضی کلینیہ جامعہ عثمانیہ حیدرآباد دکن

۱۳۵۱ھ م ۱۳۴۱ھ ق ۱۹۳۲ء

طبع خانہ عثمانیہ عارفیہ لاہور



# فہرست مضامین

## سکونیات اعلیٰ

مضمون

صفحہ

### پہلا باب

- ۱      تمہید۔ ایک نقطہ پر عمل کرنیوالی قوتوں کی ترکیب و تحلیل  
۲۲      ایک ذرہ کا تناادل ایک چلنے سنہنی پر

### دوسرا باب

- ۲۷      متوازی قوتیں۔ معیار اثر۔ جنت

### تیسرا باب

- ۵۳      ہم مستوی قوتوں کے زیر عمل استوار جسم کا توازن  
۷۴      اجسل توازن

### چوتھا باب

صفحہ	مضمون
۸۰	رگرٹ
۹۰	ایک ذرہ کا توازن ایک کھردرے منحنی پر
	پانچواں باب
۱۱۶	کام۔ موہوم کام
۱۳۲	موہوم کام کے اصول کا ثبوت ایک ہمستوی نظام کے لئے
	چھٹا باب
۱۴۶	ترسیمی حل
	ساتواں باب
۱۸۰	جزی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر
۱۹۷	ترسیمی عمل جھکاؤ کے معیار اثروں کے لئے
	آٹھواں باب
۲۰۳	مرکز ثقل
۲۱۷	کسی قوس کا مرکز ثقل
۲۲۲	کسی مستوی رقبہ کا مرکز ثقل
۲۳۲	کسی گردشی سطح یا گردشی مجسم کا مرکز ثقل
۲۳۸	کسی حجم کا مرکز ثقل
۲۴۵	کسی گردشی مثلث کا مرکز ثقل
۲۴۷	پے پس کے مسئلے
	نواں باب

صفحہ	مضمون
۲۵۰	قائم اور غیر قائم تعادل
	دسواں باب
۲۷۳	تین ابعاد میں قوتیں
۲۷۷	تعادل کی عام شرطیں
۲۹۶	مہوم کام کے اصول کا بغوت قوتوں کے کسی نظام کے لئے
۳۰۳	کام کا تفاعل
۳۰۷	قائم اور غیر قائم تعادل
	گیارہواں باب
۳۱۲	تین ابعاد میں قوتیں (مسئلہ)
۳۱۲	پائین سوکا مرکزی محور
۳۲۷	دو معلوم رہنوں کا حاصل پانچ
۳۳۳	اسطوانہ نما
۳۴۲	مشکافی بیج
۳۴۳	صفری خطوط اور صفری مستوی سطحیں
	بارہواں باب
۳۵۲	مشینیں
۳۵۴	بیرم
۳۵۹	چرخیاں
۳۶۵	چرخ اور محور
۳۷۱	معمولی ترازو
۳۷۵	تک

صفحہ	مضمون
۳۷۸	تیج
۳۸۳	فانہ
۳۸۵	مشین کی استعداد
۳۸۹	مشین کا کلیہ
<b>تیرہواں باب</b>	
۳۹۴	رسیوں اور زنجیروں کا تعادل
۳۹۴	سادہ زنجیرہ
۴۱۰	معلق لمبوں کا قطع مکانی
۴۱۵	ایک رسی کے تعادل کی عام شرطیں
۴۱۶	یکساں طاقت کا زنجیرہ
۴۱۸	چکنی سطحوں اور منحنیوں پر رسیاں
۴۲۷	کھردرے منحنیوں پر رسیاں
۴۳۴	مرکزی قوتوں کے زیر عمل رسیاں
۴۴۰	قابل کھنچاؤ رسیاں
<b>چودھواں باب</b>	
۴۶۱	کشش اور قوتہ
۴۶۲	ایک پتلی سلاح کی کشش
۴۶۸	مستدیر تختی
۴۶۹	ایک پتلی کشش کرینوالی سطح میں سے گزرنے پر کشش کی تبدیلی
۴۷۷	پتلے گردی خول اور ٹھوس کرہ
۴۸۳	سطح مرتفع پر مجاذبہ ارض کی قیمت
۴۸۴	مجاذب کے مستقل کی قیمت



صفحہ	مضمون
۴۹۲	توہ
۴۹۷	ایک تیلی سلاح کا توہ
۵۰۳	پتیلے گروہی نول اور پٹوس کرہ
	<b>پندرھواں باب</b>
۵۲۲	کشش اور توہ (مسلل)
۵۲۲	عمادی کشش کا سطحی تکرار
۵۲۶	لاپلاس اور پوائنٹ سو کی مساواتیں
۵۳۳	سادہ توہ سطحیں
۵۳۶	قوت کے خطوط اور نلیاں
۵۴۰	ایک جاذب بالذات نظام کا کام
۵۴۷	ایک دئے ہوئے توہ کے لئے مادہ کی تقسیم
۵۵۰	متماثل تہیں
	<b>سولھواں باب</b>
۵۵۶	کم بجاک والے مشہدوں کا تعادل
۵۶۵	تین معیار اثروں کی کلاپی ردن کی مساوات
۵۷۲	ایک خمیدہ سلاح کے تعادل کی عام شرطیں
۵۷۹	ایک سلاح کو جھکانے میں کام
۵۸۳	بلبے ستونوں کا جھکاؤ
۵۸۵	دھروں کی محوری گردش
۵۸۹	ستون کا جھکاؤ اپنے ہی وزن کے زیر عمل



# سکونیات اعلیٰ

## پہلا باب

تمہید۔ ایک نقطہ پر عمل کرنے والی قوتوں کی ترکیب و تحلیل

۱۔ جسم مادہ کا ایک ایسا حصہ ہے جو ہر طرف سے محدود ہو۔  
قوت کہہ رہے جو کسی جسم کی حالت سکون کو یا یکساں حرکت کو بدل دے یا بدلنے کی قابلیت رکھے۔

کسی جسم کو ساکن اُس وقت کہتے ہیں جب وہ اپنی گرد و پیش کی چیزوں کے لحاظ سے اپنا مقام نہ بدلے۔

سکونیات وہ علم ہے جس میں جسموں پر قوتوں کے عمل کے متعلق بحث کیجاتی ہے جبکہ ان قوتوں کی ترتیب ایسی ہو کہ اجسام مذکور ساکن رہیں۔

وہ علم جس میں قوتوں کے زیر عمل حرکت کرنے والے اجسام پر بحث ہو حرکیات کہلاتا ہے۔

۲۔ ذرہ مادہ کا ایک حصہ ہے جو بلحاظ مقدار کے لا انتہا چھوٹا ہو یا ہماری تحقیقات کی اغراض کے لحاظ سے اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کے مختلف حصوں کے درمیانی فاصلوں کو نظر انداز کر سکیں۔

کسی جسم کو ہم لا انتہا چھوٹے اجزاء کی لا انتہا تعداد کا مجموعہ یا لا انتہا ذروں کا مجتمعہ گروہ تصور کر سکتے ہیں۔

ایک استوار جسم سے ایسا جسم مراد ہوتا ہے جس کے اجزاء ایک دوسرے

کے لحاظ سے اپنا اعصابی محل نہ بدلیں۔

استوار جسم کا تصور بھی ذرہ کے تصور کی طرح خیالی ہے کائنات میں کوئی جسم کامل طور پر استوار نہیں۔ ہر جسم میں قوت کے عمل سے کچھ نہ کچھ تغیر ضرور پیدا ہوتا ہے خواہ یہ تغیر کتنا ہی ضعیف ہو۔ اگر لکڑی کی ایک سلاخ لی جائے اور اس کے ایک سرے کو مضبوط باندھ دیا جائے اور دوسرے کو کھینچا جائے تو لکڑی کچھ نہ کچھ ضرور کھنچ جائیگی۔ اگر سلاخ لوہے کی ہو تو طول کا تغیر متبادلہ بہت کم واقع ہوگا۔

ہم اپنی تحقیقات کو سہل بنانے کے لئے یہ مان لیں گے کہ وہ تمام اجسام جو زیر بحث آئیں گے مکمل طور پر استوار ہیں اور جہاں کہیں یہ بات نہ ہو اس کو بیاں کر دیا جائے گا۔

۳۔ مساوی قوتیں۔ دو ایسی قوتیں مساوی کہلاتی ہیں جو اگر ایک ذرہ پر متقابل سمتوں میں عمل کریں تو ذرہ حالت سکون میں رہے۔

۴۔ کمیت کسی جسم میں جس قدر مادہ ہوتا ہے جسم کی کمیت کہتے ہیں۔ کمیت کی اکائی جو انگلستان میں مستعمل ہے ایک پونڈ ہے، پونڈ سے پلاٹینم کے ایک خاص ٹکڑے کی کمیت مراد ہے جو انگلستان کے دفتر فیٹنس میں محفوظ ہے۔ فرانس اور دیگر ممالک میں کمیت کی جو نظری اکائی مستعمل ہے وہ

ایک گرام ہے جو تقریباً ۲۷۳۲۵۱۵۰ گرین کے مساوی ہے۔ عملی اکائی ایک کلو گرام (= ۱۰۰۰ گرام) ہے جو تقریباً ۲۵۲۰۴۶ پونڈ کے مساوی ہے۔ وزن۔ وزن کے تصور سے ہر ایک شخص بخوبی واقف ہے۔ ہم سب جانتے

ہیں کہ کسی جسم کو زمین پر گرنے سے روکنے کے لئے کچھ نہ کچھ زور لگانا پڑتا ہے۔ زمین ہر ایک جسم کو جس قوت سے اپنی طرف کھینچتی ہے اُس کو اس جسم کا وزن کہتے ہیں۔

۵۔ قوت کی پیمائش۔ سکونیات میں ہم ایک پونڈ کے وزن کو قوت کی اکائی مقرر کریں گے۔ پس قوت کی اکائی اُس قوت کے مساوی ہے جو آزادانہ لٹکے ہوئے ایک پونڈ کی کمیت میں سہا رکھے۔

علم حرکت میں یہ معلوم ہو گا کہ سطح زمین کے مختلف مقامات پر پونڈ کا وزن بالکل وہی نہیں رہتا اگرچہ سکونیات میں سطح زمین کے مختلف مقامات پر قوتوں کے مقابلہ کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی اس لئے پونڈ کے وزن کے تغیرات عملی اہمیت نہیں رکھتے۔ اس لئے ہم ان تغیرات کو نظر انداز کرینگے اور پونڈ کے وزن کو مستقل مان لیں گے۔

عملی طور پر براے اختصار ایک پونڈ کے وزن کی بجائے ہم سکونیات میں ”ایک پونڈ“ کہیں گے۔ اس سے طالب علم سمجھ جائیگا کہ ”۱۰ پونڈ کی قوت“ کے معنی ۱۰ پونڈ کے وزن کے مساوی قوت“ ہے۔

۷۔۔۔ قوتوں کو خطوط مستقیم سے تعبیر کرنا۔ کوئی قوت پورے طور پر معلوم ہو جائے گی جب ہمیں (۱) اس کی مقدار (۲) اس کی سمت اور (۳) اس کا نقطہ عمل معلوم ہو جائیں یعنی جسم کا وہ نقطہ جس پر یہ عمل کرتی ہے۔

اس لئے ہم قوت کو نہایت آسانی سے ایک خط مستقیم کے ذریعے تعبیر کر سکتے ہیں جو اس کے نقطہ عمل میں سے کھینچا جائے کیونکہ خط مستقیم میں مقدار اور سمت دونوں چیزیں پائی جاتی ہیں۔

۸۔۔۔ قوت کی قسمیں۔ جب قوت کسی کیت پر عمل کر رہی ہو تو یہ تین مختلف شکلوں میں ظاہر ہو سکتی ہے :-

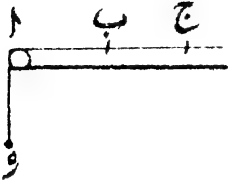
(۱) کشش (۲) تناؤ (۳) تعامل

۸۔ کشش۔ کشش سے مراد وہ قوت ہوتی ہے جو ایک جسم کسی دوسرے جسم پر بغیر کسی مرنی واسطہ کی موجودگی کے اور بغیر ان اجسام کے لازمی طور پر ایک دوسرے سے متصل ہونے کے لگتا ہے۔

اس کی نہایت عام مثال وہ کشش ہے جو زمین ہر ایک چیز پر لگاتی ہے اس کشش کو شے مذکور کا (دفعہ ۴) وزن کہتے ہیں۔

۹۔۔۔ تناؤ۔ اگر ہم ایک رسی کا ایک سر کسی جسم کے ساتھ باندھ دیں اور رسی کے دوسرے سرے کو کھینچیں تو ہم جسم پر قوت لگائیں گے۔ ایسی قوت جو کسی رسی یا سائج کے توسط سے لگائی جائے تناؤ کہلاتی ہے۔

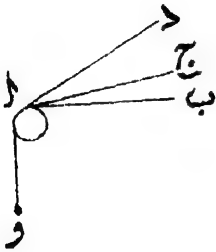
اگر رسی ہلکی ہو (یعنی اس کا وزن اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کو نظر انداز کر سکیں) تو جو قوت رسی لگاتی ہے وہ اس کے تمام طول پر یکساں ہوتی ہے۔



مثلاً اگر ایک وزن و کو ایک ہلکی رسی کے ذریعہ سہارا جاے جو ایک میز کے چلنے کنارے پر سے گزرتی ہو تو یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ قوت خواہ رسی کے کسی

نقطہ (ا، ب یا ج) پر لگائی جائے اس کی مقدار ہر صورت میں وہی ہوگی۔ اب وزن کو سہارنے کے لئے اگر جو قوت لگانی پڑتی ہے وہ ہر صورت میں وہی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ اگر اس کا اثر وہی رہتا ہے خواہ تناؤ رسی کے کسی نقطہ پر لگایا جائے۔ لہذا رسی کا تناؤ اس کے تمام طول پر وہی رہتا ہے۔

نیز اگر وزن و کو ایک ہلکی رسی سے سہارا جائے جو ایک چکینی کھونٹی پر سے گزرتی ہو تو یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ رسی کے دوسرے سرے پر وہی قوت لگانی پڑے گی خواہ رسی کو کسی سمت (ا، ب، ج یا د) میں کھینچا جائے اور یہ قوت وزن و کے مساوی ہوگی۔



(یہ قوت رسی کے آزاد سرے کو کمانی دار ترازو کے ساتھ باندھ دینے سے ناپی جاسکتی ہے)

لہذا اگر ایک ہلکی رسی ایک چکینی

کھونٹی پر سے گزرتی ہو تو اس کا تناؤ اس کے طول کے تمام نقطوں پر وہی ہوتا ہے۔

(۴) اگر دو یا زیادہ رسیاں ایک دوسرے کے ساتھ بانڈہ دی جائیں تو ضروری نہیں کہ سب رسیوں کے تناؤ باہم مساوی ہوں۔  
۱۰۔ تعادل۔ اگر ایک جسم دوسرے جسم پر ٹھکا ہو یا دوسرے جسم کو دبا رہا ہو تو ہر ایک جسم نقطہ تماس پر قوت محسوس کرتا ہے۔ اس قسم کی قوت کو تعادل کہتے ہیں۔

ایک جسم دوسرے جسم پر جو قوت لگاتا ہے (یا عمل کرتا ہے) وہ اس قوت (یا عمل) کے متضاد ہوتی ہے جو دوسرا جسم پہلے جسم پر لگاتا ہے۔

۱۱۔ لچک دار رسیوں کے تناؤ۔ تمام رسیاں کھینچ سکتی ہیں اگرچہ بہت رسیوں میں کھینچ سکنے کی استعداد نہایت کم ہوتی ہے اور عملی طور پر نظر انداز ہو سکتی ہے۔ جب رسی کے کھینچنے کی استعداد کو نظر انداز نہ کیا جاسکے تو تجربہ سے معلوم ہوا ہے کہ رسی کے تناؤ کو اس کے کھینچاؤ کی مقدار کے ساتھ جو ربط ہوتا ہے اس کے لئے ایک سادہ کلیہ ہے جس کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے۔

لچک دار رسی کا تناؤ رسی کے قدرتی طول سے زائد کھینچاؤ کے متناسب ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ قدرتی حالت میں ایک رسی کا طول ایک فٹ ہے، تب اس کے اُس تناؤ کو جبکہ اس کا طول ۱۳ انچ ہو اُس تناؤ کے ساتھ جبکہ اس کا طول ۱۵ انچ ہو یہ نسبت ہوگی

۱۳ - ۱۲ : ۱۵ - ۱۲ یعنی نسبت ۳ : ۱

اس کلیہ کی بذریعہ تجربہ یوں تصدیق ہو سکتی ہے۔ کوئی بیچہار کمائی یا ایک ربڑ کی نلی لے۔ اس کے ایک سرے کو ایک ثابت نقطہ سے پوسٹ کر دو اور پھر اس کے دوسرے سرے پر وزن لگا دو اور دیکھو کہ ان وزلوں سے کس قدر کھینچاؤ پیدا ہوتا ہے تب معلوم ہو گا کہ یہ کھینچاؤ تقریباً وزنوں کے متناسب ہیں۔ اس امر کی احتیاط رکھی جائے کہ جو وزن استعمال کئے جائیں وہ کمائی یا ربڑ کی نلی کی طاقت کے مطابق ہوں اور

زیادہ سے زیادہ وزن اتنا نہیں ہونا چاہیئے جو کمائی یا ٹلی کو مستحضر کرد سے یا اس کی شبابہت کو مستقلاً بدل دے۔

مندرجہ بالا کلیہ کو ایک صاحب (۱۶۳۵ یا ۱۶۴۱ء) نے ۱۶۶۷ء میں شہر کیا اور اسے ان الفاظ میں پیش کیا۔ ”جیسی قوت ویسا امتداد“ اس سے کسی صورت میں تناؤ معلوم کرنے کا تعناطہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے۔ فرض کر لیں کہ ایک رسی کا طول ۱۰ ہے، اور جب اس کا طول کھینچ کر لا ہو گیا ہے تو تناؤ دست بہت تب کھینچاؤ لا۔ ۱ ہے اور کلیہ مذکور کی رد سے ت = ۱۰ - ۱ = ۹ اس کو عام طور پر اس شکل میں بیان کرتے ہیں:-

$$ت = ل - \frac{ل}{۱۰}$$

(۵) مقدار لہ رسی کے مادہ پر اور نیز اس کی موٹائی پر منحصر ہوتی ہے، اس کو رسی کی لچک کا مقیاس کہتے ہیں، اور یہ مقیاس اس قوت کے مساوی ہوتا ہے جو افقی میز پر رکھی ہوئی کسی لچکدار رسی کے طول کو دگنا کر دینے کے لئے کافی ہو کیونکہ جب لا = ۱۲ تو ت = ۱۰، لیکن ظاہر ہے کہ کوئی لچکدار رسی غیر محدود حد تک کھینچناں کو برداشت نہیں کر سکتی، جب کوئی رسی بوجھ لکھناؤ ٹوٹنے کے عین قریب ہو تو اس وقت اس کے تناؤ کو تو تناؤ کہتے ہیں۔

ایک کا کلیہ فولادی اور نیز دیگر سلاخوں پر بھی صادق آتا ہے لیکن جن کھینچاؤں کے لئے یہ درست ہے ان کی حدود بہت تنگ ہیں۔ ہم کسی سلاخ کو کھینچ کر اس کے طول کو دو چند نہیں کر سکتے لیکن لہ اس قوت کے ۱۰۰ گنا کے مساوی ہو گا جو اس کے قدرتی طول میں اس کے ۱/۱۰ کا اضافہ کر دے کیونکہ اگر لا = ۱ = ۱/۱۰ تو ت = ۱/۱۰۔

ت کی قیمت سلاخ کی موٹائی پر بھی منحصر ہوگی۔ سلاخ عام طور پر ایک مربع انچ عمودی تراش کی لی جاتی ہے۔ چنانچہ ایک فولادی سلاخ کی لچک کا مقیاس تقریباً (۱۳۵۰۰) ٹن فی مربع انچ کے مساوی ہوتا ہے۔

۱۲۔ تعادل۔ جب دو یا زیادہ قوتیں ایک حجم پر عمل کرتی ہوں اور



ان کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہو کہ ان کے زیر عمل جسم متوازن ہو تو ان قوتوں کو متعادل قوتیں کہتے ہیں۔

ہم فرض کر لیں گے کہ اگر ہم کسی استوار جسم کے ایک ہی نقطہ پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگائیں تو ان سے جسم کے تعادل پر کوئی اثر نہیں پڑتا نیز اسی طرح سے اگر کسی جسم کے ایک ہی نقطہ پر دو مساوی اور متقابل قوتیں عمل کر رہی ہوں تو ان کو خارج کر سکتے ہیں۔

۱۳۔ قوتوں کے انتقال کا اصول۔ اگر کوئی قوت ایک استوار جسم کے کسی نقطہ پر عمل کرے تو ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ یہ اپنے خط عمل کے کسی اور نقطہ پر عمل کرتی ہے۔ بشرطیکہ موخر الذکر نقطہ جسم کے ساتھ استوار طور پر مربوط ہو۔

۴ قوت فی ق ۲

فرض کرو کہ ایک قوت ق کسی جسم کے نقطہ A پر A کی سمت میں عمل کرتی ہے A پر کوئی اور نقطہ B ہو اور B پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ جنہیں سے ہر ایک قوت ق کے برابر ہو اور جو بالترتیب B اور A کی سمتوں میں عمل کریں۔ ان سے جسم کے توازن پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔ قوت ق جو A پر A کی سمت میں عمل کرتی ہے اور قوت ق جو B پر B کی سمت میں عمل کرتی ہے یہ دونوں مساوی اور متقابل ہیں، ہم یہ فرض کر لیں گے کہ یہ ایک دوسرے کو زایل کر دیتی ہیں اور اس لئے ان کو خارج کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے سے ہمارے پاس صرف ایک قوت ق رہ جاتی ہے جو B پر B کی سمت میں عمل کرتی ہے اور اس کا اثر کلیتہً وہی ہے جو A پر عمل کرنے والی ابتدائی قوت ق کا ہے۔ جسم مذکورہ بالا میں اندرونی قوتیں قوت ق کے A یا B پر عمل کرنے کی صورت میں مختلف ہونگی۔

۱۴۔ چکنے اجسام لکڑی کا ایک صاف اور چکنا ٹکڑا لو جس کا ایک رخ مستوی ہو۔ اس کو اس رخ کے بل ایک میز پر رکھو جس کی سطح اتنی چکنی ہو جتنی کہ ممکن ہو سکے۔ اب اگر ہم لکڑی کے ٹکڑے کو میز پر پھسلانے کی کوشش کریں تو ہمیں کچھ نہ کچھ مزاحمت محسوس ہوگی۔ لکڑی اور میز کی سطح کے درمیان کچھ نہ کچھ قوت ہمیشہ ہوتی ہے۔ اگر اجسام کا پتہ چکنے ہوتے تو ٹکڑے اور میز کی سطح کے متوازی قوت بالکل معدوم ہوتی اور ان کے درمیان جو قوت عمل کرتی وہ صرف میز پر عمود وار ہوتی۔ جب دو جسم جو ایک دوسرے سے مس کرتے ہوں بالکل چکنے ہوں تو وہ قوت یا تعامل جو ان دونوں کے درمیان عمل کرتا ہے ان کے نقطہ تماس پر کی مشترک تماسی سطح پر عمود وار ہوتا ہے۔

پس سمجھ لی کہ سطح کی صورت میں یہ سمت اُس عماد کی سمت ہوتی ہے جو نقطہ تماس میں سے کھینچا جائے اور ظاہر ہے کہ یہ ایک قطعی طور پر تعین سمت ہے۔ اگر ایک جسم ایک پتلے باریک تار کی شکل کا ہو یا کوئی پتلا کنارہ ہو تو اس پر کے کسی نقطہ ن میں سے لانا تھا خطوط ایسے کھینچ سکتے ہیں جو اس کی سطح پر عمود وار ہوں، کیونکہ ن میں سے گزرنے والے جملہ خطوط جو تماسی خط پر عمودی سطح مستوی میں واقع ہوں گے اس شرط کو پورا کریں گے، لیکن اگر دو کنارے ایک دوسرے سے مس کرتے ہوں تو مشترک عمود کی سمت معین ہو جائے گی کیونکہ اسے دونوں کناروں پر عمود وار ہونا چاہیئے اور بناءً علیہ اُس سطح پر عمود وار ہونا چاہیئے جو دونوں کناروں میں سے گزرتی ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ اس کی سمت وہ عماد ہے جو دونوں کناروں میں سے گزرنے والی سطح مستوی پر ان کے نقطہ تماس میں سے کھینچا جائے۔

## قوتوں کی ترکیب و تحلیل

۱۵۔ فرض کرو کہ لکڑی کا ایک چپٹا ٹکڑا ایک چکنے میز پر پڑا ہے اور اس کو تین رسیوں کے ذریعے کھینچا گیا ہے جو اس کے کناروں پر بندھی ہیں انیس رسیوں کے ذریعے جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ سب کی سب افقی ہیں۔ اگر رسیوں کے تناؤں

کو اس طرح ترتیب دیا گیا ہو کہ لکڑی ساکن رہے تو اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قوتیں باہم متوازن ہیں۔ اس لئے ان قوتوں میں سے دو قوتیں باہم ملکر اتنی قوت لگاتی ہیں جو بلحاظ آخر کے تیسری قوت کے مساوی اور متقابل ہوتی ہیں۔ اس قوت کو جو تیسری قوت کے مساوی اور متقابل ہوتی رہے پہلی دو قوتوں کا حاصل کہتے ہیں۔

**حاصل - تعریف**۔ اگر دو یا زیادہ قوتیں ف، ق، س، ....

ایک استوار جسم پر عمل کریں اور اگر ایک واحد قوت ح ایسی معلوم ہو سکے جس کا انز جسم مذکور پر وہی ہو جو ان قوتوں ف، ق، س، .... کا ہے تو اس واحد قوت ح کو باقی قوتوں کا حاصل کہتے ہیں اور قوتوں ف، ق، س، .... کو ح کے اجزائے ترکیبی سے موسوم کرتے ہیں۔

تعریف بالا کی رو سے ظاہر ہے کہ اگر جسم مذکور پر ایک قوت ایسی لگائی جائے جو قوت ح کے مساوی اور متقابل ہو تو جسم پر عمل کرنے والی قوتیں متوازن میں آجائیگی اور جسم متوازن ہوگا برعکس اس کے اگر جسم پر عمل کرنے والی قوتیں متوازن میں ہوں تو ان میں سے کوئی ایک قوت باقی قوتوں کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوگی۔

۱۴۔ اگر ایک جسم پر دو قوتیں ایک ہی سمت میں عمل کریں تو ان کا حاصل عصر مخالف سمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہوگا اور بڑی قوت کی سمت میں عمل کرے گا۔

جب دو قوتیں ایک جسم پر مختلف سمتوں میں عمل کریں تو ان کا حاصل ذیل کے مسئلہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

**مسئلہ**۔ قوتوں کا متوازی الاضلاع۔ اگر دو قوتوں کو جو ایک نقطہ پر عمل کرتی ہوں بلحاظ مقدار اور سمت کے ایک متوازی الاضلاع کے دو ضلعوں سے تعبیر کیا جائے جو اس کے ایک راس میں سے

کھینچے جائیں تو ان قوتوں کا حاصل بلحاظ سمت اور مقدار دونوں کے متوازی الاضلاع کے اس وتر سے تعبیر ہوتا ہے جو اس راس میں سے گزرتا ہے۔

سکونیات کے اس اساسی مسئلہ کو یاسی کی دوسری شکل یعنی قوتوں کے مثلث (صفحہ ۲۱) کو پہلے پہل شہر روز کے باشندے سیٹیوی نس (Stevinus) نے ۱۵۸۶ء میں دریافت کیا تھا۔ اس سے قبل علم سکونیات کا دار و مدار ہیرم کے اصول پر تھا۔

۱۷- تجربی ثبوت۔ تین ہلکی رسیاں لو اور ان تینوں کے ایک ایک سرے کو گرہ دیکر ایک نقطہ پر باندھ دو۔ اب دوسروں کو دو ثابت چرخوں پر سے گزارو جو آزادانہ پھر سکتی ہوں اور ثابت سہاروں پر قائم ہوں۔ ان رسیوں کے دوسرے سروں پر وزن ف اور ق پونڈ باندھ دو۔ نیز تیسری رسی کے ساتھ وزن ک پونڈ باندھو۔ اب اگر یہ تین وزن ایسے ہوں کہ ان میں سے کوئی ایک باقی دو کے حجم سے زیادہ نہ ہو تو یہ نظام کسی نہ کسی محل میں تعادل کی حالت اختیار کرے گا۔ تعادل کی اس حالت میں رسیوں پر ایسے طول وا، وب، وج قطع کرو جو ف، ق کے بالترتیب متناسب ہوں اور متوازی الاضلاع وا دب کی تکمیل کرو۔ تب معلوم ہو گا کہ وج، اد کے مساوی اور متقابل ہے۔ لیکن چونکہ ف، ق اور مساوی متوازن ہیں اس لئے سا لاژ ف و ق اور ق کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہو گا۔ یعنی وہ ان قوتوں کے حاصل کو تعبیر کرے گا جو و دب سے تعبیر ہوتی ہیں۔

اد پر کے تجربے میں چرخوں اور وزنوں کی بجائے کمافی دار حرازد استعمال ہو سکے ہیں ان ترازوؤں میں ایک نمایندہ لگا ہوتا ہے جو اس کے درجہ وار رخ پر اوپر نیچے حرکت کرتا ہے۔ اس سے وہ قوت معلوم ہو جاتی ہے جو کٹھی پر عمل کرتی ہے۔

تین ہلکی رسیوں کو و پر گرہ دو اور ان کے آزاد سروں کے ساتھ کمافی دار ترازو باندھ دو۔ ترازوؤں کو اتنا کھینچو کہ ان سے کوئی موزوں متناوب تعبیر ہوں تب

ان کو ایک میز پر لٹا دو اور سینوں کے ذریعے ثابت کر دو۔ تب ہم ریموں کے تناؤں ف، ق، سہ کو ترازوں پر پڑھ کر معلوم کر سکتے ہیں اور حسب سابق قوتوں کے متوازی الاضلاع کے مسئلہ کی صداقت کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

حرکیاتی ثبوت۔ مسئلہ بالا کا ثبوت اسراع کے متوازی الاضلاع اور نیوٹن کے قوانین حرکت سے بھی مستنبذ کیا جاسکتا ہے۔

اگر ایک ذرہ کی کمیت ک ہو اور اس کے اسراع ف، اور ف بلحاظ مقدار اور سمت کے دو خطوط مستقیم وا اور وب سے تعبیر ہوں تو اس کا حاصل اسراع فس متوازی الاضلاع واج ب کے دروج سے تعبیر ہوگا۔

چونکہ ذرہ کا اسراع وا کی سمت میں ف ہے اس لئے اس سمت میں قوت ق (ک ف) عمل کرتی ہے اور اسی طرح سے ایک قوت ق (ک ف) دھب کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ ان قوتوں کو بلحاظ مقدار اور سمت کے وا اور ودھب سے تعبیر کر دو۔

$$\text{ب} = \frac{\text{ق}}{\text{وب}} = \frac{\text{ف}}{\text{ف}} = \frac{\text{وا}}{\text{وب}}$$

متوازی الاضلاع واج ب کی تکمیل کرو، تب معمولی بندہ سے ثابت ہو سکتا ہے کہ واج ب ایک خط مستقیم میں ہیں اور

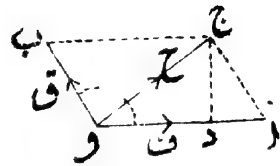
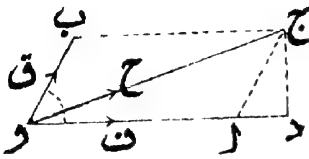
$$\frac{\text{واج}}{\text{واج}} = \frac{\text{وا}}{\text{وا}}$$

اس لئے واج سے وہ قوت تعبیر ہوتی ہے جو اسراع واج پیدا کرتی ہے اور اس لئے وہ قوت ہے جو وا اور وب کے حاصل کو تعبیر کرتی ہے۔

۱۸۔ اگر دو قوتیں ف اور ق اس طرح عمل کرتی ہوں کہ ان کے خطوط عمل کے درمیان زاویہ ع بنتا ہو تو ان کا حاصل ح بلحاظ مقدار اور سمت کے آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ مذکورہ بالا قوتیں ف اور ق خطوط مستقیم وا اور وب سے تعبیر ہوتی ہیں جن کے درمیان زاویہ ع بنتا ہے۔ متوازی الاضلاع واج ب

کی تحلیل کرو اور ج د' ول (ممدودہ بشرط ضرورت) پر نمود کھینچو  
تب ود = ول + لاج جم دلج = فن + ق جم ب ود = فن + ق جم ع  
اگر د، واور ا کے درمیان واقع ہو تو (شکل ۲)  
دو = ول - لاج جم دلج = فن - ق جم (۱۸۰ - ع) = فن + ق جم ع [



تیر دج = لاج جم ب و لاج = ق جم ع

$$ح = و ج = ود + ج د = فن + ق + فن + ق جم ع \dots (۱)$$

$$اور مس ج ود = \frac{ح ج}{ود} = \frac{ق جم ب}{فن + ق جم ع} \dots (۱۱)$$

ان دو مساواتوں سے مطلوبہ حاصل کی مقدار اور سمت دونوں معلوم ہو جائیں  
نتیجہ صریح۔ اگر توتیں علی القوا تم ہوں تو ع = ۹۰ اس لئے

$$ح = فن + ق + فن + ق = ۲ فن + ق اور مس ج و ل = \frac{ق}{فن}$$

۱۹۔ ہم ایک قوت کو دو اجزائے ترکیبی میں لا متناہی طریقوں سے تحلیل کر سکتے ہیں  
کیونکہ ظاہر ہے کہ ایسے لا انتہا متوازی الاضلاع کھینچ سکتے ہیں جن کا دت و ج ہو۔  
ان میں سے ہر ایک متوازی الاضلاع کے دو متصلہ ضلع قوت کے اجزائے ترکیبی  
کو تعبیر کریں گے۔

سب سے ضروری صورت اُس وقت واقع ہوتی ہے جب ہم کسی قوت  
کو ایسے دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کریں جو ایک دوسرے کے علی القوا تم ہوں۔  
فرض کرو کہ ہم ایک قوت ق کو جو و ج سے تعبیر ہوتی ہے دو ایسے اجزائے  
ترکیبی میں تحلیل کرنا چاہتے ہیں جن میں سے ایک و ل کی سمت میں ہو اور دوسری و ل

پر عمود ہو۔

ج ہوا پر عمود کھینچو اور متوازی الاضلاع و م ج ن کی تکمیل کرو۔ تب جو قوتیں و م اور و م سے تعبیر ہوتی ہیں وہی مطلوبہ اجزاء ترکیبی ہیں۔



فرض کر دو کہ زاویہ  $\angle و ج ع = ع$

تب و م = و ج جم = ق جم ع اور و م = و ج جب ع = ق جب ع  
[اگر نقطہ ہوا و م دودہ پر واقع ہو بیسا کہ شکل دوم میں قوت کا جزو ترکیبی و م کی سمت میں

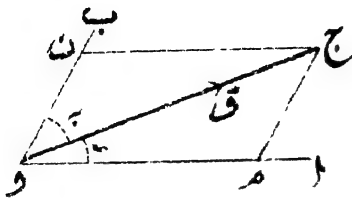
= - و م = - و ج جم و م = و ج جم ع = ق جم ع  
نیز دوا پر عمود اور جزو ترکیبی = و م = و ج جب و م = ق جب و م  
پس ہر صورت میں مطلوبہ اجزاء ترکیبی ہیں

ق جم ع اور ق جب ع  
کسی دمی ہوئی قوت کی دی ہوئی سمت میں جزو تحلیل سے وہ جزو ترکیبی مراد ہے  
کہ اگر اس کو سمت مذکورہ کی عمودی سمت میں عمل کرنے والے ایک اور جزو ترکیبی  
کے ساتھ ترکیب دیا جائے تو وہی ہوئی قوت حاصل ہو۔

مثلاً قوت ق کا جزو تحلیل و م کی سمت میں ق جم ع ہے۔

پس ایک دی ہوئی قوت کا جزو تحلیل معلومہ قوت کو اس کی سمت اور دی ہوئی سمت  
کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۰۔ کسی قوت کو دی ہوئی دوسروں میں غل کرنے والے دو اجزاء ترکیبی میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔



فرض کرو کہ ایک قوت ق سے  
جو د ج کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ اس کے  
اجزائے ترکیبی سمتوں و ا اور د ب  
میں نکالنا مقصود ہے جو ق کی سمت کے  
ساتھ بالترتیب زاوئے عد اور بہ بناتے  
ہیں۔ ج ہر، د ب کے متوازی کیجئے جو

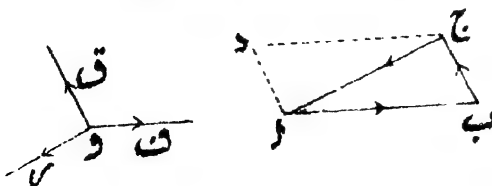
و ا سے ہر پرلے اور متوازی الاضلاع و مرج ن کی تکمیل کرو، تب و ہر اور و ن  
مطلوبہ اجزائے ترکیبی ہیں۔  
چونکہ مشلت و مرج کے اضلاع مقابل کے زاویوں کی جوب کے متناسب  
ہیں اس لئے

$$\frac{\text{و ہر}}{\text{ج ہر}} = \frac{\text{ق}}{\text{ق جب (ع + بہ)}}$$

پس مطلوبہ اجزائے ترکیبی  $\frac{\text{ق جب بہ}}{\text{ق جب (ع + بہ)}}$  اور  $\frac{\text{ق جب ع}}{\text{ق جب (ع + بہ)}}$  ہیں۔

طالب علم کو بنور سمجھ لینا چاہیے کہ کسی قوت کے جزو ترکیبی اور جزو تحلیل  
ایک ہی سمت میں مساوی نہیں ہوتے۔ مثلاً ہم دنعہ ۱۹ میں دیکھ چکے ہیں  
کہ ق کا جزو تحلیل و ل کی سمت میں ق جم ع ہے۔

۲۱۔ قوتوں کا مشلت۔ اگر تین متراکض قوتوں کو بلحاظ مقدار اور سمت دونوں  
کے ایک مشلت کے اضلاع سے بالترتیب ظاہر کیا جاسکے تو تین تعادل میں ہوتی ہیں  
فرض کرو کہ تین قوتیں ف باق اور م جو ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں بلحاظ مقدار اور  
سمت کے ایک مشلت ا ب ج کے اضلاع ا ب، ب ج، ج ا سے تعبیر



ہوتی ہیں۔ متوازی

الاضلاع

ا ب ج د کی نیل

کرو۔



ب ج اور د سے دہی قوتیں تعبیر ہوتی ہیں کیونکہ ب ج اور د مساوی اور متوازی ہیں۔

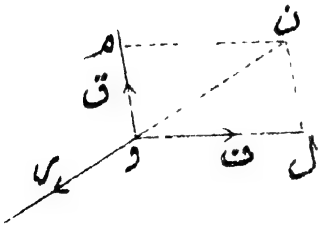
اب قوتوں ا ب اور د کا حاصل قوتوں کے متوازی الاضلاع کی سہ سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس لئے ا ب ، ب ج اور ج د کا حاصل ا ج اور ج د کے حاصل کے مساوی ہے اور اس لئے صفر ہے۔

پس تین قوتیں ف ، ق ، ہ متبادل میں ہیں۔

نتیجہ صریح۔ چونکہ وہ قوتیں جو ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں ا ب اور ب ج اور ج د سے تعبیر ہوتی ہیں متبادل ہوتی ہیں اور نیز جب تین قوتیں متبادل میں ہوں تو ہر ایک قوت باقی دو کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوتی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ا ب اور ب ج اور ج د کا حاصل ج د کے مساوی اور متقابل ہے یعنی ا ب ج کا حاصل ا ج ہے۔

پس اگر دو قوتیں ابک ہی نقطہ پر عمل کریں اور ایک مثلث کے اضلاع ا ب اور ب ج سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل مثلث مذکور کے تیسرے ضلع ا ج سے تعبیر ہو گا۔

۲۲۔ قوتوں کے مثلث کا عکس بھی درست ہے یعنی اگر تین متراکز قوتیں ف ، ق اور ہ جو ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں باہم متبادل ہوں تو ان کو بھاظ مقدار



اور سمت کے ایک مثلث کے اضلاع سے تعبیر کیا جاسکتا ہے جس کے اضلاع بالترتیب قوتوں کی سمتوں کے متوازی ہوں۔

ف اور ق کی سمتوں پر طول و عرض نا پو جو بالترتیب ان قوتوں کو تعبیر کریں۔ متوازی الاضلاع د ل ن ہر کی تکمیل کرو اور د ل کو ملاؤ۔

چونکہ تین قوتیں ف ، ق ، ہ متبادل ہیں اس لئے ہر قوتوں ف اور

ق کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوگا، اس لئے یہ ن و سے تقبیب ہوگا۔  
اس لئے تین قوتیں مثلث ول ن کے اضلاع ول ن اور ن و کے  
متوازی اور متناسب ہیں۔

اگر کوئی اور ایسا مثلث کھینچا جائے جس کے اضلاع مثلث ول ن  
کے اضلاع کے متوازی ہوں تو اس کے اضلاع مثلث ول ن کے اضلاع  
کے متناسب اور اسلئے قوتوں کے متناسب ہوں گے۔ نیز اگر کوئی اور مثلث کھینچا جائے جس کے اضلاع  
مثلث ول ن کے اضلاع پر عمود ہوں تو اس کے اضلاع مثلث ول ن  
کے اضلاع کے متناسب اور بناءً علیہ قوتوں کے متناسب ہوں گے۔

اس لئے اگر تین قوتیں متبادل ہوں اور ان کی مقادیر معلوم ہوں تو  
ہم ان قوتوں کی اصنافی سمتوں کو بذریعہ عمل ترسیم نہایت آسانی سے متعین کر سکتے  
ہیں۔ اس کے لئے ہمیں صرف ایک مثلث بنالینا چاہیئے جس کے اضلاع قوتوں  
کے متناسب ہوں اور مثلث ہمیشہ بنایا جاسکتا ہے تا وقتیکہ دو قوتوں کا مجموعہ  
قیسری قوت سے بڑا نہ ہو۔

۲۳۔ لامی کا سلسلہ۔ اگر تین قوتیں ایک ذرہ پر عمل کریں اور ذرہ  
متبادل رہے تو ہر ایک قوت باقی دو قوتوں کے درمیانی زاویہ کی  
جیب کے متناسب ہوگی۔

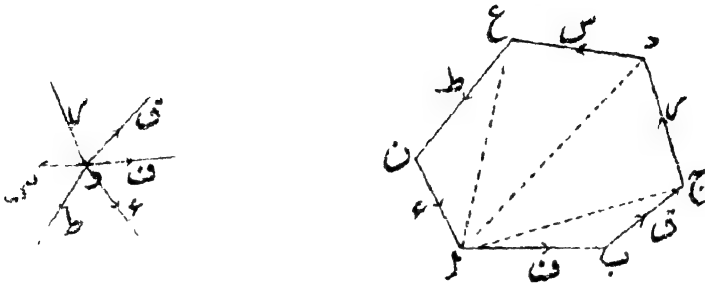
کیونکہ کسی مثلث میں اس کے اضلاع متقابل کے دایلوں کی جیب کے  
متناسب ہوتے ہیں اور گزشتہ دفعہ میں ثابت ہو چکا ہے کہ قوتیں اضلاع کے  
متناسب ہوتی ہیں اس لئے

(۱۳)

$$\frac{\text{ول}}{\text{جبل ق و}} = \frac{\text{لن}}{\text{جبل و ن}} = \frac{\text{ن و}}{\text{جبل و ل}}$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{ف}}{\text{جبت د و}} = \frac{\text{ن}}{\text{جبت و ف}} = \frac{\text{و}}{\text{جبت و ف}}$$

۲۴۔ قوتوں کا کثیر الاضلاع۔ اگر متعدد قوتیں ایک ذرہ پر عمل کریں اور بلحاظ سمت اور مقدار کے ایک کثیر الاضلاع کے ضلعوں سے بالترتیب تعبیر ہو سکیں تو قوتیں متبادل میں ہونگی۔



فرض کرو کہ کثیر الاضلاع کے ضلعے اب، ب ج، ج د، د ع، ع ن اور ن ا بالترتیب و پر عمل کرنے والی قوتوں کو بلحاظ مقدار اور سمت کے تعبیر کرتے ہیں۔ ا ج، ا د، ا ع کو ملاؤ۔

دفعہ ۲۱ کے نتیجہ صریح کی رو سے اب اور ب ج کا حاصل ا ج سے تعبیر ہوتا ہے۔ اسی طرح سے ا ج اور ج د کا حاصل ا د سے تعبیر ہوتا ہے، ا د اور د ع کا حاصل ا ع سے تعبیر ہوتا ہے، اور علیٰ ہذا القیاس ا ع اور ع ن کا حاصل ا ن سے تعبیر ہوتا ہے۔

لہذا سب قوتوں کا حاصل ا ن اور ن ا کے حاصل کے مساوی ہے گویا حاصل معدوم ہو جاتا ہے اور اس لئے قوتیں متبادل ہیں۔

قوتوں کی تعداد خواہ کچھ ہی ہو یہی استدلال ہر صورت پر صادق آئے گا ثبوت سے یہ بھی ظاہر ہے کہ کثیر الاضلاع کے ضلعوں کا ایک ہی سطح استوی میں ہونا ضروری نہیں۔

قوتوں کے کثیر الاضلاع کا عکس درست نہیں کیونکہ اگر ہمیں اس کے

اضلاع کی سمیتیں معلوم ہوں تو ان سے کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی نسبتیں متعین نہیں ہو سکتیں مثلاً ادپر کی شکل میں ا ب پر کوئی نقطہ ا لو اور ا ن کے متوازی ا ن کھینچو جو ع ن سے ن کے پر ملے، تب نئے کثیر الاضلاع ا ب ج د ع ن کے اضلاع کثیر الاضلاع ا ب ج د ع ن کے اضلاع کے بالترتیب متوازی ہیں لیکن اضلاع صریحاً متناسب نہیں ہیں۔

۲۵۔ دو توتیں نقطہ و پروا اور و ب کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں اور مقدار میں لہ × وا اور مہ × و ب سے تعبیر ہوتی ہیں، تب اُن کا حاصل (لہ + مہ) × وج سے تعبیر ہوگا۔ جہاں ج، لہ پر کا ایسا نقطہ ہے کہ لہ × ج لہ = مہ × ج ب

کیونکہ دفعہ ۲۱ کے نتیجہ صریح کی رو سے قوت لہ × وا اُن دو توتوں کے مساوی ہے جو لہ × وج اور لہ × ج لہ سے تعبیر ہوتی ہیں اور اسی طرح سے قوت مہ × وج توتوں مہ × وج اور مہ × ج ب کے مساوی ہے۔ پس معلومہ قوتیں دونوں مل کر قوت (لہ + مہ) × وج اور نیز توتوں لہ × ج لہ اور مہ × ج ب کے مساوی ہیں، اب موخر الذکر ایک دوسرے کی تبدیل کرتی ہیں۔

نتیجہ صریح۔ وا اور و ب سے جو توتیں تعبیر ہوتی ہیں اُن کا حاصل ۲ × وج ہے جہاں ج، ا ب کا وسطی نقطہ ہے۔ نیز یہ ظاہر ہے کہ وج اُس متوازی الاضلاع کے دتر و د کا نصف ہے جو متصل اضلاع وا، و ب سے بنتا ہے۔

## مشائیں

(۱) اگر ایک مثلث کے نقاطِ رأس کو کسی نقطہ سے ملا دیا جائے تو ان خطوط سے توڑن کا جو نظام تعبیر ہوگا وہ اس نظام کے معادل ہوگا جو نقطہ مذکور کو مثلث کے اضلاع کے وسطی نقاط سے ملانے والے خطوط سے تعبیر ہوتا ہے۔

(۲) ایک ذوالربعہ الامتلاز کے اندر ایک ایسا نقطہ معلوم کر دو کہ اس نقطہ کو ذوالربعہ الامتلاز کے راستوں سے ملایا جائے تو ان ملائے والے خطوں سے تعمیر ہونیوالی فوٹوں کے زیر عمل نقطہ مذکور ساکن رہے۔

(۳) چار قوتیں ذوالبقیۃ الاصلاح (ابج د) کے اصلاح کی سمتوں میں اور ان کے متناسب ہیں۔ ان میں سے تین قوتیں اب، ہاج، ح ذکی سمتوں میں عمل کرتی ہیں اور چوتھی ا سے ذکی طرف عمل کرتی ہے ان کے حاصل کی مقدار اور سمت معلوم کر دو اور وہ نقطہ معلوم کر دو جس میں یہ ج د سے ملتی ہے۔

(۴) ایک ذرا بہتہ الاضلاع  $\Delta ABC$  کے اضلاع  $AB$  اور  $AC$  کی تقصیفات اور  $BC$  پر کی گئی ہے، ثابت کرو کہ اگر دو تہیں  $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$  کے مساوی اور متوازی ایک ذرہ پر عمل کریں تو حاصل ہونے والے متوازی اور  $BC$  کے مساوی ہوگا۔

(۵) ایک ذرا بعتہ الاصلع (بج د کے اصلاع اب، بج، ج د، د ا) کی تنصیف عاف، گ، ہ پر کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ اُن فوٹوں کا حاصل جو ایک نقطہ پر عمل کریں اور بلحاظ سمت اور مقدار کے غ گ اور ہ ف سے تعبیر ہوں بلحاظ مقدار اور سمت کے ا ج سے تعبیر ہوتا ہے۔

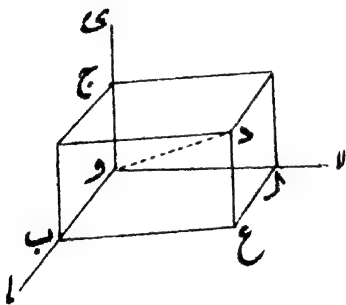
(۶) ایک دائرہ کے اندر ایک نقطہ مقرر ہے، دائرہ کا مرکز ثابت ہے، ان میں سے ن لہ  
ن لہ، ان لہ، ان لہ، خط کھینچ گئے ہیں جو محیط سے ٹٹے ہیں۔ یہ سب خطوط ان  
میں سے گزرنے والے نصف قطر سے مساوی ذرا دیے بنائے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر  
ن سے نکلتی ہوئی قوتیں ان خطوط سے تعبیر ہوں تو ان کا حاصل دائرہ کے نصف قطر کی  
مقدار پر منحصر نہیں ہے۔

(۷) ایک قطع ناقص کے اسکے س اور س ہیں، اس پر کوئی نقطہ لیا گیا ہے (۱۵)

ناقص کے مرکز ج پر دو مساوی اور مستقل قوتیں سن اور ن س کے متوازی عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اس خط مستقیم کا سرا جوان کے حاصل کو تعبیر کرتا ہے، ایک دائرہ پر واقع ہوتا ہے جو ج میں سے گزرتا ہے۔

(۸) اس امر کی تشریح کرو کہ کس طرح ایک بادبانی کشتی کو ہوا کی تقریباً مخالف سمت میں چلانا ممکن ہے۔ اگر اس کے بادبان کو ایک استوار سطح مستوی فرض کیا جائے تو بتاؤ کہ کشتی کو آگے بڑھانے میں جو قوت عمل کرتی ہے وہ بڑی سے بڑی اس وقت ہو سکیگی جب کشتی کو اس طرح چلایا جائے کہ بادبان اس زاویہ کی تنصیف کرے جو کشتی کے پینڈے اور ہوا کی ظاہری سمت کے درمیان ہے۔

قوتوں کا متوازی السطوح تین قوتیں ایک نقطہ پر عمل کرتی ہیں اور بالترتیب و، ب، و ج سے تعبیر ہوتی ہیں، ان کا حاصل اس متوازی السطوح کے وترود سے تعبیر ہوگا جس کے اضلاع و، ب، و ج ہیں۔



کیونکہ دو قوتیں و، ب و ج ایک قوت و ع کے مساوی ہیں جہاں و ب متوازی الاضلاع ہے نیز قوتیں و ع اور و ج ایک قوت و د کے مساوی ہیں کیونکہ و ع د ج متوازی الاضلاع ہے۔

اگر متوازی السطوح مستطیلی ہو

یعنی و، ب، و ج قائم محوروں پر لے جاسکیں اور اگر قوتیں و، ب، و ج بالترتیب لا، ما، اے ہوں تو حاصل ح = لا + ما + اے اور اس خط پر عمل کرتا ہے جس کے سمتی جیب اتمام جم ا و د، جم ب و د اور جم ج و د ہیں

$$\text{یعنی } \frac{و}{و د}, \frac{ب}{و د}, \frac{و ج}{و د} \text{ یعنی } \frac{لا}{ح}, \frac{ما}{ح}, \frac{اے}{ح}$$

برعکس اس کے اگر ایک قوت ح سبدا و پر عمل کرے اور اس کے خط عمل کے سمتی جیوب التمام ل، م، ن ہوں تو اس کے اجزائے ترکیبی محوروں پر لا (= ل ح)، ما (= م ح)، اور ے (= ن ح) ہونگے۔

۲۷۔ کسی دی ہوئی سمت میں دو قوتوں کے اجزائے تحلیل کا مجموعہ اسی سمت میں ان قوتوں کے حاصل کے جزو تحلیل کے مساوی ہوتا ہے۔

کیونکہ یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر و لا، وب دو قوتوں کو تعبیر کریں اور واج ب متوازی الاضلاع ہوں تو و لا، وب کے غلوں کا مجموعہ کسی خط ولا پر و لا اور واج کے غلوں کے مجموعہ کے مساوی ہے اور اس لئے اسی خط پر وج کے ظل کے مساوی ہوتا ہے، لہذا نتیجہ بالا حاصل ہوا۔

۲۸۔ اگر متعدد قوتیں ایک معلومہ نقطہ و پر عمل کرتی ہوں تو ان کے متعادل ہونے کی شرطیں اور ان کا حاصل معلوم کر دو۔

کوئی تین باہم عمود دار محور و لا، و ما، و ی لو جو او میں سے گزریں۔ اور

فرض کر دو کہ دی ہوئی قوتیں ح، ح، وغیرہ ہیں جن کی سمتی جیوب التمام بالترتیب

(ل، م، ن)، (ل، م، ن)، وغیرہ ہیں تب دفعہ ۲۷ کی رو سے ح، ان محوروں کے متوازی اپنے اجزائے ترکیبی ل ح، م ح، ن ح کے مساوی ہے

اور ح، اپنے اجزائے ترکیبی ل ح، م ح، ن ح کے مساوی ہے اعلیٰ ہذا القیاس

اب اگر محوروں کے متوازی کل اجزائے ترکیبی لا، ما، ے ہوں تو

$$لا = ل ح + ل ح + ل ح + \dots$$

$$ما = م ح + م ح + م ح + \dots$$

$$ے = ے_۱ + ے_۲ + ے_۳ + ..... + ے_۴$$

$$لہذا دفعہ ۲۶ کی رو سے حاصل قوت ح = ۱۰ لا + ۱۰ ما + ۱۰ ٹا$$

$$\text{اور اس کے خط عمل کی سمتی جیوب التمام ہیں } \frac{لا}{ح}، \frac{ما}{ح}، \frac{ٹا}{ح}$$

اگر قوتیں متبادل ہوں تو حاصل ح کو صفر ہونا چاہیے

$$لہذا \quad لا + ما - ٹا = ۰$$

$$\therefore \quad لا = ۰، \quad ما = ۰، \quad ے = ۰$$

پس اگر ایک نقطہ پر عمل کرنے والی قوتیں متبادل میں ہوں تو تین علی القوایم سمتوں میں ان کے اجزائے ترکیبی کا جبر یہ مجموعہ علیحدہ علیحدہ صفر ہونا چاہیے۔  
برعکس اس کے اگر تین جدا گانہ علی القوایم سمتوں میں تو قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہو تو قوتیں متبادل میں ہونگی۔

اگر گزشتہ دفعہ کی قوتیں ہم مستوی ہوں تو ہمیں ان قوتوں کو ان کے مستوی میں صرف دو سمتوں میں تحلیل کرنا کافی ہے۔

اگر صرف تین ہم مستوی قوتیں ایک نقطہ پر عمل کریں تو متبادل کی شرائط بالعموم لامی کے مسئلہ سے نہایت آسانی سے معلوم ہو سکتی ہیں (دفعہ ۲۳)

۲۹۔ ایک ذرہ ایک چکنے مادی سخنی یا سطح پر ساکن ہے۔ اس کے

متبادل کی شرائط معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سخنی کے جس نقطہ پر ذرہ ساکن ہے اس کے محدود (لامی) ہیں اور توس و ن کا طول جو ایک ثابت نقطہ سے ناپا گیا ہے اس ہے۔

سخنی کے تماس کی سمتی جیوب التمام ہیں

$$\frac{فرلا}{فرس}، \frac{فرما}{فرس}، \frac{فری}{فرس}$$



اور یہ معلوم ہو سکتے ہیں اگر منحنی کی شکل معلوم ہو۔  
(۱۶) چونکہ منحنی چکنا ہے اس لئے قوتوں کا عمل نقطہ تماس پر صرف منحنی کے  
عماد کی سمت میں ہو سکتا ہے یعنی منحنی کے تماس کی سمت میں حاصل قوت لازماً  
معدوم ہونی چاہیئے اس لئے اگر محوروں کے متوازی ذرہ پر عمل کرنے والی  
قوتوں کے اجزائے ترکیبی لا، ما، مے ہوں تو

$$لا \frac{فرلا}{فرس} + ما \frac{فرما}{فرس} + مے \frac{فرمی}{فرس} = ۰$$

اگر منحنی ایک سطح مستوی میں ہو تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$لا \frac{فرلا}{فرس} + ما \frac{فرما}{فرس} = ۰ \quad \text{یعنی} \quad لا + ما \frac{فرما}{فرلا} = ۰$$

اگر ذرہ ایک چکنی سطح (لا، ما، می) کے نقطہ ن پر ساکن ہو تو ن پر  
کے کسی تماسی خط میں حاصل صریحاً معدوم ہونا چاہیئے۔ پس اجزائے ترکیبی  
لا، ما، مے کی حاصل قوت کو (جو اس خط پر عمل کرتی ہے جس کی سمتی  
جیوب التمام لا، ما، مے کے متناسب ہیں) ن پر گئے عماد پر منطبق ہونا  
چاہیئے اور ہم جانتے ہیں کہ ن پر کے عماد کی سمتی جیوب التمام ہیں

$$\frac{فرلا}{فرلا} ، \frac{فرما}{فرما} ، \frac{فرمی}{فرمی}$$

$$\frac{فرلا}{لا} = \frac{فرما}{ما} = \frac{فرمی}{مے}$$

اس لئے

نیز سطح پلاعمادی تعامل صریحاً حاصل قوت

کے مساوی ہونا چاہیئے

$$۳۔ ایک چکنے تار کو ایک ناقص  $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = \frac{۲}{۳}$  کی شکل میں موڑا گیا ہے$$



لہذا مکمل کرنے سے

$$\frac{r}{r} + \frac{r}{r} = \text{مستقل} = -\frac{1}{r}$$

$$(r - r) (r - r) = r - r$$

## مثالیں

(۱) ایک چھوٹا سنگ ایک چکنے ناقص کی شکل کے تار پر پھسل سکتا ہے۔ یہ دو ماسوں میں اور دھکی طرف دو قوتوں سے کھینچتا ہے جو بالترتیب  $r$  اور  $r$  کے متناسب ہیں۔ تعادل کا مقام معلوم کرو۔

(۲) ایک ذرہ  $r$  پر دو قوتیں  $r$  اور  $r$  دو ثابت نقطوں  $r$  اور  $r$  کی طرف عمل کرتی ہیں، ثابت کرو کہ یہ ایک چکنے نالی کے ہر مقام پر ساکن رہ سکتا ہے جس کی مساوات  $r = r$  مستقل ہے جہاں

$$r = r \quad \text{اور} \quad r = r$$

اگر اس پر انہی دو نقطوں کی طرف دو مستقل قوتیں  $r$  اور  $r$  عمل کریں تو اس کے متناظر نالی کی مساوات  $r = r + r = r$  مستقل ہوگی۔

(۳) ایک ذرہ  $r$  پر کشش جاذبہ  $\frac{r}{r}$  ایک ثابت نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے اور قوت اندفاع  $\frac{r}{r}$  ایک اور ثابت نقطہ سے عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ  $r$

کے ایسے طریق کی مساوات جسکے ہر نقطہ پر پوری کشش صرف ماس کی سمت میں ہے  $r = r$ ۔  $r = r$  مستقل ہوگی۔  $r$  اور  $r$  دو زاویے ہیں جو  $r$  اور  $r$  بالترتیب  $r$  و  $r$  محدودہ کے ساتھ بناتے ہیں۔

اگر قوتیں  $\frac{r}{r}$  اور  $\frac{r}{r}$  ہوں تو ثابت کرو کہ منحنی کی مساوات  $r = r$  مستقل ہوگی یعنی ایک دائرہ کی قوس ہوگی۔

(19)

(۴) ایک ہلی مکانی کی شکل کی ہے۔ اس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انحصاری ہے اور اس نیچے کی طرف ہے، ایک وزنی ذرہ کو اس کے اندر رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ معین کی سمت میں باہر کی طرف عمل کرنے والی ایسی قوت کے زیر عمل متبادل رہ سکتا ہے جو معین کے طول کی طرح بدے۔ نیز ثابت کرو کہ ہلی کا متناظر تعامل مکانی کے ماسک سے اس کے فاصلہ کے جذر کے متناسب ہوتا ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ کھینی سطح  $\frac{3}{31} + \frac{3}{32} + \frac{3}{33} = 1$  پر کا وہ نقطہ جس پر

مبدأ کی طرف عمل کرنے والی قوت کے زیرِ عمل کوئی ذرہ ساکن رہ سکتا ہے اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a}}} = \frac{c}{\sqrt[3]{c}} = \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$$

(۲۰)

## دوسرا باب

### متوازی قوتیں - معیار اثر - جفت

۳۰۔ ایک استوار جسم پر دو متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ان کا حاصل معلوم کرنا۔

محور ت اول - فرض کرد کہ قوتیں موافق ہیں یعنی ایک ہی سمت میں عمل کرتی ہیں۔

فرض کرو کہ قوتیں  $F$  اور  $Q$  ہیں جو جسم کے دو نقطوں  $A$  اور  $B$  پر عمل کرتی ہیں اور بالترتیب خطوں  $AB$  اور  $BC$  سے تعبیر ہوتی ہیں۔

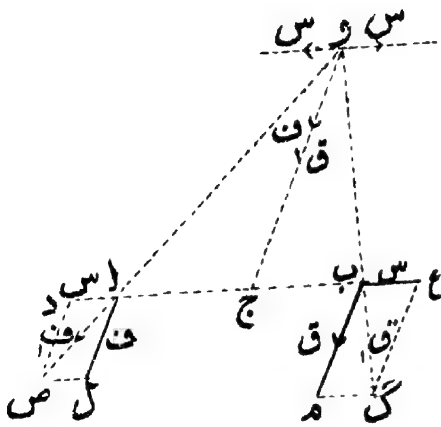
$A$  اور  $B$  پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک  $F$  کے مساوی ہو اور بالترتیب  $B$  اور  $A$  کی سمتوں میں عمل کریں اور  $A$ ،  $B$  سے تعبیر ہوں۔ یہ دو قوتیں ایک دوسرے کی تعدیل کرتی ہیں اور جسم کے توازن پر کچھ اثر نہیں ڈالتیں۔

متوازی الاضلاع  $ABCD$  میں  $AD$  اور  $BC$  کی تکمیل کرو اور دونوں  $AB$ ،  $CD$  کو بڑاؤ حتیٰ کہ یہ وپر ملیں وجہ  $AC$  کے متوازی کھینچو جو  $AB$  سے جبرلے۔

$A$  پر جو دو قوتیں  $F$  اور  $Q$  عمل کرتی ہیں ان کا حاصل  $F+Q$  ہے جو  $AC$  سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس کے نقطہ عمل کو وپر منتقل کر دو۔

اسی طرح  $B$  پر عمل کرنے والی قوتیں  $Q$  اور  $F$  کا حاصل  $F+Q$  ہے جو  $BD$  سے تعبیر ہوتا ہے۔ اس کے نقطہ عمل کو بھی وپر لیجاؤ۔

اب وپر عمل کرنے والی قوت فہ کو دو قوتوں میں تحلیل کیا جاسکتا ہے جن میں سے ایک قوت س، ا د کے متوازی ہے اور دوسری ف، و ج کے متوازی ہے اسی طرح سے قوت ق کو جو وپر عمل کرتی ہے دو قوتوں میں تحلیل کیا جاسکتا ہے ایک قوت س میں جو ب ع کے متوازی ہے اور دوسرے قوت قی جو و ج کے متوازی ہے۔ پس ابتدائی قوتیں ف اور ق ایک قوت (ف + ق) کے معادل ہیں جو و ج کی سمت میں ممل کرتی ہے یعنی نقطہ ج پر ابتدائی قوتوں کی سمت میں عمل کرتی ہے۔



عمل سے ظاہر ہے کہ و ج ا اور ا ل ص متشابہ مثلث ہیں

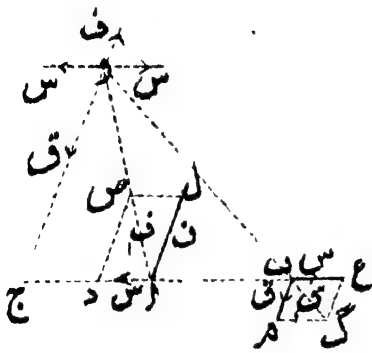
$$\therefore \frac{\text{و ج}}{\text{ج ا}} = \frac{\text{ا ل}}{\text{ل ص}} = \frac{\text{ف}}{\text{س}} \text{ یعنی } \text{ف} \times \text{ج ا} = \text{س} \times \text{و ج} \dots (۱)$$

اسی طرح چونکہ مثلث و ج ب اور ب م گ متشابہ ہیں۔ اس لئے

$$\text{ق} \times \text{ج ب} = \text{س} \times \text{و ج} \dots (۲)$$

$$\text{اس لئے } \text{ف} \times \text{ج ا} = \text{ق} \times \text{ج ب} \text{ یعنی } \frac{\text{ج ا}}{\text{ج ب}} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}}$$

یعنی نقطہ ج، خط اب کو داخلا قوتوں کی متغلوب نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔  
**صورت دوم۔** فرض کرو کہ قوتیں مخالف ہیں یعنی مخالف سمتوں میں  
 عمل کرتی ہیں۔



فرض کرو کہ ان میں سے  
 بڑی قوت ف ہے جسب سابق  
 عمل کرنے سے وتر ا ص اور  
 ب گ ایک دوسرے سے  
 لازماً کسی نقطہ و پر ملیں گے  
 سوائے اس صورت کے جبکہ  
 یہ متوازی ہوں یعنی جب قوتیں  
 ف اور ق مساوی ہوں۔

حسب سابق ابتدائی قوتیں  
 ف اور ق ایک قوت ف-ق  
 کے معادل ہونگی جو ج و محدودہ

کی سمت میں عمل کرتی ہے یعنی جوج برف کی سمت کے متوازی عمل کرتی ہے۔

صورت اول کے مطابق  $\frac{ج ل}{ج ب} = \frac{ق ب}{ف ب}$  یعنی ج خط اب کو خارجاً قوتوں

کی متغلوب نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔

خلاصہ یہ کہ اگر دو متوازی قوتیں ف اور ق ایک استوار جسم کے نقاط ل اور

ب پر عمل کریں تو

(۱) اُن کا حاصل ایک قوت ہوگی جس کا خط عمل متوازی قوتوں کے خط عمل کے  
 متوازی ہوگا۔ نیز جب ترکیبی قوتیں موافق ہوں تو حاصل کی سمت قوتوں کی سمت  
 ہوگی اور جب یہ مخالف عمل کرتی ہوں تو حاصل کی سمت بڑی قوت کی سمت ہوگی۔

(۲) ان کا نقطہ عمل ج، ل ب پر کا ایسا نقطہ ہوگا کہ





کسی سمت میں عمل کریں۔  
دفعہ اس کی رو سے آ اور لہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا حاصل لہ کو نقطہ نش  
پر قطع کرتا ہے جہاں

$$\frac{ق_۱ - ق_۲}{ق_۱ + ق_۲} = \frac{لہ - لہ}{لہ - لہ} = \frac{لہ - لہ}{لہ - لہ}$$

جہاں نش عمود ہے سطح مستوی لاوا پر۔

$$\frac{ق_۱ + ق_۲}{ق_۱ - ق_۲} = \frac{لہ - لہ}{لہ - لہ}$$

قوت (ق۱ + ق۲) جو ث پر عمل کرتی ہے اور قوت ق۲ جو لہ پر عمل کرتی

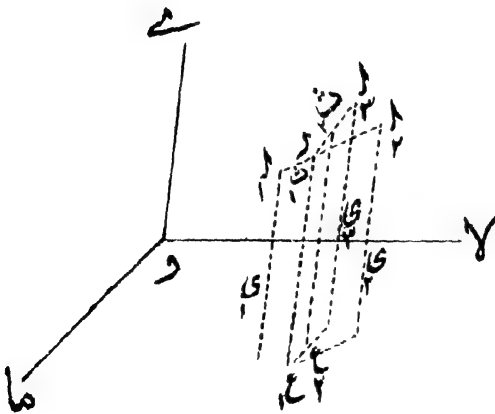
(۲۳)

ہے ان کا حاصل نش لہ کو نش پر قطع کرتا ہے جہاں

$$\frac{ق_۱ + ق_۲}{ق_۱ - ق_۲} = \frac{لہ - لہ}{لہ - لہ} = \frac{لہ - لہ}{لہ - لہ}$$

$$\frac{ق_۱ + ق_۲}{ق_۱ - ق_۲} = \frac{لہ - لہ}{لہ - لہ} = \frac{لہ - لہ}{لہ - لہ}$$

اور علیٰ ہذا القیاس خواہ قوتوں کی تعداد کچھ ہی ہو۔



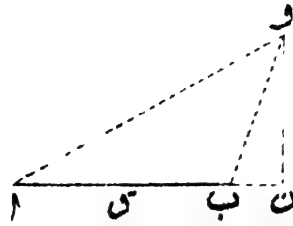
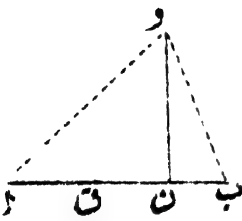


سے وہ مقدار مراد ہے جو قوت مذکور اور اس کے خطِ عمل سے نقطہ معلومہ کے عمودی فاصلے کو ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثلاً ایک قوت  $Q$  کا معیار اثر کسی نقطہ معلومہ  $O$  کے گرد  $Q \times ON$  ہے جہاں  $ON$  نقطہ  $O$  سے  $Q$  کے خطِ عمل پر عمود ہے۔

یہ بات قابل غور ہے کہ کسی قوت  $Q$  کا معیار اثر کسی نقطہ  $O$  کے گرد صفر نہیں ہو سکتا تا وقتیکہ قوت صفر نہ ہو یا قوت نقطہ معلومہ میں سے نہ گزرے جس کے گرد معیار اثر لیا گیا ہے۔

فرض کر دو قوت  $Q$  کو مقدار سمت اور خطِ عمل کے لحاظ خط  $AB$  سے تعبیر کیا گیا ہے



و  $Q$  اور  $OB$  کو ملاؤ

تب قوت  $Q$  کا معیار اثر  $O$  کے گرد  $Q \times ON$  یعنی  $AB \times ON$  ہے۔  
لیکن  $AB \times ON$  مثلث  $OAB$  کے رقبہ کا دو چند ہے۔

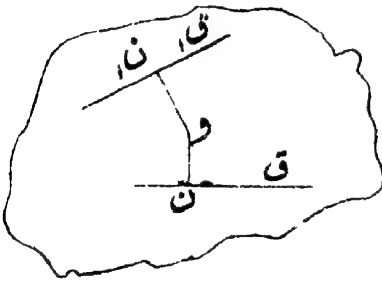
پس قوت  $Q$  کا معیار اثر کسی نقطہ کے گرد ہندسی طور پر اس مثلث کے رقبہ کے دو چند سے تعبیر ہوتا ہے جس کا قاعدہ قوت مذکور کو تعبیر کرنے والا خط ہو اور جس کا رأس یہ نقطہ ہو جس کے گرد معیار اثر لیا گیا ہے۔

۴۶۔ ایک نقطہ کے گرد کسی قوت کے معیار اثر کے طبعی معنی۔ (۲۵)

فرض کرو کہ جسم ایک مستوی پتہ پر ہے جو ایک چکنے مینر پر بڑا ہے اور جسم کا نقطہ و ثابت کر دیا گیا ہے، تب قوت عامل قی کا اثر یہ ہوگا کہ جسم مرکز و کے گرد گھومتے اور یہ اگر صفر نہیں ہوگا تا وقتیکہ (۱) قوت ق صفر نہ ہو یا (۲) قوت ق نقطہ و میں سے نہ گزرے جس صورت میں عود و ق صفر ہوگا۔

لہذا حاصل ضرب ق  $\times$  و ق سے قوت قی کے زیر اثر نقطہ و کے گرد جسم کے میلان کا بہترین معیار معلوم ہوتا ہے جس کی عملی طور پر ذیل کی طرح تصدیق ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ پتہ اور رسیوں کے زیر عمل ساکن ہے جن کے تناؤ قی اور قی ہیں اور جو پتہ کے ثابت نقطوں کے ساتھ بندی ہیں اور جن کے خطوط عمل پتہ سے کی سطح مستوی میں ہیں۔ فرض کرو کہ و ق اور و ق ثابت نقطہ و سے قوتوں قی اور قی کے خطوط عمل پر عود نکالے گئے ہیں۔



اگر ہم طول و ق اور و ق کو اور نیز قوتوں قی اور قی کو نابیں تو ہمیں معلوم ہوگا کہ حاصل ضرب ق  $\times$  و ق ہمیشہ حاصل ضرب قی  $\times$  و ق کے مساوی ہے اس لئے

قوتیں قی اور قی جسم کو نقطہ و کے گرد گھمانے کی مساوی مگر متقابل قابلیت رکھیں گی اگر ان کے معیار اثر نقطہ و کے گرد مساوی ہوں۔

ان قوتوں قی اور قی کو اس طرح ناپ سکتے ہیں کہ رسیوں کو ہلکی چکنی جو رسیوں پر سے گزارا جائے اور ان کے ر وں پر اس قدر اوزان لٹکا دیے جائیں کہ متبادل پیدا ہو جائے۔ یہ اوزان رسیوں کے تباؤں کے ناپ ہونگے بار رسیوں کو کمانی دار ترازوں کے کندوں سے بانڈھا جائے اور ان ترازوں کو مشعل دندہ کے پڑھ لیا جائے۔

۳۷۔ مثبت اور منفی معیار اثر۔ دفعہ ما قبل میں اگر صرف ایک ہی قوت قی پتہ سے

(۲۶)

پر عمل کرے تو وہ جسم کو گھڑی کی سوئیوں کے مخالف سمت میں گھما لگی جبکہ گھڑی میز پر اس طرح رکھی ہے کہ اس کا رخ اوپر کو ہے۔ برعکس اس کے اگر صرف قوت  $Q$  پر عمل کرے تو وہ جسم کو اسی سمت میں گھما لے گی جس سمت میں گھڑی کی سوئیاں حرکت کرتی ہیں۔ نقطہ  $D$  کے گرد  $Q$  کے معیار اثر کو جو سمت میں ہے منفی معیار اثر کہتے ہیں اور  $Q$  کے معیار اثر کو جو سمت میں ہے منفی معیار کہتے ہیں۔

ایک نقطہ کے گرد متعدد قوتوں کے معیار اثروں۔ کہ جبری مجموعہ سے ان قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ مراد ہوتا ہے جبکہ ہر معیار اثر کو اس کی مناسب علامت کے ساتھ لیا جائے۔

۳۸۔ کسی قوتوں کے معیاروں کا جبری مجموعہ جو ان کی سطح مستوی کے کسی نقطہ  $D$  کے گرد لیا گیا ہے اسی نقطہ کے گرد ان کے حاصل کے معیار اثر کے مساوی ہوتا ہے۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ قوتیں  $F$  اور  $Q$  ایک دوسرے سے نقطہ  $A$  پر ملتی ہیں۔

وے متوازی قوت  $F$  کی سمت کے متوازی کھینچو تاکہ  $Q$  کے خط عمل سے جبر ہوں۔

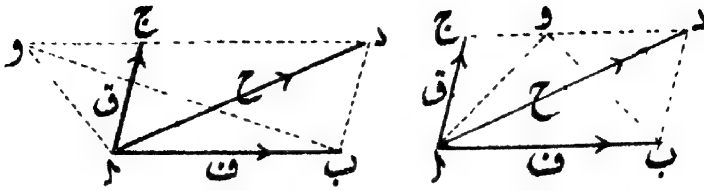
فرض کر دو کہ  $Q$  کی مقدار کو تعبیر کرتا ہے، اسی پہاڑ پر قوت  $F$  کو اب اسے تعبیر کرو۔

متوازی اضلاع  $AB$  کی تکمیل کرو اور  $AD$ ،  $DB$  کو ملاؤ۔ تب  $AD$  قوت  $F$  اور  $Q$  کے حاصل  $H$  کو تعبیر کرے گا۔

(۷) اگر  $Q$  زاویہ  $D$   $AB$  کے باہر ہو جیسا کہ شکل اول میں دکھایا گیا ہے تو ہمیں ثابت کرنا چاہیے کہ

$$r \Delta D + r \Delta B = r \Delta H$$

کیونکہ ف اور ق کے معیار اثر نقطہ و کے گرد ایک ہی سمت میں ہیں۔



چونکہ اب اور و د متوازی ہیں اس لئے  $\Delta \text{واب} = \Delta$   
 $\Delta \text{لج} = \Delta$

$$\therefore \Delta \text{واب} + \Delta \text{لج} = \Delta \text{واج} + \Delta \text{واج} = \Delta \text{واد}$$

(ب) اگر و زاویہ ج د کے اندر واقع ہو جیسا کہ شکل دوم میں دکھایا گیا ہے تو ہمیں ثابت کرنا چاہیے کہ  $\Delta \text{واب} - \Delta \text{لج} = \Delta \text{واج}$

(کیونکہ ف اور ق کے معیار اثر و کے گرد مخالف سمتوں میں ہیں) حسب سابق  
 $\Delta \text{واب} = \Delta \text{لج} = \Delta$

$$\text{اس لئے } \Delta \text{واب} - \Delta \text{لج} = \Delta \text{واج} - \Delta \text{لج} = \Delta \text{واد}$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ق و ف اور ق متوازی ہیں۔

و سے واج با قوتوں اور ان کے حاصل ح (= ف + ق) پر عمود کھینچو تاکہ ان سے بالترتیب اب اور ج برے۔

$$\text{دفعہ ۳ کی رو سے } ف \times \text{اج} = ق \times \text{ج ب} \dots \dots (۱)$$

(۲۷)

اس لئے ف اور ق کے معیار اثر و کے مجموعہ نقطہ و کے گرد

$$= ق \times وب + ف \times وا = ق(وج + جب) + ف(وج - لج)$$

$$= (ف + ق) \times وج = مساوات (۱) سے$$

$$= حاصل کا معیار اثر و کے گرد۔$$

ان صورتوں میں جبکہ نقطہ و کا کوئی اور متسام ہو یا قوتیں متوازی اور مخالف ہوں اس مسئلہ کا ثبوت طالب علم بہ آسانی فراہم کر سکتا ہے۔

۳۹۔ اگر نقطہ وجس کے گرد معیار اثر لئے گئے ہیں حاصل قوت کے خط عمل پر واقع ہو تو حاصل کا معیار اثر اس نقطہ کے گرد صریحاً صفر ہو گا۔ لہذا اس صورت میں نقطہ مذکور کے گرد ترکیبی قوتوں کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ معدوم ہو جاتا ہے پس دو قوتوں کے معیار اثر ان کے حاصل کے خط عمل پر کے کسی نقطہ کے گرد مساوی اور مختلف علامت ہوتے ہیں۔

۴۰۔ معیار اثروں کا عام مسئلہ۔ اگر متعدد قوتیں ف، ق، م، اس... ایک ہی مستوی میں ایک استوار جسم پر عمل کریں تو ان کے مستوی میں کسی نقطہ و کے گرد ان کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ اس نقطہ کے گرد ان کے حاصل کے معیار اثر کے مساوی ہو گا۔

فرض کرو کہ ف حاصل ہے ف اور ق کا

اور فم حاصل ہے ف اور م کا

اور فم حاصل ہے ف اور م کا

علیٰ ہذا قیاس یہاں تک کہ آخری حاصل لمجائے۔

تب فم کا معیار اثر و کے گرد = ف اور ق کے معیار اثروں کے مجموعہ کے

(دفعہ ۱۳۸)

نیز فم کا معیار اثر و کے گرد = ف اور م کے معیار اثروں کے مجموعہ کے

= فنا اور قی اور من کے میار اثروں کے مجموعہ کے  
 اسی طرح سے فنا کا میار اثر و کے گرد = فنا اور من کے میار اثروں کے مجموعہ کے  
 = فنا اور قی اور من کے میار اثروں کا مجموعہ  
 علیٰ ہذا القیاس یہاں تک کہ سب قوتیں محسوب کر لی جائیں۔  
 پس آخری اصل کا میار اثر

= ترکیبی قوتوں کے میار اثروں کا جبری مجموعہ۔  
 ۴۱۔ دفعہ ۲۹ کی مانند یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ قوتوں کی کسی تعداد  
 کے میار اثروں کا جبری مجموعہ ان کے حاصل کے خط عمل پر کے کسی نقطہ کے گرد  
 صفر ہوتا ہے اور برعکس اس کے اگر قوتوں کی کسی تعداد کے میار اثروں کا جبری  
 مجموعہ کسی نقطہ کے گرد صفر ہو تو ان کا حاصل اس نقطہ میں سے گزرے گا جس کے  
 گرد میار اثر لئے گئے ہیں، یا ان کا حاصل صفر ہو گا اور اس صورت میں قوتیں  
 متعادل ہو گئی۔ (۲۸)

پس اس طرح ہم قوتوں کے نظام کے حاصل کے خط عمل پر متعدد نقطے معلوم  
 کر سکتے ہیں۔ کیونکہ ہمیں صرف ایک ایسا نقطہ معلوم کرنا پڑیگا جس کے گرد قوتوں کے  
 میار اثروں کا جبری مجموعہ صفر ہو جائے۔ تب حاصل کو اس نقطہ میں سے گزرنے کا لازم  
 ہو گا۔

اگر ہمارے پاس متوازی قوتوں کا ایک نظام ہو تو حاصل قوت مقدار اور سمت  
 دونوں کے لحاظ سے متعین ہو جاتی ہے جبکہ ان کے حاصل کے خط عمل کا ایک  
 نقطہ معلوم ہو جائے۔

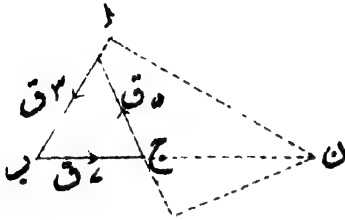
مثال۔ تین قوتیں جو ۲، ۳، ۴ کے سادی ہیں متصادی الاصلہ  
 مثلث ا ب ج کے اضلاع ا ب، ب ج، ج ا کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ ان کے  
 حاصل کی مقدار، سمت اور خط عمل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ مثلث کا ہر ضلع ۱ ہے، نیز فرض کرو کہ حاصل قوت ضلع ا ب ج سے من  
 پر ملتی ہے، تب قوتوں کے میار اثر ان کے گرد معدوم ہو جائیں گے۔

$$۳ ق \times (ب ج + ج ا) = ۹۰ = ۵۰ ق \times ج ج$$



$$\text{ج} = \frac{۱۳}{۲}$$



ج کے عمود ارسمت میں قوتوں کے  
اجزائے ترکیبی کا مجموعہ

$$= ۵ ق جب ۹۰ - ۳ ق جب ۹۰ = ۳ ق جب ۹۰$$

نیز ج کی سمت میں قوتوں  
کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ

$$= ۴ ق - ۵ ق جب ۹۰ - ۳ ق جب ۹۰ = ۳ ق$$

پس حاصل قوت = ق ۱۳ اور ج کے ساتھ زاویہ سمت ۱۳/۲ یعنی ۳۰ بنائی  
جے اور ف میں سے گزرتی ہے جہاں ج ن = ۲ ب ج

## مثالیں

- (۱) ایک مثلث ا ب ج کے اضلاع کی سمتوں میں قوتیں جو بالترتیب ا ب، ب ج، ج ا کے متناسب ہیں عمل کرتی ہیں، ثابت کرو کہ ان کا حاصل لمبا خط مقدار اور سمت کے ج ا سے تغیر ہوگا۔ اور اس کا خط عمل ب ج سے نقطہ لا پر لے گا جہاں ج لا ب ج
- (۲) ا ب ج ایک مثلث ہے اور د، ع، ف اس کے اضلاع کے وسطی نقطے ہیں، قوتیں جو بالترتیب ا د، د ب ع اور ب ج ف سے تغیر دیتی ہیں ا د اور ب ع کے نقطہ تقاطع پر عمل کرتی ہیں، ثابت کرو کہ ان کا حاصل لمبا خط مقدار اور سمت کے ج ا سے تغیر ہوتا ہے اور اس کا خط عمل ب ج کو نسبت ۱:۲ سے تقسیم کرتا ہے۔
- (۳) تین قوتیں ایک مثلث کے اضلاع کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر دو قوتوں کا مجموعہ تیسری قوت کے مساوی لمبا خط مقدار اور متقابل لمبا خط سمت ہو تو ان تین قوتوں کا حاصل مثلث کے انفرونی دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔
- (۴) ایک برقی تار بجلی کے کھمبے کے گرد ہو کر گزرتا ہے تار افق کے متوازی ہے اور کھمبے کے گرد لپیٹے ہوئے سرے ایک دوسرے سے ۹۰ کا زاویہ بناتے ہیں کھمبا ایک تار کے

سہارے قائم ہے جو اس کے وسطی نقطہ سے بندھا ہے اور افقی سے ۶۰ کا زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس تار کا تناؤ برقی تار کے تناؤ کا ۴/۳ حصہ گھٹا ہے۔

(۵)۔ ایک رسی ہے جس کا طول دیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ اس کے ایک سرے کو ایک ستون کے قاعدے سے کس قدر بلندی پر باندھا جائے کہ زمین پر کھڑا ہو ایک شخص ایک دی ہوئی قوت سے اس کے دوسرے سرے کو کھینچے تو ستون الٹ سکے گا بڑے سے بڑا میلان رکھے۔

(۶)۔ ایک قوت کی مقدار معلوم ہے اور اس کے معیار اثر دو دئے ہوئے نقطوں اور دب کے گرد معلوم ہیں۔ ہندسی عمل سے اس کا خط عمل معلوم کرو۔

(۷)۔ بلحاظ مقدار اور سمت دو قوتیں دی ہوئی ہیں۔ ستوی کے ان تمام نقطوں کا طریق معلوم کرو جس کے گرد ان قوتوں کا معیار اثر مقدار اور سمت میں ایک ہی ہے۔

(۸)۔ اب ایک دائرہ کا قطر ہے اور دب فن اور دب ق ایک دوسرے پر علی القوم دو وتر ہیں۔ ثابت کرو کہ ان قوتوں کے معیار اثر جو دب فن اور دب ق سے تعبیر ہوتی ہیں اُن کے گرد مساوی ہیں۔

(۹)۔ ایک شخص اپنے کندھے پر ایک چھڑی رکھے ہے اور چھڑی کے ایک سرے پر ایک گھٹھا اٹھائے جا رہا ہے اگر اس کے ہاتھ اور کندھے کے درمیانی فاصلہ کو بدلا جائے تو بتاؤ کہ اس سے اس کے کندھے پر کے دباؤ میں کیا تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

(۱۰)۔ ایک سائیکل سوار کا وزن ۱۵۰ پونڈ ہے، وہ اپنا تمام وزن سائیکل کے ایک پائے دان پر ڈال دیتا ہے جبکہ پائے دان افقی ہے اور سائیکل کو آگے بڑھنے سے کسی طرح روک دیا گیا ہے۔ رجبیر کا تناؤ معلوم کرو جبکہ کریک کا طول ۶ انچ ہو اور رجبیر کے پیتے کا نصف قطر ۴ انچ ہو۔

(۱۱)۔ ایک خط توڑنے کی ترازو ایک قائم الاویہ متساوی الساقین مثلث اب ج کی شکل کے یکساں پترے پر مشتمل ہے جس کا وزن ۳ اونس ہے اس کو اس کے زاویہ قائمہ ج سے ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے جس کے ساتھ ایک خاقوی ڈوری بھی لٹک رہی ہے۔ اس کے ضلع اب پر ایک پیاز منقوش ہے جس پر نشانات ۱ اونس ۲ اونس وغیرہ ہیں۔ کسی خط کا وزن معلوم کرنے کے لئے اس کو اس کے سرے پر لٹکاتے

ہیں اور جس مقام پر بنا فولی ڈوری بنانہ کو قطع کرتی ہے اس کو پایہ میں پڑھ لیتے ہیں۔ ثابت کر دو کہ اس سے نشانات کے فاصلہ سلسلہ موسیقیہ میں ہیں۔

(۱۲) پتوں کا ایک تماش میز پر رکھا گیا ہے جس کا ہر پتہ اپنے سے بجلی پتہ سے طول کے رخ باہر نکلا ہوا ہے۔ اگر ہر پتہ اتنا باہر نکلا ہوا ہو جتنا کہ ممکن ہے تو ثابت کر دو کہ یکے بعد دیگرے پتوں کے سردوں کے درمیانی فاصلے ایک سلسلہ موسیقیہ بناتے ہیں۔

(۱۳) — ایک اسطوانہ کا طول ب ہے اور اس کے قاعدہ کا قطر ج ہے اسطوانہ کا منہ کھلا ہے اور اسطوانہ ایک افقی سطح پر رکھا ہوا ہے۔ ایک یکساں سلاح جزو اسطوانہ کے اندر ہے اور اس کے اوپر کے اور نیچے کے کناروں کو مس کرتی ہے۔ اگر اسطوانہ کا وزن سلاح کے وزن کا ن گھٹا ہو تو سلاح کا طول معلوم کرو جبکہ اسطوانہ اٹھنے کے عین قریب ہو۔

## جفت

۴۲۔ تعریف۔ دو مساوی مگر مخالف توازی قوتیں جن کے خطوط عمل ایک ہی نہیں ہیں جفت بناتی ہیں۔ بعض مصنف جفت کی بجائے اصطلاح پیچیدگی استعمال کرتے ہیں اور اس اصطلاح جفت سے جفت کے معیار اثر کو تعبیر کرتے ہیں۔

جفت کی مثال کے لئے ملاحظہ ہوں وہ قوتیں جو ایک تیج شکنجہ کے دستہ پر لگائی جاتی ہیں یا گھڑ پال کو چابی دیتے وقت چابی پر جو قوتیں لگائی جاتی ہیں یا دروازے کو کھولنے کے لئے اس کے دستہ پر ہاتھ سے جو قوت لگائی جاتی ہے۔

جفت کے بازو سے وہ عمودی فاصلہ مراد ہوتا ہے جو اس کی دو قوتوں کے خطوط عمل کے درمیان ہو۔

جفت کے معیار اثر سے جفت کی ایک قوت اور جفت کے بازو کا حاصل ضرب مراد ہوتا ہے مثلاً جفت (ق ا ق) کا بازو (ا ب) ہے اور اس کا معیار اثر (ق ا ب) ہے۔

جفت کی سطح مستوی میں کسی نقطہ سے جفت کی قوتوں کے خطوط عمل پر ایک عمودی خط (ا ب) کھینچو جو ان قوتوں سے (ا) اور (ب) پر ملے۔

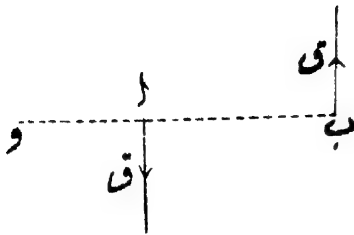
متب دے گئے گردنوں کے معیار اثروں کا جھیری مجموعہ

ق × وب - ق × وا

$$= ق \times ب$$

= جہت کا معیار آخر

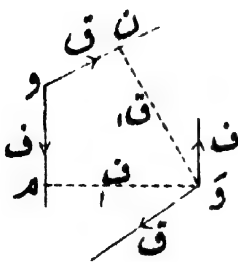
اس سے ظاہر ہے کہ خواہ نقطہ  
دیکھیں لیا جائے اس کے گرد معیار  
افزہ ہینہ دی ہی رہتا ہے۔



۳۴۔ اگر دو جنت ایک استوار جسم پر ایک ہی مستوی میں عمل کریں اور ان کے معیار اثر مساوی اور مخالف ہوں تو وہ ایک دوسرے کا توازن کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک جنت کی دو قوتیں (ف، ف) ہیں جو بازو ف کے  
سروں پر عمل کرتی ہیں اور دوسرے جنت کی قوتیں (ق، ق) ہیں جو بازو ق کے  
سروں پر عمل کرتی ہیں۔

صورت اول۔ فرض کرو کہ ایک قوت ف ایک قوت ق سے کسی نقطہ پر ملتی ہے اور دوسری دو قوتیں د ب ر ملتی ہیں۔



خمسے ان قوتوں پر جو وہیں سے ہیں  
گزر رہیں عمود و مِردن کینچن جو ان  
عمودوں کے طول صریحاً اور قی  
ہوں گے۔

چونکہ جفتوں کے معیار از مقدار  
میں مساوی ہیں اس لئے  
 $f = f = c$

(۴۱)

اندازہ ۴۱ کی رو سے نقطہ و قوتوں ف اور ق کے (جو ویں سے گزرتی ہیں) حاصل پر واقع ہوگا اس لئے و ق حاصل کا خطا عمل ہے۔

اسی طرح سے ف اور ق (جو ویں سے گزرتے ہیں) کے حاصل کا خطا عمل و و ہے۔

نیز یہ دونوں حاصل مقدار میں مساوی ہیں کیونکہ و پر عمل کرنے والی قوتیں و پر عمل کرنے والی قوتوں کے بالترتیب مساوی ہیں اور نیز اسی زاویہ پر عمل کرتی ہیں۔

صورت دوم۔ فرض کرو کہ جتوں کو بنانے والی قوتیں سب متوازی ہیں اور کوئی خط مستقیم جوابی سمتوں پر عمود وار ہے ان سے نقاط ا، ب، ج، د، پلٹا ہے پس یہ دونوں حاصل ایک دوسرے

کو معدوم کرتے ہیں اور اس لئے وہ چار قوتیں جن سے دو جنت بنتے ہیں۔ توازن میں ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اب چونکہ معیار اثر مساوی ہیں اس لئے

$$ف \times ا = ب \times ق = ج \times د \dots\dots\dots (۱)$$

فرض کرو کہ ج پر عمل کرنے

والی قوت ف اور ب پر عمل کرنے والی قوت ق کے

حاصل کا نتیجہ عمل ل ہے۔ لہذا

$$ف \times ب = ل = ق \times ج$$

..... (۲) دفعہ ۳

(۲) کو (۱) میں سے تفریق کرنے سے

$$ف \times ل = ق \times د$$

پس ا پر عمل کرنے والی قوت ف اور د پر عمل کرنے والی قوت ق کے حاصل کا نقطہ عمل بھی ل ہے۔

لیکن ان دونوں حاصلوں کی مقدار ف + ق ہے اور ان کی سمتیں متقابل

ہیں اس لئے یہ تعادل میں ہیں۔ لہذا یہ دو جنت جن چار قوتوں پر مشتمل ہیں وہ باہم متوازن ہیں۔

۴۴ — چونکہ ایک ہی سطح مستوی کے دو جنت جن کے معیار اثر مساوی اور مخالف ہوں ایک دوسرے کا تعادل کرتے ہیں اس لئے اگر ہم ان جتوں میں

سے ایک جنت کی قوتوں کی سمتوں کو بدل دیں تو ظاہر ہے کہ  
ایک ہی مستوی میں مساوی معیار اثروں والے دو جنت  
ایک دوسرے کے معادل ہوتے ہیں۔

۴۵۔ اگر ایک استوار جسم پر ایک ہی سطح مستوی میں متعدد جنت عمل  
کریں تو یہ سب مل کر ایک جنت کے مساوی ہوتے ہیں جس کا معیار اثر  
جنتوں کے معیار اثروں کے جبر یہ مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کر دو جنت ذیل کی قوتوں پر مشتمل ہیں، قوتوں (ف، ف) کا جنت جس کا  
بازو ف، قوتوں (ق، ق) کا جنت جس کا بازو ق ہے، قوتوں (س، س) کا جنت  
جس کا بازو س ہے، وغیرہ وغیرہ۔ جنت (ق، ق) کی بجائے ایک اور جنت لگاؤ  
جس کے اجزائے ترکیبی کا خط عمل وہی ہو جو قوتوں (ف، ف) کا ہے۔ آخر اگر  
جنت کی ہر ایک قوت کی مقدار لایا ہوگی جہاں  $لا \times ف = ق \times ق$  (دفعہ ۴۴) پس  
$$لا = ق \times \frac{ق}{ق}$$

اسی طرح جنت (س، س) کو نکال کر اس کی بجائے جنت (س، س) ،  $\frac{س}{ق}$  ،  $\frac{س}{ق}$  )  
رکھو جس کی قوتیں اسی خط میں عمل کرتی ہیں جس میں قوتیں (ف، ف) عمل کرتی  
ہیں۔ اسی طرح دوسرے جنتوں کے لئے۔

پس سب جنت مل کر ایک ایسے جنت کے مساوی ہیں جس کی ہر ایک قوت  
 $ف + ق \times \frac{ق}{ق} + س \times \frac{س}{ق} + \dots$  کے مساوی ہے اور جس کا بازو ف ہے  
اس جنت کا معیار اثر ہے

$$ف + ق + ق + ق + س + س + \dots$$

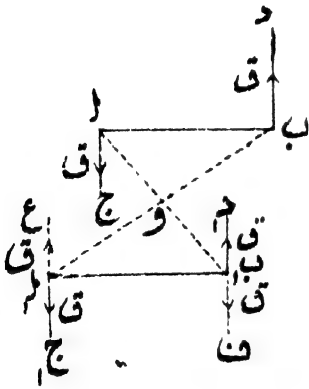
پس ابتدائی تمام جفت مل کر ایک جفت کے مساوی ہیں جس کا معیار اثران کے معیار اثروں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اگر سب ترکیبی جفتوں کی علامت ایک ہی نہ ہو تو بھی وہی ثبوت صادق آئیگا۔

۴۶۔ کسی جفت کا اثر ایک استوار جسم پر وہی رہیگا اگر اس کو اس کی سطح مستوی کے متوازی کسی دوسری سطح مستوی میں منتقل کر دیا جائے اور اس کا بازو اپنے ابتدائی محل کے متوازی رہے۔

فرض کرو کہ جفت دو قوتوں (ق، ق) پر مشتمل ہے جس کا بازو ل ب ہے اور قوتوں کے خط عمل ل ج اور ب د ہیں۔

فرض کرو کہ ل ب کوئی خط ہے جو ل ب کے متوازی اور مساوی ہے۔ ل ج اور ب د بالترتیب ل ج اور ب د کے مساوی اور متوازی کھینچو۔



ل پر دو مساوی اور متقابل قوتیں ہر ایک ق کے مساوی لگاؤ جو ل ج کی سمت میں اور اس کے مقابل سمت ل ع میں عمل کریں۔

اسی طرح ب پر دو مساوی اور متقابل قوتیں ہر ایک ق کے مساوی لگاؤ

جب ب د کی سمت میں اور اس کے متقابل سمت ب ف میں عمل کریں۔

(۳۳)

ان قوتوں کے داخل کرنے سے جسم کے توازن پر کوئی اثر نہیں پڑیگا۔

ل ب اور ل ب کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ دہر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تب د، ل ب اور ل ب کا وسطی نقطہ ہوگا۔

اب ایک قوت ق، ل پر عمل کرتی ہے اور ایک قوت ق، ب پر

بہت کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ اس لئے ان کا حاصل ۲ فی نقطہ و براہ ج کے متوازی عمل کرتا ہے۔

اسی طرح ایک قوت ق فقط ب پر عمل کرتی ہے اور ایک اور قوت ق ل پر ل ج کی سمت میں عمل کرتی ہے، ان دونوں کا حاصل ۲ فی، و پر ب د کے متوازی عمل کرتا ہے۔

یہ دونوں حاصل مساوی اور متقابل ہیں اور اس لئے ایک دوسرے کا موازنہ کرتے ہیں اب چارے پاس صرف دو قوتیں بچتی ہیں، ایک قوت ق جو ل پر ل ج کی سمت میں عمل کرتی ہے اور ایک قوت ق، ب پر ب د کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ یہ قوتیں صرف ایک جنت بناتی ہیں جس کا بازو اور قوتیں ابتدائی جنت کے بازو اور قوتوں کے مساوی اور متوازی ہیں۔

نیز ل ج اور ب د کی سطح مستوی ل ج اور ب د کی سطح مستوی کے متوازی رہنے اس لئے مسئلہ ثابت ہوا۔

نتیجہ صریح۔ دفعہ ۴م کے مسئلہ کی مدد سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ کسی جنت کی بجائے ہم کوئی اور جنت رکھ سکتے ہیں جو اول الذکر جنت کی سطح مستوی کے متوازی کسی سطح مستوی میں عمل کرے بشرطیکہ دونوں جنتوں کے معیار اثر مساوی ہوں۔

۴م۔ جنت کے محور سے ایک ایسا خط وزن مراد ہوتا ہے جو جنت کی سطح مستوی کے کسی نقطہ و میں سے اس سطح مستوی پر عمود وار کھینچا جائے اور اس کا طول جنت مذکور کے معیار اثر کے متناسب ہو۔ اب یہ معلوم کرنے کے لئے کہ و میں سے خط وزن کس سمت میں کھینچنا چاہیے یعنی وزن کی سمت متعین کرنے کے لئے ذیل کی قرارداد یاد رکھنا چاہیے۔

فرض کرو کہ جنت کی سطح مستوی میں ایک گھڑی پڑی ہے۔ اگر جنت کی وجہ سے جسم کی گردش گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں ہو تو محور کو گھڑی کے بالائی رخ سے اوپر وار کھینچنا چاہیے لیکن اگر جنت کی باعث جسم کی



حرکت سوئوں کی سمت کے مخالف ہو تو محور گھڑی کی پشت میں سے نیچے دار کھینچا جا رہے۔

دفعہ ۴۲ کی شکل میں وہ محور جو ولا کی مثبت سمت میں کھینچا جائے گا مائے کے مستوی میں اس جنت کو تعبیر کرے گا جو جسم کو دما سے دے کی سمت میں گھمائے۔ برعکس ازاں وہ محور جو ولا و مددہ کی سمت میں کھینچا جائے گا مائے کے مستوی میں اس جنت کو تعبیر کرے گا جو جسم کو دے سے دما کی سمت میں گھمائے۔

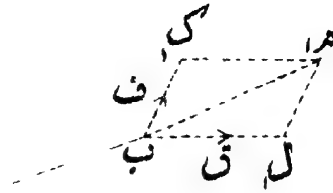
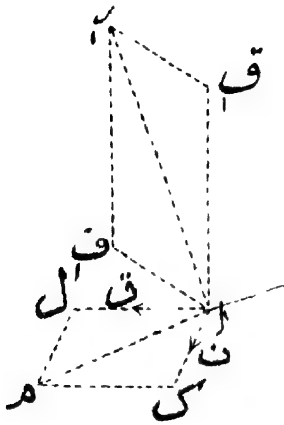
پس محاور ولا، دما، دے کے گرد مثبت جنتوں کی گردش کی سمتیں گردانی ترتیب مائے میں ہوتی ہیں۔

دفعہ ۴۳ سے ظاہر ہے کہ اگر کسی جنت کا معیار اثر اور اس کی سطح مستوی معلوم ہو تو اس کا اثر معلوم ہو سکتا ہے۔ یعنی جب کسی جنت کا معیار اثر اور اس کی سطح پر محاور کی سمت معلوم ہو یا جب کسی جنت کا محور بلحاظ مقدار اور سمت کے معلوم ہو تو جنت کا اثر معلوم ہو سکتا ہے۔

۴۸۔ دو ایسے جنتوں کا حاصل معلوم کرو جن کے مستوی متوازی نہیں ہیں۔

فرض کرو کہ ان جنتوں کے مستوی خط اب پر ملتے ہیں۔  
اب اگر ان جنتوں میں سے ہر دو کا بازو اب نہ ہو تو دونوں جنتوں کو ان کے مستویوں میں اس طرح تبدیل کرو کہ ہر ایک کا بازو اب ہو جائے لیکن ان کے معیار اثروں میں فرق نہ آئے (دیکھو دفعہ ۴۵)۔

فرض کرو کہ اس بازو کے ساتھ پہلے جنت کی قوتیں اک اور ب اک ہیں جن میں سے ہر ایک ف کے مساوی ہے اور دوسرے جنت کی قوتیں اک اور ب اک ہیں جن میں سے ہر ایک ق کے مساوی ہے، متوازی الاضلاع اک مرلی اور ب اک مرلی کی تشکیل کرو۔ تب ظاہر ہے کہ ا پر قوتیں ف اور ق ترکیب پاکر ایک قوت کے مساوی ہو جاتی ہیں جو ا ہر سے



تغیر ہوتی ہے اور ب پر کی قوتیں ف اور ق ایک قوت ب م ہو جاتی ہیں جو ا م کے مساوی متوازی اور متقابل ہے۔

پس دو جفت ل ک ایک جفت بن جاتے ہیں۔  
سطوح مستوی ک ا ب ک اور ل ا ب ل پر عمود ل ف اور ا ق  
کھینچو جو جفتوں کے محوروں کو تعبیر کریں، تب

$$\frac{\text{ل ف}}{\text{ل ق}} = \frac{\text{جفت (ف، ل) کا معیار اثر}}{\text{جفت (ق، ل) کا معیار اثر}} = \frac{\text{ف} \times \text{ا ب}}{\text{ق} \times \text{ا ب}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ل ل}}$$

پس ل ف اور ل ق بالترتیب ا ب اور ا ل پر عمود دار ہیں اور ان کے متناسب ہیں۔ اس لئے اگر ہم متوازی الاضلاع ل ق م ا ف کی تکمیل کریں تو ا م، ا م پر عمود ہوگا اور اس کے متناسب ہوگا۔ تب

جفت (ف، ل) کا معیار اثر = جفت (ق، ل) کا معیار اثر = جفت (ا م، ب م) کا معیار اثر  
پس ا م حاصل جفت کا محور ہے۔

لہذا دو معلومہ جفتوں کی ترکیب سے ایک جفت حاصل ہوتا ہے جس کا محور معلومہ جفتوں کے محور کو متوازی الاضلاع کے قانون کے مطابق ترکیب دینے

سے حاصل ہوتا ہے۔

۴۹۔ اس طرح ہم نے دیکھا کہ جفتوں کی ترکیب کا قانون بھی توتوں کی ترکیب کے قانون کے مثل ہے جس سے تمام مسائل جو توتوں کی ترکیب اور تحلیل سے متعلق ہیں جفتوں کی ترکیب و تحلیل پر بھی صادق آتے ہیں۔

مثلاً (شکل دفعہ ۲۶) اگر ہمارے پاس  $1, 2, 3, 4, 5$  ی محوروں کے گرد تین جفت ہوں جن کے معیار اثر  $1, 2, 3, 4, 5$  بالترتیب  $1, 2, 3, 4, 5$  و  $1, 2, 3, 4, 5$  سے تعبیر ہوتے ہوں تو وہ  $1$  کر ایک جفت بن جاتے ہیں جس کا معیار اثر اس خط کے گرد جس کی تہی

جیوب التمام  $(1, 2, 3, 4, 5)$  ہیں یہ ہوگا

$$گ = (1, 2, 3, 4, 5)$$

برعکس اس کے اگر ایک خط  $1$  کے گرد جفت  $گ$  ہو اور وہ دیکھے جیوب التمام  $(1, 2, 3, 4, 5)$  ہوں تو یہ جفت محوروں کے گرد بالترتیب تین جفتوں  $1, 2, 3, 4, 5$  اور  $1, 2, 3, 4, 5$  کے سادہ ہوگا۔

۵۰۔ اب اگر استوار جسم پر مختلف سطوح مستوی ہیں متعدد جفت عمل کریں تو ہم ان سب جفتوں کو ایک جفت میں ترکیب دے سکتے ہیں۔

کسی نقطہ کو سب قرار دے اور اس میں سے گزرتے ہوئے تین علی التواہم محور  $1, 2, 3, 4, 5$  و  $1, 2, 3, 4, 5$  لکھیں جو تب دفعہ ۴۹ کی رو سے کوئی ایک جفت جس کی سطح مستوی وہیں سے گزرتی ہو ایک ایسے معادل جفت میں منتقل کیا جاسکتا ہے جس کی سطح مستوی وہیں سے گزرے اور ابتدائی جفت کی سطح مستوی کے متوازی ہو اور اس کا محور وہیں سے گزرنے والا ایک خط ہو سکتا ہے جو اس سطح مستوی پر عمود وار ہو۔ اس جفت کو متوازی الاضلاع کے قانون کے مطابق حوالے کے محوروں کے گرد جفتوں میں تحویل کرو اور فرض کرو کہ یہ جفت  $1, 2, 3, 4, 5$  ہیں۔ اسی طرح باقی دئے ہوئے جفتوں میں سے ہر ایک پر یہی عمل کرو پس حسب ذیل جفت حاصل ہوں گے

$$جفت 1 = 1, 2, 3, 4, 5 \dots \dots \dots = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ (محور 1 کے گرد)}$$

مر = مر + مر + ..... = (مر) محور و ما کے گرد،

اور (ن) = ن + ن + ..... = (ن) محور و ی کے گرد

یہ جفت ترکیب پا کر ایک واحد جفت بن جاتے ہیں جس کا معیار اثر

(۴۶)

گ = مال + مر + ن

ہے اور اس کے محور کی سمتی جو یہ بالتمام ل، م، ن ہیں۔

۵۱۔ اگر ایک واحد قوت اور ایک جفت کسی استوار جسم پر ایک ہی سطح مستوی میں عمل کریں تو ان سے توازن پیدا نہیں ہو سکتا بلکہ یہ دونوں مل کر ایک واحد قوت کے معادل ہوتے ہیں جس کا خط عمل ابتدائی قوت کے خط عمل کے متوازی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ جفت دو مساوی قوتوں (ن، ف) پر مشتمل ہے جس کے خط عمل وب اور و ج ہیں۔ نیز واحد قوت ق ہے۔

اگر ق جفت کی قوت کے متوازی نہ ہو تو اس کے خط عمل کو بڑھاؤ حتیٰ کہ یہ جفت کی ایک قوت سے دب جائے۔ تب ف اور ق جو و پر عمل کرتے ہیں ایک واحد قوت م کے معادل ہیں جو و اور وب کے درمیان ایک سمت و ل میں عمل کرتی ہے۔

اب ل کو (اگر ضرورت ہو تو پیچھے کی طرف) اتنا خارج کرو کہ یہ جفت کی دوسری قوت سے دب جائے۔ اب م کے نقطہ عمل کو و پر منتقل کر دو اور و ل کے متوازی کیجئے۔

تب قوت م کو دو قوتوں ق اور ف میں تحلیل کیا جاسکتا ہے جن میں سے پہلی و کی سمت میں عمل کرتی ہے اور دوسری و ج کی مخالف سمت میں۔  
موازا کر قوت ف جفت کی دوسری قوت ن کے ساتھ مل کر و ج کی سمت

میں عمل کرتی ہے متبادل ہو جاتی ہے

پس ہمارے پاس سارے

نظام کے حاصل کے طور پر

صرف ایک قوت ق بجتی ہے

جو اپنی ابتدائی سمت و آ کے

متوازی و آ کی سمت میں

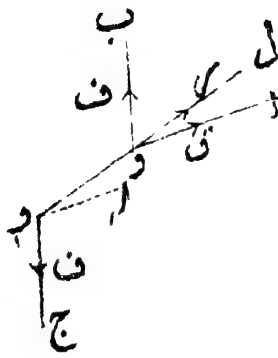
عمل کرتی ہے۔

اگر ق بجت کی قوتوں و

کے متوازی ہو تو و فو آ کی و سے

ظاہر ہے کہ ان کا حاصل و کے

متوازی اور ق کے مساوی ہو گا۔



۵۲۔ اگر تین قوتیں ایک استوار جسم پر عمل کریں اور لمبا خط مقدار سمت اور خط عمل

بالترتیب ایک مثلث کے اضلاع سے بتعیر ہو سکیں تو وہ باہم مل کر ایک جہت کے

مساوی ہوتی ہیں جس کا معیار اثر مثلث کے رقبہ کا دو چند ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج ہے اور قوتیں و ف و ق ہیں بالترتیب مثلث

کے اضلاع ب ج ج ب ج ا، ا ب سے تعیر ہوتی ہیں۔

ب میں سے ضلع ا ج کے متوازی خط ل ب ہر کھینچو اور ب پر ق

کے مساوی اور متقابل دو قوتیں ب ل اور ب ہر کی سمت میں لگاؤ، تب

قوتوں کے مثلث کی رو سے (دفعہ ۲۱) قوتیں و ف و ق جو خط مستقیم

ب ل میں عمل کرتی ہیں متبادل ہیں۔

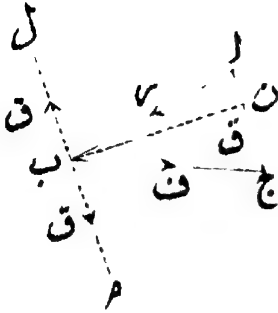
پس ہمارے پاس صرف دو قوتیں بچتی ہیں جن میں سے ہر ایک ق کے

مساوی ہے اور جن میں سے ایک ج ا کی سمت میں عمل کرتی ہے اور دوسری ب ہر

کی سمت میں ظاہر ہے کہ ان سے ایک جہت بنتا ہے جس کا معیار اثر ق ب ا

ہے جو ج ۱ x ب ۱ کے یعنی  
ثلث (ب ج کے رقبہ کے  
دو چند کے مساوی ہے۔

نتیجہ صریح۔ اسی طرح سے ہم دیکھ  
سکتے ہیں کہ اگر ایک استوار جسم پر  
ایک سطح مستوی میں عمل کرنے والی  
قوتیں بلحاظ مقدار سمت اور خط عمل  
کے ایک کثیر الاصلع کے ضلعوں  
سے تعبیر ہو سکیں تو وہ ایک جفت کے  
مبادل ہو مگی جس کا معیار اثر مذکورہ  
کثیر الاصلع کے رقبہ کا دو چند ہو گا۔



۵۳۔ ایک جفت اور ایک قوت جو اس کی سطح مستوی میں واقع نہ تو تعادل پیدا نہیں کر سکتے

فرض کرو کہ قوت ۱ جفت کی سطح مستوی سے دو پر ملتی ہے۔ اگر ضرورت  
ہو تو حسب دفعہ (۴۴) جفت کو ایک ایسے معادل جفت میں تحلیل کر جس کی  
ایک قوت ۱ میں سے گزرتی ہو۔ تب مساویہ قوت ۱ ل کر ایک قوت  
بن جائیگی جو دو پر عمل کرے گی اور جفت کی دوسری قوت ۱ سے کہیں نہیں  
ملے گی، گویا تعادل پیدا نہیں ہو گا۔

# تیسرا باب

## ہم مستوی قوتوں کے زیرِ عمل استوار جسم کا توازن

۵۲۔ باب ہذا میں ہم اسے استوار جسم کے تعادل پر بحث کریں گے جس پر قوتیں ایک ہی مستوی میں عمل کرتی ہیں۔  
 ذیل کے مسئلہ کی مدد سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ اگر قوتیں تین ہوں تو جسم کے توازن کی شرائط واحد ذرہ کے توازن کی شرائط میں تحول ہو جاتی ہیں۔  
 اگر تین ہم مستوی قوتوں کے زیرِ عمل کوئی استوار جسم تعادل میں ہے تو تین قوتیں لازمی طور پر ایک دوسرے سے ایک نقطہ پر ملنے لگی یا باہم متوازی ہوگی اگر سب قوتیں متوازی نہ ہوں تو ان میں سے کم از کم دو ایک نقطہ پر ملیں گی اور ان کا حاصل ایک قوت ہوگی جو وہیں سے گزرے گی۔  
 لیکن چونکہ قوتیں 'ف'، 'ق'، 'ر' تعادل میں ہیں اس لئے ان کا حاصل رکے ساتھ متوازن ہوگا۔ نیز دو قوتیں متوازن نہیں ہو سکتیں جب تک کہ ان کا خطِ عمل ایک نہ ہو۔

اس لئے کہ خطِ عمل لازمی طور پر وہیں سے گزرے گا۔  
 مسئلہ ماقبل کی مدد سے ہم مستوی قوتوں کے تعادل کی شرطیں آسانی سے حاصل ہو سکتی ہیں۔ کیونکہ اس صورت میں لازمی طور پر تین قوتیں ایک نقطہ پر ملتی ہیں۔ اس لئے لامی کا مسئلہ استعمال کرنے سے یا قوتوں کو دو عملی اقوامِ شتمتوں میں تحلیل کرنے سے یا ترکیبی عمل سے ہم مطلوبہ شرائط حاصل کر سکتے ہیں۔

۵۵۔ مثلثی مسئلے۔ علم مثلث کے دو مسئلے ایسے ہیں جو سکونیات

کے سوالوں کو حل کرنے میں اکثر اوقات بہت مفید ثابت ہوتے ہیں۔  
یہ مسئلے حسب ذیل ہیں:-

اگر ایک مثلث  $\Delta$  ج کے قاعدہ  $\Delta$  ب پر کوئی نقطہ  $\Gamma$  ہو  
اور اگر  $\Gamma$  ج  $\Delta$  ب کو دو حصوں  $\Delta$  ب  $\Gamma$  میں اور زاویہ  $\Gamma$  ج کو دو حصوں  
عما اور ب میں تقسیم کرے اور اگر زاویہ  $\Gamma$  ج  $\Delta$  ب  $\Gamma$  ہو تو

$$(1) \quad (\Delta + \Gamma) = \Delta + \Gamma = \Delta + \Gamma = \Delta + \Gamma$$

$$(2) \quad (\Delta + \Gamma) = \Delta + \Gamma = \Delta + \Gamma = \Delta + \Gamma$$

$$\text{کیونکہ } \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma}$$

$$\frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma}$$

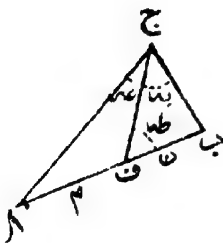
$$\text{نیز } \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma}$$

$$\frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma}$$

$$\frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma}$$

$$\frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma}$$

$$\frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma} = \frac{\Delta}{\Gamma}$$



۵۶۔ مثال ۱۔ ایک شہر کو اس کا مرکز ثقل دو حصوں  
میں تقسیم کرتا ہے۔ شہر ایک چمکے

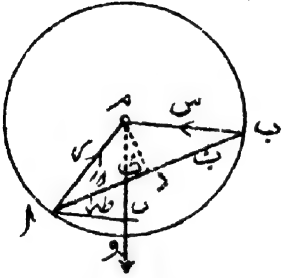


کرہ کے اندر رکھا گیا ہے، ثابت کر دو کہ اگر تعادل کے محل میں اس کا میلان افق کے ساتھ طہا ہو اور اس کے محاذی کرہ کے مرکز پر ۲ عما زاویہ بنے

تو 
$$\text{مس طہا} = \frac{\text{ب} - \text{ا}}{\text{ب} + \text{ا}} \text{مس عما}$$

اس صورت میں شہتیر کے سرورن پر کے دونوں تعادل ہر اور اس کرہ کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔ اسلئے

سلاخ کا مرکز نقل ثا، تھ کے انتصاباً نیچے واقع ہوگا۔ فرض کر دو مرث، ا میں سے گزرنیوالے افقی خط سے ن پر ملتا ہے۔ مرد، ا ب پر عمود کیمنچو۔



تب د ا مد = د ب مد = عما اور د د مرث = ۹۰ - د د ث م

$$= د ا ن = طہا$$

تب دفعہ ۵۵ کے دوسرے ربط کی رو سے

$$\text{ا} + \text{ب} \text{ م م مرث ب} = \text{ب} \text{ م م م ا ب} - \text{ا م م م ب ا}$$
  
یعنی  $(\text{ا} + \text{ب}) \text{ مس طہا} = (\text{ب} - \text{ا}) \text{ مس عما}$   
نیز لامحی کے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{س}}{\text{ج ب ا مرث}} = \frac{\text{ا}}{\text{ج ب ا مرث}}$$

$$\frac{\text{ا}}{\text{عما}} = \frac{\text{س}}{\text{ج ب ا مرث}} = \frac{\text{ا}}{\text{ج ب ا مرث}}$$

اس سے تعادل معلوم ہو جائے ہیں۔

مشق ۲۔ ایک وزنی یکجان سلاخ جس کا طول ۲ ا ہے ایک ثابت پکے نصف کروی پیالہ کے اندر اس طرح ساکن ہے کہ اس کا کچھ حصہ



$$\begin{aligned} \text{تو } \frac{ک}{س} &= \frac{س}{ج} = \frac{ج}{د} = \frac{د}{ج} \\ \text{یعنی } \frac{ک}{ج} &= \frac{س}{ج} = \frac{ج}{د} = \frac{د}{ج} \end{aligned}$$

## مثالیں

۱۔ ایک مجوف کرہ سے جس کا نصف قطر  $د$  ہے ایک پیالہ بنایا گیا ہے اور پیالہ کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ کرہ کا ہر نصف قطر جو پیالہ کے کنارہ تک کھینچا جائے سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ  $ع$  بنا تا ہے، نیز مرکز کو پیالہ کے کسی نقطہ  $ل$  کے ساتھ ملانے والا نصف قطر سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ  $د$  بنا تا ہے۔ اگر ایک چمکی بکساں سلاخ اس طرح متعادل رہے کہ اس کا ایک سر  $ل$  پر ہو اور سلاخ پر کا ایک نقطہ پیالہ کے کنارہ سے مس کرے تو ثابت کر دو کہ سلاخ کا طول ہے

$$۴ \text{ جب } د = ۵۷ - د$$

۲۔ ایک اسطوانہ کا نصف قطر  $د$  ہے اور اس کے محور کو افق کے متوازی اس طرح ثابت کر دیا ہے کہ اس کا ایک تنگوبنی خط ایک انتصابی دیوار سے تماس رکھتا ہے۔ ایک چٹا یکساں شہتیر جس کا طول  $۲ل$  اور وزن  $و$  ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سر دیوار کے ساتھ لگا ہوا ہے اور دوسرا اسطوانہ پر ہے، اگر شہتیر سمت انتصابی کے ساتھ  $۲۵^\circ$  کا زاویہ بنائے اور رگڑ نہ ہو تو

$$\begin{aligned} \text{ثابت کر دو کہ } \frac{ل}{د} &= \frac{۵۷ - ۱}{۱۰۶} \text{، نیز دیوار پر دباؤ } \frac{۱}{۲} \text{ و ہوگا اور اسطوانہ کا} \\ \text{تقابل } \frac{۱}{۲} د &= ۵۷ \text{ ہوگا۔} \end{aligned}$$

۳۔ نصف قطر  $r$  کا ایک نصف کرہی پیالہ ایک چکنی افقی میز پر پڑا ہے  
پیالہ کے اندر ایک سلاخ ہے جس کا لمبہ حصہ پیالہ سے باہر ہے اور اس کا وزن پیالہ  
کے وزن کے مساوی اور طول  $2r$  ہو تو ثابت کرو کہ تعادل کا محل مساوات  
ذیل سے حاصل ہوتا ہے

ل جب  $(عما + ببا) = رجب عما = 2 (رجم عما + 2 ببا)$   
جہاں افق کے ساتھ نصف کرہ کے قاعدہ کا میلان  $عما$  ہے اور سلاخ  
کے اس حصہ کے محاذی جو پیالہ کے اندر ہے نصف کرہ کے مرکز پر زاویہ  
 $2 ببا$  بنتا ہے۔

۴۔ ایک چکنی سلاخ کا طول  $2r$  ہے، اس کا ایک سر ایک سطح بائیل  
پر ٹکا ہوا ہے جو افق کے ساتھ زاویہ  $عما$  بناتی ہے۔ سلاخ کو دوسری جانب  
ایک افقی پیٹری سہارا سے ہوئے ہے جو سطح بائیل کے متوازی ہے اور اس  
سے فاصلہ  $ج$  پر ہے، ثابت کرو کہ سلاخ اور سطح بائیل کا درمیانی زاویہ  $طما$  ذیل  
کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

ج جب  $عما = رجب طما$  (طما۔ عما)

۵۔ ایک محوس مخروط کا ارتفاع  $ف$  ہے اور نصف  $ر$  اسی زاویہ  $عما$   
ہے، اس کو ایک چکنی انتصابی دیوار کے ساتھ اس طرح لٹکا کر رکھا گیا ہے کہ  
اس کا مستوی قاعدہ دیوار کو نسیس کرتا ہے۔ اسے ایک ڈوری ہمارے ہوئے  
ہے جس کا ایک سر مخروط کے رأس کے ساتھ بندھا ہے اور دوسرا دیوار کے  
کسی نقطہ کے ساتھ ثابت کرو کہ ڈوری کا طول زیادہ سے زیادہ  $ر + \frac{17}{4} ر$  سے

ہو سکتا ہے۔

۶۔ ایک مخروط کا ارتفاع  $ف$  ہے اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر  $ر$  ہے  
اس کو ایک رسی کے ذریعے جس کا ایک سر اس کے رأس کے ساتھ اور  
دوسرا سر اس کے قاعدہ کے کسی نقطہ کے ساتھ بندھا ہے ایک چکنی  
کھونٹی پر لٹکایا گیا ہے۔

ثابت کرو کہ اگر حالتِ تعادل میں مخروط کا محور متوازی الافق ہو تو اس کا

طول  $\sqrt{2}$  ہونا چاہئے۔

۷۔ دو مساوی مستدیر قوس ہیں جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ہے۔ ان کو دو ایسی انتصابی سطوح ستوی کے اندر جن کا درمیانی زاویہ  $2\alpha$  ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کے پیچھے رخ سطوح مذکور کے کونہ کے محاذی ہیں اور یہ ایک دوسرے سے اس نقطہ پر ٹکس کرتے ہیں جو سطوح ستوی کے درمیانی زاویہ کے نصف پر واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اس چھوٹے سے چھوٹے قوس کا نصف قطر جو مذکورہ بالا قوسوں کو ملحدہ کئے بغیر ان کے اندر لگایا جاسکتا ہے  $\sqrt{2}$  (قطب ۷۱) ہے۔

۸۔ ایک تصویر کی چوکھٹ مستطیل شکل کی ہے، اسے ایک عکسی انتصابی دیوار کے ساتھ دو متوازی دُریوں کے ذریعہ جو اس کی پشت کے بالاترین کنارے پر کے دو نقطوں کے ساتھ اور دوسری طرف دیوار کے دو نقطوں کے ساتھ بندھی ہیں لٹکایا گیا ہے۔ رسیوں کا طول چوکھٹ کے ارتفاع کے سادی ہے۔ اگر چوکھٹ کا مرکز ثقل تصویر کے مرکز ثقل پر منطبق ہو تو تصویر حالتِ تعادل میں دیوار کے ساتھ مس  $\frac{1}{2}$  زاویہ بنائے گی جہاں  $\frac{1}{2}$  تصویر کا ارتفاع ہے اور  $\frac{1}{2}$  اس کی موٹائی ہے۔

۹۔ ایک تصویر کو ایک دیوار کے ساتھ اس طرح لٹکانا مقصود ہے کہ یہ دیوار کے ساتھ کوئی خاص زاویہ  $\alpha$  بنائے اور سہارنے والی دُری دیوار کے ایک ایسے نقطہ کے ساتھ بندھی ہو جو تصویر کے خطِ پائیں سے  $\frac{1}{2}$  بلندی پر ہے۔ ہندسی عمل سے دریافت کرو کہ دُری کو تصویر کی پشت پر کے کس نقطہ پر باندھنا چاہئے۔ نیز دُری کا طول معلوم کرو۔

۱۰۔ اگر ایک استوار جسم پر ایک ستوی سطح میں قوتوں کا ایک نظام

عمل کرے تو یہ سب قوتیں ایک واحد قوت میں یا ایک واحد جفت میں تحویل ہو جاتی ہیں۔

قوتوں کے متوازی الاضلاع کی رو سے کوئی دو قوتیں جن کے خط عمل ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں ایک واحد قوت میں ترکیب یا سکتی ہیں، نیز دفعہ ۳۱ کی رو سے دو متوازی قوتیں ایک واحد قوت میں ترکیب یا سکتی ہیں بشرطیکہ یہ مساوی اور غیر موافق نہ ہوں۔

پہلے نظام معلومہ کی تمام متوازی قوتوں کو یا متوازی قوتوں کے مختلف جہوں کو زیر دیکر قوتیں بنا لو اب اس حاصل شدہ نظام میں کوئی دو قوتیں جو جو جفت نہ بنائی ہوں اور ان کا حاصل مساوی معلوم کرو، پھر مساوی بائدہ قوتوں میں سے کسی مناسب قوت کا حاصل مساوی معلوم کرو۔ پھر مساوی اور کسی اور قوت کا حاصل معلوم کرو، علیٰ ہذا تقیاس تا وقتیکہ سب قوتیں ختم ہو جائیں۔ بالآخر ہمارے پاس ایک واحد قوت رہ جائے گی یا دو مساوی متوازی غیر موافق قوتیں بچیں گی جو ایک جفت بنائیں گی۔

۵۸۔ اگر قوتوں کا ایک نظام ایک استوار جسم پر ایک سطح مستوی میں عمل کرے اور ان کے معیار اثروں کا جبر یہ مجموعہ سطح مستوی پر کے تین نقطوں میں سے ہر نقطہ کے گرد (جو ایک خط مستقیم میں واقع نہ ہوں) جدا گانہ صفر ہو تو قوتوں کا یہ نظام توازن میں ہو گا۔

دفعہ ماقبل کی رو سے ایک سطح مستوی میں عمل کرنے والی قوتوں کو ترکیب دینے پر وہ واحد قوت یا ایک جفت میں تحویل ہو جاتی ہیں۔ موجودہ صورت میں قوتوں کا حاصل جفت نہیں ہو سکتا کیونکہ اگر جفت ہو تو قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ سطح پر کے کسی نقطہ کے گرد دفعہ ۳۲ کی رو سے کوئی مستقل (جو صفر نہ ہو) ہونا چاہیے اور یہ ہمارے

مفروضہ کے خلاف ہے۔

پس نظام زیر بحث ایک جفت میں تحویل نہیں ہو سکتا۔ اس لئے یا تو یہ نظام تعادل میں ہوگا اور یا ایک واحد قوت ف میں تحویل ہو سکیگا۔ اب فرض کرو کہ وہ نقطے جن کے گرد معیار اثر لے گئے ہیں ا، ب، ج ہیں، چونکہ دفعہ ۴ سے قوتوں کے کسی نظام کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ ان کے حاصل کے معیار اثر کے مساوی ہوتا ہے اس لئے حاصل قوت ف کو یا صفر ہونا چاہئے یا ا میں سے گزرنا چاہئے۔

اسی طرح چونکہ ف کا معیار اثر ب کے گرد بھی صفر ہے اس لئے ف صفر ہے یا ف ب میں سے گزرتا ہے۔ گویا ف صفر ہے یا خط ا ب پر عمل کرتا ہے۔

بالآخر چونکہ ف کا معیار اثر ج کے گرد بھی صفر ہے اس لئے ف صفر ہے یا ج میں سے گزرتا ہے۔

لیکن چونکہ ا، ب، ج ایک خط مستقیم میں واقع نہیں ہیں اس لئے یہ ناممکن ہے کہ ف، خط ا ب میں عمل کرے اور ج میں سے بھی گزرے۔

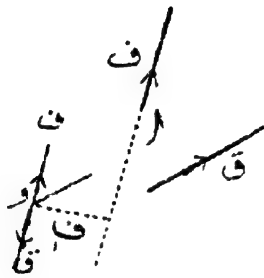
اس لئے امکان صرف یہی رہ جاتا ہے کہ ف صفر ہے یعنی قوتیں تعادل میں ہیں۔

نظام اس صورت میں بھی تعادل میں ہوگا اگر (۱) معیار اثروں کا مجموعہ ۴۳ دو نقطوں ا اور ب میں سے ہر ایک کے گرد صفر ہو اور اگر (۲) ا، ب کی سمت میں قوتوں کے اجزائے تحلیل کا مجموعہ صفر ہو۔ ظاہر ہے کہ شرط (۱) پوری ہو تو حاصل دفعہ ماقبل کی رو سے یا صفر ہوگا یا ا، ب میں سے گزریگا نیز شرط (۲) کے پورا ہونے کی وجہ سے ا، ب کی سمت میں کوئی حاصل عمل نہیں کرتا۔ پس حاصل قوت صفر ہے۔ نیز دفعہ ماقبل کے مطابق اس نظام کا حاصل جفت بھی نہیں ہے اس لئے نظام توازن میں ہے۔

۵۹ - ایک استوار جسم پر مستوی سطح میں عمل کرنے والی قوتوں کا

نظام جسم کے کسی اختیاری نقطہ پر عمل کرنے والی ایک قوت اور ایک جفت کے معادل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ نظام کی کوئی قوت  $F$  ہے جو جسم کے کسی نقطہ  $A$  پر عمل کرتی ہے اور  $Q$  کوئی اختیاری نقطہ ہے۔  $Q$  پر دو مساوی اور متقابل قوتیں لگاؤ جن میں سے ہر ایک  $F$  کے مساوی ہو اور فرض کرو کہ ان کا خط عمل  $F$  کے خط عمل کے متوازی ہے۔ ان سے جسم کی حالت تعادل پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔



اگر  $Q$  کی قوت  $F$  اور  $Q$  پر کی متوازی اور متقابل قوت  $F$  مل کر ایک جفت بناتی ہیں جس کا معیار  $F$  ہے۔

جہاں  $F$  عمود ہے وہی ابتدائی قوت  $F$  کے خط عمل پر۔

پس اگر عمل کرنے والی قوت  $F$  عمود ہے تو اس سمت میں عمل کرنے والی ایک قوت  $F$  کے مع ایک جفت کے جس کا معیار اثر  $F$  ہے۔

اسی طرح سے  $Q$  پر عمل کرنے والی ایک اور قوت  $Q$  مساوی ہے ویرا اسی سمت میں عمل کرنے والی ایک قوت  $Q$  کے مع ایک جفت کے جس کا معیار اثر  $Q$  ہے جہاں  $Q$  نقطہ  $Q$  سے  $Q$  کے خط عمل پر عمود ہے۔

اسی طرح ہر ایک قوت کے لئے۔  
پس قوتوں کا ابتدائی نظام قوتوں  $F$ ،  $Q$ ،  $Q$ ،  $Q$ ،  $Q$  کے مساوی ہے



جو ویران کی ابتدائی سمتوں کے متوازی عمل کرتی ہیں سہ اتنے ہی مضبوط کے جتنی کہ قوتیں ہیں۔

وہ پرکی یہ قوتیں ترکیب پاکر ایک واحد حاصل قوت کے مساوی ہو جاتی ہیں اور جفت ترکیب پاکر ایک واحد جفت بن جاتے ہیں جس کا میار اثر

ف ف + ق ق + س س + ..... کے مساوی ہے۔

۶۰۔ فرض کرو کہ دفعہ مقابل کی قوتیں تعادل میں ہیں۔ دفعہ ۵ کی رو سے ایک جفت اور ایک قوت تعادل پیدا نہیں کر سکتے جب تک کہ ان میں سے ہر ایک جداگانہ صفر نہ ہو۔

چونکہ ف ف + ق ق + س س ..... کا حاصل تعادل کے لئے لازماً صفر ہوگا اس لئے دفعہ ۲۸ کی رو سے ان کے اجزائے تحلیل کا مجموعہ دو قوتوں میں علیحدہ علیحدہ صفر ہونا چاہئے۔

۶۱۔ نیز معیار اثر ف ف + ق ق + ..... صفر ہونا چاہئے یعنی کسی اختیاری نقطے کے گرد قوتوں کے معیار اثروں کا جبری مجموعہ صفر ہونا چاہئے پہلی شرط سے یہ لازم آتا ہے کہ مجموعی طور پر جسم میں کوئی حرکت نہیں ہے دوسری شرط سے یہ واضح ہوتا ہے کہ کسی نقطہ کے گرد جسم گردش نہیں کر رہا ہے۔

اوپر کے تین روابط سکون مع ان تمام ہندسی روابط کے جو کسی نظام کے حصوں کے درمیان موجود ہوں عام طور پر نظام کے تعادل کو جس پر ایک ہی ستوی میں قوتیں عمل کر رہی ہیں متعین کرنے کے لئے کافی ہوتے ہیں۔ اکثر اوقات قوتوں کو مناسب سمتوں میں تحویل کرنے سے مساواتوں میں بہت سادگی پیدا ہو جاتی ہے۔ بالعموم افقی اور انتصابی سمتیں عمل تحویل کے لئے موزوں ہوتی ہیں۔

نیز جس نقطہ کے گرد معیار اثر لے جائیں اس کا مقام بھی اہمیت رکھتا ہے۔ معیار اثر لینے کے لئے ایسا نقطہ منتخب کرنا چاہئے کہ معیار اثر کی مساوات میں کم سے کم قوتیں رہ جائیں یعنی جس نقطہ میں سے زیادہ سے زیادہ قوتیں

گزرتی ہوں -

۶۱ - یہ ثابت کیا جا چکا ہے کہ گذشتہ دفعہ میں دی ہوئی شرطیں قوتوں کے کسی نظام کے

تبادل کے لئے کافی ہیں، اب ثابت کیا جائیگا کہ یہ شرطیں ضروری بھی ہیں۔

فرض کرو کہ ہمیں صرف یہ معلوم ہے کہ پہلی دو شرطیں پوری ہوتی ہیں۔ تب ممکن ہے کہ قوتوں کا نظام ایک جفت میں تقویل ہوتا ہو کیونکہ جفت کی قوتیں مساوی اور متوازی و متقابل ہونے کی وجہ سے ہر سمت میں ان کا جزو تحلیل صفر ہو گا۔ اس لئے کسی تیسری سمت میں تحلیل کرنے سے ہیں کوئی نئی شرط نہیں ملے گی۔ اس صورت میں قوتیں متبادل نہیں ہونگی تا وقتیکہ معیار اثر کے بارے میں تیسری شرط بھی پوری نہ ہو۔

اب فرض کرو کہ ہمیں صرف یہ معلوم ہے کہ قوتوں کے اجزائے ترکیبی کا مجموعہ ایک خاص سمت میں معدوم ہو جاتا ہے اور نیز ایک معلوم نقطہ کے گرد قوتوں کا معیار اثر صفر ہے۔ اس صورت میں ممکن ہے کہ نظام ایک واحد قوت میں تقویل ہو جائے جسکی سمت دئے ہوئے نقطہ میں سے دے ہوئے خط پر عمود وار ہو کیونکہ اسی قوت دونوں شرائط کو پورا کرے گی۔ پس ہم دیکھتے ہیں کہ کسی دوسرے خط کی سمت میں قوتوں کے اجزائے ترکیبی کے مجموعہ کا صفر ہونا بھی کیوں لازمی ہے۔

۶۲ - کسی سکونی مسئلہ کو حل کرنے کے لئے طالب علم کو سب ذیل عمل کرنا پڑا ہے

(۱) حسب شرائط مسئلہ کھینچو

(۲) جسم یا اجسام پر جو قوتیں عمل کر رہی ہوں ان سب پر نشان لگاؤ  
نیز اس امر کا طبی خیال رکھو کہ جب ایک جسم دوسرے کو سس کر رہا ہو تو  
نا معلوم تعامل کو فرض کیا جائے اور ہر بہارنے والی رسی کے تناؤ پر بھی نشان  
لگایا جائے نیز جب ایک جسم کسی دوسرے جسم کے ساتھ یا کسی ثابت نقطہ کے ساتھ

وصل کیا ہوا ہو تو نا معلوم تعالٰیٰ فرض کیا جائے۔

(۳) سوال کے ہر ایک جسم یا اجسام کے جٹ پر جو قوتیں عمل کر رہی ہیں ان کو دو آسان علیٰ القوائِم سمتوں میں تحلیل کر کے اجزائے تحلیلی کے مجموعوں کو صفر رکھو۔ عموماً افقی اور انقضابی سمتوں میں تحلیل کرنا سہولت بخش ہوتا ہے۔

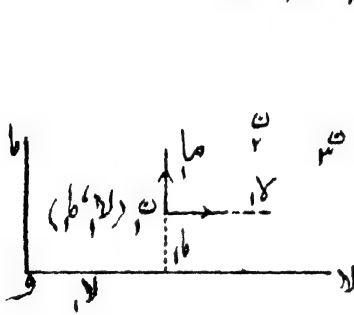
(۴) نیز کسی محوروں نقطہ کے گرد قوتوں کے معیار اثروں کو صفر رکھو۔

(۵) شکل میں طولوں اور زاویوں کے درمیان جو روابط ہوں ان کو لکھ لو۔

۶۳۔ کسی اساسی نقطہ و کے لحاظ سے ہم مستوی قوتوں کے

ایک نظام کی حاصل قوت اور جفت کا دریافت کرنا۔

و میں سے کوئی دو علیٰ القوائِم محور و لا اور و ما کھینچو۔  
فرض کرو کہ نقطہ ن (لا، ما) پر ایک قوت ف عمل کرتی ہے جس کے  
اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما ہیں۔



تب قوت لا جو  
ن پر عمل کرتی ہے معادل

ہے و پر عمل کرنے والی متوازی

قوت لا کے مع ایک

جفت لا، ما کے۔

اسی طرح ن پر عمل

کرنے والی قوت ما سا

ہے و پر عمل کرنے والی

متوازی قوت ما کے مع ایک جفت لا، ما کے (دیکھو دفعہ ۵۹)

پس ن پر کی قوت ف معادل ہے محور و لا اور و ما کے

ساتھ عمل کرنے والی دو قوتوں لا اور ما کے مع ایک جفت

لا، ما۔ ما، لا کے۔

اسی طرح دوسرے نقطوں ن، ن، ن، ..... پر عمل کر نیوالی قوتوں کیلئے

پس قوتوں کا کل نظام مماثل ہے ولا و ما کے ساتھ عمل کرنیوالے  
دو اجزائے ترکیبی لا اور ما کے اور نقطہ و کے گرد ایک جفت گ کے

$$\text{جہاں } لا = لا_1 + لا_2 + لا_3 + \dots = لا_3$$

$$\text{ما} = ما_1 + ما_2 + ما_3 + \dots = ما_3$$

$$\text{اور گ} = (لا_1 - ما_1) + (لا_2 - ما_2) + \dots = (لا_3 - ما_3)$$

لا اور ما ترکیب پا کر ایک واحد قوت ح کے مساوی ہو جاتے ہیں  
جو و پر عمل کرتی ہے۔

۶۴۔ ایک مستوی میں عمل کرنیوالی قوتوں کے نظام کے حاصل  
کے خط عمل کی سیادات۔

حسب دفعہ ما قبل نظام زیر بحث کو کسی محوروں ولا اور و ما کے  
ساتھ عمل کرنے والے دو اجزائے ترکیبی لا اور ما میں اور نقطہ و کے  
گرد ایک جفت گ میں تحویل کیا جاسکتا ہے۔

۶۶ فرض کرو کہ کوئی نقطہ ق (دھ گ) دے ہوئے نظام کے حاصل  
کے خط عمل پر واقع ہے۔ دفعہ ۶۴ کی رو سے اس نقطہ کے گرد قوتوں کے  
نظام کا معیار اثر قوتوں کے حاصل کے معیار اثر کے مساوی ہے اور بناءً  
علیہ صفر ہے۔

اب نظام کا معیار اثر ق  
کے گرد



$$گ = لا \times ق + ما \times و$$

$$گ = گ - ما + گ - لا =$$

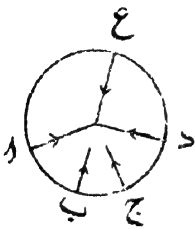
اس لئے (دھ گ) کا طریق  
یعنی حاصل کا خط عمل خط مستقیم

گ۔ لا ما۔ مالا۔ = ..... ہے۔

۶۵۔ چکنے قبضوں سے وصل کئے ہوئے اجسام۔

جب دو جسم قبضہ کے ذریعہ باہم وصل کئے ہوئے ہوں تو بالعموم ایسا ہوتا ہے کہ ایک جسم کا گول سرادو سے جسم کے تیار کردہ کھوکھلے خول کے اندر دھیلے طور پر چھنسا ہوتا ہے جسکی مثال گولہ اور گھر جوڑ (Ball-and-sockets) ہے یا ایسے ہوتا ہے کہ ایک گول سوئی یا کوئی وصل شے ہر ایک جسم کے ایک سواری میں سے گزرتی ہے جس کی مثال دروازہ کا قبضہ ہے۔

دونوں صورتوں میں اگر جسم چکنے ہوں تو قبضہ کے مقام پر ہر ایک جسم پر جو تعامل ہوتا ہے وہ ایک واحد قوت پر مشتمل ہوتا ہے۔ ساتھ کی شکل میں دو اجسام کو وصل کرنے والے جوڑ کی ایک تراش دکھائی گئی ہے اگر جوڑ چکنا ہو تو اس کے سب



نقطوں پر کے تعامل سوئی کے مرکز میں سے گزریں گے اور اس لئے ان سب کا مائل ایک واحد قوت ہوگی جو مرکز میں سے گزریگی نیز ایک جسم پر قبضہ کا تعامل دوسرے جسم پر قبضہ کے تعامل کے متساوی

اور متقابل ہوتا ہے۔ کیونکہ ان تعاملوں کے مساوی اور متقابل قوتیں سوئی یا دیگر واسطہ وصل کو تعادل کی حالت میں رکھتی ہیں ظاہر ہے کہ سوئی کا وزن نظر انداز ہو سکتا ہے۔

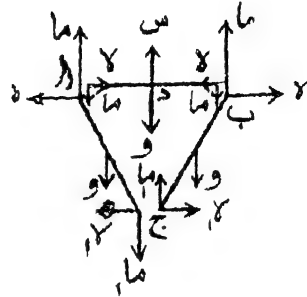
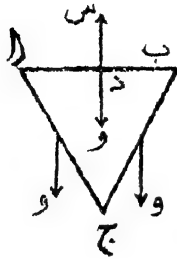
چکنے قبضوں سے متعلق سوالوں کے حل کرنے میں قبضہ پر کے تعامل کی مقدار اور خط عمل دونوں نامعلوم ہوتے ہیں اس لئے بالعموم نہوں لٹنچس ہوتا ہے کہ کسی چکنے قبضہ کا جو تعامل جسم پر ہو اس کو در علی انقوائیم متوں میں

قبضہ کا تعالٰی ان کے مساوی لیکن متقابل اجزائے ترکیبی پر مشتمل ہوگا۔  
اب جسم پر عمل کرنے والی قوتیں ہر قبضہ کے تعاملوں کے تعادل  
میں ہیں اور دفعہ ایک کے تعادل کی عام شرطیں قابل اطلاق ہوں گی۔  
نیز اس غرض کے لئے کہ ہر ایک جسم پر تعالٰی کے اجزائے ترکیبی کی  
سمتوں کے متعلق غلطی واقع نہ ہو یہ سہولت بخش ہوتا ہے کہ سلاخوں کو بڑھا کر  
ملدیانہ جائے بلکہ ان کے درمیان کچھ جگہ خالی چھوڑ دی جائے جیسا کہ ذیل کی  
مثال میں کیا گیا ہے۔

۶۶۔ مثال۔ تین مساوی یکساں بائیں جن میں سے ہر ایک کا وزن  
۱۳۱ ہے چکئے قبضوں کے ذریعہ ایک دوسرے سے اس طرح اصل کنگی  
ہیں کہ ان سے ایک مساوی الاضلاع مثلث بنتا ہے۔ اگر اس نظام کو  
ایک سلاخ کے وسطی نقطہ سے لٹکایا جائے تو ثابت کرو کہ سب سے نیچے  
زاویہ پر تعالٰی  $\frac{3}{4}$  و ہوگا اور باقی ہر ایک زاویہ پر  $\frac{131}{134}$  ہوگا۔

فرض کرو کہ سلاخوں سے مثلث ا ب ج بنتا ہے اور ضلع  
ا ب کا وسطی نقطہ د ہے جس سے ہم کو دکھایا گیا ہے۔  
فرض کرو کہ سلاخ ا ب کے نقطہ د پر قبضہ کا تعالٰی دو اجزائے  
ترکیبی پر مشتمل ہے جو بالترتیب ما اور لا کے مساوی ہیں اور انتہائی  
اور افقی سمتوں میں عمل کرتے ہیں۔ پس اس قبضہ کا تعالٰی ا ب ج پر ان کے  
مساوی اور متقابل اجزائے ترکیبی پر مشتمل ہے۔ چونکہ کل نظام د میں سے  
گزرنے والے انتہائی خط کے لحاظ سے متشامل ہے اس لئے ا ب کے  
نقطہ ب پر بھی تعالٰی دو قوتوں ما اور لا پر مشتمل ہوگا جیسا کہ شکل میں  
دکھایا گیا ہے۔

فرض کرو کہ ب ج کے نقطہ ج پر قبضہ کا تعالٰی انتہائی اور افقی  
سمتوں میں ما اور لا ہے جہاں ما اوپر کی طرف اور لا دائیں طرف عمل کرتا ہے۔



اس لئے ج کے نقطہ ج پر اسی قبضہ پر کا تعامل ان اجزائے ترکیبی کے مساوی اور متقابل اجزائے ترکیبی پر مشتمل ہے جیسا کہ نیچل سے ظاہر ہے۔  
اب (ب کے لئے انتصابی سمت میں تحلیل کرنے سے

(۱) .....  $س = و + ۲ ما$

جہاں س نقطہ د پر کی بیخ کا انتصابی تعامل ہے۔ ج کے لئے افقی اور انتصابی سمت میں تحلیل کرنے سے اور ج کے گرد معیار اثریت کی

(۲) .....  $لا = لا + لا$

(۳) .....  $و = ما + ما$

(۴) اور  $و \times د جم + ۹۰ = لا \times ۲ جب ۹۰ = ما \times ۲ و جم ۹۰$   
ج کے لئے انتصابی تحلیل کرنے سے

(۵) .....  $و = ما - ما$

ان مساواتوں کو حل کرنے سے

$لا = -\frac{۳۲}{۶}$  و  $ما = ۱$  و  $لا = \frac{۳۲}{۶}$  و اور  $س = ۳$

اس لئے ب پر قبضہ کا تعامل قوت  $لا + ۲ ما$  (یعنی  $\frac{۱۳}{۱۲}$ )

(۴۹) کے مساوی ہے اور افق کے ساتھ زاویہ  $س = \frac{۱}{۴}$  یعنی  $س = \frac{۲}{۳۶}$  بنا ہے۔  
نیز ج پر قبضہ کا تعامل ایک افقی قوت  $\frac{۳۲}{۶}$  و کے مساوی ہے۔

یہ ہم پہلے ہی سے دیکھ سکتے تھے کہ ج پر کا تعامل متوازی الافق ہونا چاہئے کیونکہ کل نظام خط ج د کے گرد متشاکل ہے اور تا وقتیکہ جزو ترکیبی ہمارا معدوم نہ ہو جائے ج پر کا تعامل متشاکل کی شرائط کو پورا نہیں کر سکتا۔

## مثالیں

- ۱۔ ایک پرکار کی ساقوں کے درمیان زاویہ ۲ عمداً بنتا ہے، ساقیں یکساں سلاخوں کی بنی ہوئی ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن ۱۰ ہے۔ پرکار دو بیجوں پر جو ایک افقی خط میں ہیں اس طرح قائم ہے کہ اس کا قبضہ بیجے کی طرف اور اس کی ساقوں کے وسطی نقطے بیجوں سے مس کرتے ہیں۔ پرکار کی ساقوں کے درمیان زاویہ ۲ عمداً قائم رکھنے کے لئے اس کے اوپر کے سروں کے درمیان ایک ہلکی سلاخ رکھ دی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ اس سلاخ پر کار دباؤ اور قبضہ پر کا تعامل ہر ایک ۱۰ و ہم عمداً کے مساوی ہے۔
- ۲۔ ایک دروازہ جس کا وزن ۱۰۰ پونڈ ہے دو قبضوں کے ذریعہ جن کا درمیانی فاصلہ ۳ فٹ ہے تھاما گیا ہے اور قبضوں میں سے گزرنیوالے انتصابی خط کے گرد گھوم سکتا ہے دروازہ کا مرکز ثقل خط انتصابی سے ۴ فٹ کے فاصلہ پر ہے۔ یہ فرض کر کے کہ دروازہ کے پورے وزن کو صرف بیجے والا قبضہ سہارے ہوئے ہے ہر ایک قبضہ پر کا تعامل دریافت کرو۔
- ۳۔ ایک پھاٹک کا وزن ۱۰ ہے اس کے اندر دو نقطوں ج اور د پر دو بیجیں ہیں جن کے باہر کے سرے دو افقی شکل کے ہیں۔ ان حلقوں میں سے ۱ اور ب پر لے کی شکل کی کھونٹیاں گزرتی ہیں جو دو دہری طرٹ پھاٹک کے کہے ہیں گڑی ہوئی ہیں اور جن کے گرد پھاٹک گھوم سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ج د، ۱ ب سے ذرا بڑا ہو تو اوپر کے قبضہ پر دباؤ  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$  ب ہوگا لیکن اگر ذرا چھوٹا ہو تو دباؤ  $\frac{1}{2}$  ہوگا جہاں  $\frac{1}{2}$  پھاٹک کا طول ہے



اور جب = ج ۵  
۴۔ ایک مربع تختہ ایک دیوار کے ساتھ ایک سہی کے ذریعہ جو اس کے اوپر کے کنارہ کے دونوں سروں کے ساتھ بندھی ہے ایک چکنی کھونٹی سے لٹک رہا ہے۔ اگر سہی کا طول تختہ کے وتر سے کم ہو تو تعادل کے تین عمل معلوم کرو۔

۵۔ ایک مربع کا ضلع ۲ ہے۔ یہ دو چکنی کھونٹیوں پر جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اس طرح ساکن ہے کہ یہ انتصابی مستوی میں ہے۔ اگر کھونٹیوں کا درمیانی فاصلہ ج ہو تو ثابت کرو کہ حالت تعادل میں اس کا ایک کنارہ افقی کے ساتھ ۴۵° یا جب ۱ - ج ۲ / ج ۲ زاویہ بناتا ہے۔

۶۔ ایک مساوی الساقین مثلثی پتہ افقی خط میں دو چکنی کھونٹیوں کے سہارے انتصابی مستوی میں اس طرح لٹک رہا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے۔ ثابت کرو کہ اگر قاعدہ سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ جب ۱ (ج ۱ ع ۱) بنائے تو یہ محل تعادل ہوگا، اس میں ۲ ع ۱ پتے کا راسی زاویہ ہے اور قاعدہ کا طول چکنیوں کے درمیانی فاصلہ کا تین گنا ہے۔

۷۔ ایک منشور جس کی عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہے دو مستوی مال سطحوں پر جو افقی کے ساتھ ع ۱ اور ع ۲ زاوے بناتی ہیں اس طرح ساکن ہے کہ اس کے دو کنارے افقی کے متوازی ہیں۔ اگر ان کناروں میں سے گزرنے والا مستوی سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ط ۱ بنائے تو ثابت کرو کہ

$$\sin \theta = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{2 \cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}$$

۸۔ ایک مثلث تین سلاخوں سے بنا ہوا ہے اور متوازی الافق محل میں ثابت کر دیا گیا ہے، ایک تجانس کرہ اس پر لٹکا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک سلاخ پر کا تعامل اس کے طول کے متناسب ہے۔

۹۔ قطع ناقص کی شکل کا ایک مستوی پتہ ہے، اس کے مزدوج قطروں کے جوڑوں کے سروں پر اسی مستوی سطح میں بیرونی عماد کی سمت میں قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ہر ایک مزدوج قطر کے سرے پر عمل کرنے والی قوت اس مزدوج قطر کے طول کے متناسب ہو تو تعادل ہوگا۔

۱۰۔ ایک لکڑی کی سیڑھی کی شکل ہندسہ ۸ کی ہے اسکو ایک افقی سطح پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کی ہر ایک ساق سمت انتہائی کے ساتھ زاویہ عما بناتی ہے، اور اسے ایک رسی جو اس کی ساقوں کے وسطی نقطوں کو ملاتی ہے سہارے ہوئے ہے۔ اگر گرگڑت ہو تو ثابت کرو کہ جب ایک وزن و ایک ایسے قدم پر رکھا جائے جس کا ارتفاع فرش سے سیڑھی کے طول کا  $\frac{1}{2}$  ہو تو رستی کے تناؤ میں  $\frac{1}{2}$  و مس عما کا اضافہ ہو جائیگا۔

۱۱۔ ایک ہی موٹائی کی تین یکساں سلاخیں ا ب، ب ج، ج د ہیں جن کے طول بالترتیب ۱، ۲، ۳ ہیں، ان کو ب اور ج پر چکنے قبضوں کے ذریعے وصل کیا گیا ہے۔ یہ سلاخیں ایک چکنے کرہ پر جس کا نصف قطر ۲ ہے اس طرح ساکن ہیں کہ ب ج کا وسطی نقطہ اور سرے ا اور د کرہ سے سس گرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ب ج کے وسطی نقطے پر کا د باؤ سلاخوں کے وزن کے  $\frac{1}{9}$  کے مساوی ہے۔

۱۲۔ تین یکساں سلاخوں ا ب، ب ج، ج د ہیں ان کے وزن سلاخوں کے طولوں ا ب، ب ج کے متناسب ہیں۔ ان کو ب اور ج پر ملا یا گیا ہے اور دو میخوں ف اور ق پر افقی عمل میں رکھا گیا ہے۔ جوڑو ب اور ج پر کے تعامل دریافت کرو اور ثابت کرو کہ میخوں کا درمیانی فاصلہ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

۱۳۔ ا ب اور ج ایک ہی مادہ کی یکساں سلاخیں ہیں جن کا طول ۱ ہے ان کو ا پر چکنے قبضہ کے ذریعہ وصل کیا گیا ہے۔ ب د ایک

اور بے وزن سلاخ ہے جس کا طول ب ہے، اس کا ایک سر اچکنے قبضہ کے ذریعہ ب کے ساتھ وصل کیا ہوا ہے اور دوسرا سر ا د ایک چکنے طبقہ کے ساتھ پیوست ہے جو ا ج پر پھیلتا ہے۔ اس نظام کو ایک چھوٹی چکنی منیج پر نقطہ لیر ہے دکھایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ ا ج سمت انتصابی کے ساتھ یہ زاویہ بناتی ہے

$$\text{مس-} \frac{ب}{1 + \frac{ا}{ب} - \frac{ب}{ا}}$$

۱۴۔ چار مساوی یکساں سلاخوں کو جوڑنے سے ایک مربع شکل (ب ج د) بنائی گئی ہے اور اسے جوڑنے سے دکھایا گیا ہے اور جسم کی شکل مربع رکھنے کے لئے ا ج کو رسی سے جوڑ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ رسی کا تھانوا چار سلاخوں کے وزن کے نصف کے مساوی ہے، نیز ب یا د پر کے تعامل کی سمت اور مقدار دریافت کرو۔  
۱۵۔ تین یکساں سلاخیں (ب ج د) ہیں جو ب اور ج پر وصل کی ہوئی ہیں اور جن کے طول بالترتیب ۲ ج، ۲ ب، ۲ ج ہیں، یہ سلاخیں ایک چکنے مکانی قوس پر جس کا محور انتصابی ہے اور اس اوپر کی طرف ہے متشکل طور پر ساکن ہیں۔ سب سلاخیں مکانی کو مس کرتی ہیں۔ اگر ہر ایک اہل سلاخ کا وزن و ہو تو ثابت کرو کہ مکانی کا تعامل ان میں سے کسی ایک پر و  $\frac{ا}{ب}$  ہے جہاں  $\frac{ا}{ب}$  مکانی کا وترِ خاص ہے۔

۱۶۔ ایک تار قطع ناقص کے ایک ایسے ربع کی شکل کا ہے جو صدری محور سے منقطع ہو۔ اس کے سروں کے ساتھ دو مساوی اوزان باندھ کر اسے ایک چکنی منیج پر ساکن کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ منیج کے ساتھ نقطہ تماس کا خروج مرکز زراویہ ۵۹° اور ۶۰° کے درمیان ہے۔

۱۷۔ دو مساوی چکنے گڑے ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن و اور نصف قطر ر ہے۔ ان کو ایک اسطوانہ کے اندر ڈالا گیا ہے اسطوانہ کے دونوں سرے کھلے ہیں اور وہ ایک افقی سطح پر رکھا ہوا ہے۔ اسطوانہ کا نصف قطر و

(۲۷) ہے ثابت کرو کہ اگر اسطوانہ کا وزن ۲ و (۱ -  $\frac{1}{2}$ ) سے کم ہو گا تو اسطوانہ الٹ جائیگا۔

۱۸ - ایک آٹھ والا برتن اندر سے کروئی شکل کا ہے۔ یہ ایک ایسے محور کے گرد جو کرہ کے مرکز سے نیچے ج فاصلہ پر اور برتن کے مرکز نقل سے اوپر د فاصلہ پر ہے گھوم سکتا ہے۔ اس کے اندر پیندہ پر ایک وزنی گولہ رکھا گیا ہے ثابت کرو کہ یہ الٹ جائیگا اگر گولہ کا وزن برتن کے وزن کے  $\frac{1}{2}$  گنا سے زیادہ ہو

۱۹ - ایک مستدیر قرص کا وزن و اور نصف قطر د ہے۔ اسکو تین متضاد رسیوں کے ذریعہ جو اس کے محیط پر متشاکلاً بندھی ہیں اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ قرص متوازی الافق ہے ہر ایک رسی کا طول ب ہے۔ ثابت کرو کہ اس کو زاویہ طہا میں سے گھما ہوا رکھنے کے لئے افقی جفت ہوگا

و د  
ب ا ب - ۴ ا ب طہ

۶۷ - اہل توازن - اگر ایک جسم کے دے ہوئے نقطوں پر ایک مستوی میں متعدد قوتیں عمل کریں اور جسم تعادل میں ہو تو بالعموم ایسا نہیں ہوتا کہ جب ان قوتوں کو ان کے نقاط عمل کے گرد کسی زاویہ میں (سب کے لئے مساوی) سے گھما دیا جائے تو بھی جسم تعادل میں رہے۔ اگر ایسا ہو یعنی گردش کے بعد بھی جسم تعادل میں رہے تو توازن کو اہل توازن کہتے ہیں۔

۶۸ - ہم مستوی قوتوں کے ایک نظام کی ہر ایک قوت کو اس کے نقطہ عمل کے گرد مساوی زاویہ میں سے گھما دیا جائے تو ان کا حاصل جسم کے ایک ثابت نقطہ میں سے گزرے گا۔

فرض کرو کہ اس ہم مستوی نظام کی کوئی قوت ف ہے جو جسم کے کسی نقطہ (۱) یا (۲) پر عمل کرتی ہے اور اس کی سمت عمل محور (۱) کے ساتھ زیادہ بناتی ہے، نیز فرض کرو کہ محوروں کے متوازی اس کے اجزائے تشکیلی (۱) یا (۲) میں۔ اسی طرح دیگر قوتوں کے لئے۔

اب فرض کرو کہ کل نظام کے اجزاء ترکیبی محروم و لا اور  
و ما کی سمت میں بالترتیب لا اور ما ہیں اور مبدا و کے گردان تو نوک  
معیار اثرگ ہے۔ تب

$\Sigma = 8$  ف، جم طبار

ما = فاجب طب

اور گ = ح ف (لا جب طہ۔ ما جم طہ)

دفعہ ۶۴ کی مانند نظام کے حاصل کئے خط عمل کی مسادات ہے

ک + ما لا - لا ما = . . . (۱)

اب سب قوتوں کو ان کے نقاطِ عمل کے گرد ایک ہی زاویہ

میں سے گھما دو۔ ایسا کرنے سے طبیب، طبیب + عیب ہو جائیگا۔ لہذا

ف. ج. ط. ه. و. ج. ر. گ. ف. ج. ط. ج. م. ع. - ف. ج. ط. ج. ع.

فاجب طهره فاجب طهره فاجب طهره فاجب طهره فاجب طهره

اور فار (الحب طبا۔ ما جم طبا)

ہو جائیگا ف { لا (جب طہاجم عد + جم طہاجب عد)

- ما (رحم طہاجم عہا۔ احب طہاجب عہا) {

یعنی جم صد x ف (لا حجب کما - ما جم طہ)

جب عین ف (لاجم ط) + واجب ط

پس لا ہوتا ہے لاجمہ۔ واجب ع

ما ہو جاتا ہے  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$  + ما جم ع

اور گ ہو جاتا ہے گ ختم عبد + ص جیب عبد

جہاں  $v = (x, y, z)$  (مثلاً) اس کو نظام کی سمت کہتے ہیں۔

تب نظام کے لئے حاصل کے خط عمل کی مساوات ہو جاتی ہے  
 گ جم عا + ص جب عا + ما (لا جم عا - ما جب عا)  
 - (لا (لا جب عا + ما جم عا) = .

یعنی جم عا [گ + ما لا - لا ما] + جب عا [ص - ما ما - لا لا] = .

(۲).....

عا کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو خط مستقیم جو مساوات (۲) سے تعبیر ہوتا ہے ہمیشہ  
 ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے جو خطوط مستقیم  
 گ + ما لا - لا ما = .  
 ص - ما ما - لا لا = .

کا نقطہ تقاطع ہے یعنی جس کے محدود  
 گ ما + ص لا ، ص ما - گ لا  
 لا + ما لا + ما

ہیں۔ اس نقطہ کو اچل مرکز کہتے ہیں۔  
 ۶۹ ۵۲ - فرض کرو کہ ہٹاؤ سے پہلے قوتیں متبادل میں تھیں۔ تب  
 لا = . ، ما = . ، گ = .

تب ہٹاؤ کے بعد بھی وہ متبادل میں ہونگی اگر

لا جم عا - ما جب عا = . ،

لا جب عا + ما جم عا = .

گ جم عا + ص جب عا = .

پس اگر قوتوں کو کسی زاویہ میں سے گھمانے کے بعد

ص = . یعنی اگر  $\chi$  (لا لا + ما ما) = .

تو ہٹاؤ کے بعد بھی قوتیں متبادل رہیں گی۔ پس متبادل کے اچل ہونگی  
 شرط ص = . ہے۔

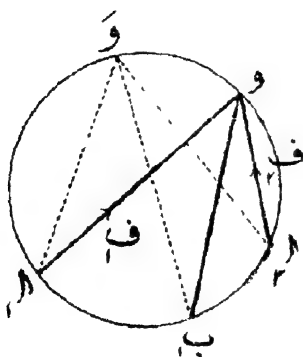
اس سے یہ بھی نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ایک متعادل نظام کی ہر ایک قوت کو ایک ہی زاویہ عمل میں سے کھایا جائے تو کھانے کے بعد یہ سب قوتیں ایک جفت کے مساوی ہوتی ہیں جس کا میاں اثر صں جب عمل ہوتا ہے۔

۷۰۔ پانچویں باب میں ہم دیکھیں گے کہ مقابلہ لا، لا، اس کام کے مساوی ہے جو قوت لا کرتی اگر اس کے نقطہ عمل کو مبدا سے نقطہ (لا، جا) تک متحرک کیا جاتا۔ اور لا، لا + ما، ما اس کام کے مساوی ہے جو قوت ف کرتی اگر اس کے نقطہ عمل کو مبدا سے نقطہ (لا، جا) تک متحرک کیا جاتا۔

پس نظام کی سکت اس کام کو تعبیر کرتی ہے جو تمام قوتیں کرتیں اگر ان کے نقاطِ عمل کو مبدأ سے اپنے اصلی مقامات تک منتقل کیا جائے۔

۱۔ ہندسی طور پر یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ اگر قوتوں کے نظام کو ایک ہی زاویہ عم میں سے گھما دیا جائے تو ان کا حاصل ہمیشہ ایک خاص نقطہ میں سے گزرتا ہے خواہ عم کچھ ہی ہو۔

فرض کرو کہ دو قوتیں  $F_1$  اور  $F_2$  بالترتیب  $A$  اور  $B$  پر عمل



مریجا وارو = وارو = عارضی فکانیا محل اور مہوگا جیکہ

اسے بھی زاویہ عدا میں سے گھمایا جائے۔

نیز  $\langle \text{ب} \rangle \text{و} \text{ا} = \langle \text{ب} \rangle \text{و} \text{ا}$  یعنی  $\text{و} \text{ب}$  نئی قوتوں  
 $\text{ف}$  اور  $\text{ف}$  کے حاصل کا نیا عمل ہے جو  $\text{ا}$  اور  $\text{ا}$  کے ساتھ عمل کرتی ہیں۔  
 پس نقطہ  $\text{ب}$  وہ نقطہ ہے جس میں سے  $\text{ف}$  اور  $\text{ف}$  کا  
 حاصل گزرتا ہے خواہ زاویہ عدا جس میں سے قوتیں نقاط  $\text{ا}$ ،  $\text{ا}$  کے گرد  
 گھمائی گئی ہیں کچھ ہی ہو۔

نیز زاویہ  $\text{و} \text{ب} \text{و} = \text{ا}$  و  $\text{ا} = \text{و}$  عدا یعنی حاصل بھی  
 اسی زاویہ میں سے گھوما ہے جس میں سے کہ ترکیبی قوتیں گھومی ہیں۔  
 اسی طرح سے دئے ہوئے نظام میں سے کوئی اور قوت  $\text{ف}$   
 لینے سے جو  $\text{ا}$  پر عمل کرتی ہو ہم ایک اور نقطہ  $\text{ب}$  ایسا معلوم کر سکتے  
 ہیں جس میں سے  $\text{ف}$  اور  $\text{ف}$  کے حاصل (جو  $\text{ب}$  پر  
 عمل کرتا ہے) کا حاصل گزرتا ہے۔ یعنی  $\text{ب}$  وہ نقطہ ہے جس میں  
 $\text{ف}$ ،  $\text{ف}$  اور  $\text{ف}$  کا حاصل ہمیشہ گزرتا ہے۔

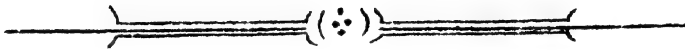
اسی طرح بالتسلسل ترکیب دینے سے تا وقتیکہ کل قوتیں صرف  
 نہ ہو جائیں ہم ایک ایسا نقطہ معلوم کر سکتے ہیں جس میں سے سب قوتوں کا  
 حاصل ہمیشہ گزرتا ہے خواہ ان قوتوں کو کسی بھی مستقل زاویہ میں سے  
 گھمایا جائے۔

اگر قوتیں  $\text{ف}$  اور  $\text{ف}$  متوازی ہوں تو نقطہ  $\text{و}$  لاتنا ہی  
 پر چلا جاتا ہے اور دائرہ  $\text{ا}$  اور  $\text{ا}$  میں سے گزرنے والا خط مستقیم  
 بن جاتا ہے۔ نیز فقط  $\text{ب}$  وہ نقطہ ہے جہاں پر متوازی قوتوں

$\text{ف}$ ،  $\text{ف}$  کا حاصل  $\text{ا}$ ،  $\text{ا}$  سے ملتا ہے اس صورت میں بطلان  
 دفعہ ۳ ذیل کے ربط سے  $\text{ب}$  کا مقام معلوم ہو سکتا ہے  
 $\text{ف} \times \text{ا} = \text{ب} \times \text{ف}$



مثال - ثابت کرو کہ تین ہم مستوی قوتیں  $F_1$ ،  $F_2$ ،  $F_3$  جو نقاط  
 $A_1$ ،  $A_2$ ،  $A_3$  پر عمل کرتی ہیں اچل تعادل میں ہونگی اگر وہ ایک ایسے  
 نقطہ  $O$  پر ملیں جو  $A_1$ ،  $A_2$ ،  $A_3$  کے محیط پر دافع ہو اور اگر  
 $F_1 : F_2 : F_3 = A_2A_3 : A_1A_3 : A_1A_2$



# چوتھا باب

رگڑ

۷۲۔ دفعہ ۱۲ میں ہم نے چکنے اجسام کی تعریف یہ کی تھی کہ اگر ایسے اجسام ایک دوسرے کو مس کریں تو نقطہ تماس پر ان کے درمیان تعامل دونوں سطحوں پر عمود وار ہوتا ہے اور اس لئے ایک جسم کے دوسرے جسم پر پھسلنے میں کوئی قوت مزاحم نہیں ہوتی۔ اگر ایک کامل چکنے جسم کو ایک کامل چکنی سطح مائل پر رکھا جائے تو جسم اور سطح مستوی کے درمیان کوئی عمل ایسا نہیں ہوتا جو سطح مائل پر جسم مذکور کے پھسلنے میں مزاحم ہو اس لئے جسم ساکن نہیں رہے گا تا وقتیکہ کوئی بیرونی قوت اس کو پھسلنے سے نہ روکے۔

عملی طور پر کوئی جسم ایسا نہیں ہے جو کامل چکنا ہو۔ مس کر نیوا ہر دو جسموں کے درمیان کوئی نہ کوئی قوت ضرور ہوتی ہے جو ایک جسم کو دوسرے جسم پر پھسلنے سے روکتی ہے۔ اس قسم کی قوت کو رگڑ کی قوت کہتے ہیں۔

رگڑ کی تعریف۔ اگر دو جسم ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں تو ان جسموں کی اس خاصیت کو رگڑ کہتے ہیں جسکی وجہ سے ان کے نقطہ تماس پر ان کے درمیان ایک ایسی قوت عمل کرتی ہے جو

ایک جسم کو دوسرے جسم پر پھسلنے سے روکتی ہے۔ نیز نقطہ تماس پر عمل کر نیوالی متذکرہ بالا قوت کو رگڑ کی قوت یا قوت فرک کہتے ہیں۔  
۳۔ رگڑ ایک ایسی قوت ہے جس کی ہمیشہ حسب ضرورت مناسب مقدار عمل میں آتی ہے۔ اس سے ہماری یہ مراد ہے کہ حرکت کو روکنے کے لئے جس قدر قوت عین کافی ہو سکتی ہے صرف اس قدر ہی قوت عمل میں آتی ہے۔

ایک وزنی تختی کو ایک افقی میز پر اس طرح رکھو کہ تختی کی مستوی سطح میز سے سس کرے۔ اب اگر ہم ایک ڈھیری کو تختی کے کسی نقطہ کے ساتھ باندھ کر تختی کو ایسی افقی سمت میں کھینچیں جو تختی کے مرکز ثقل میں سے گزرے تو ہمیں تختی کو پھسلانے میں کچھ مزاحمت محسوس ہوگی۔ یہ مزاحمت عین اس قوت کے مساوی ہے جو اہم تختی پر لگاتے ہیں۔ اب اگر ہم تختی کو کھینچنا چھوڑ دیں تو رگڑ کی قوت بلا عمل بھی ختم ہو جائیگا کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر رگڑ کی قوت عمل کرنا بند نہ کرے تو تختی حرکت کرنا شروع کرے گی۔

لیکن یہ واضح رہے کہ دو جسموں کے درمیان رگڑ کی جو مقدار عمل کر سکتی ہے وہ غیر محدود نہیں ہے۔ اگر ہم اس قوت کو جو تختی پر لگائی گئی ہے بتدریج بڑھائیں تو ہم دیکھنے لگے کہ بالآخر رگڑ کی قوت ہماری قوت پر غالب آنے لگے گی کافی نہیں ہوگی اور جسم حرکت کرنا شروع کر دیگا۔

۴۔ زندگی کے تمام جلیبی مسائل میں رگڑ کی قوت بہت اہمیت رکھتی ہے۔ اگر ہمارے جوتوں اور زمین کے درمیان رگڑ نہ ہو تو زمین پر چلنا ناممکن ہو جائے۔ اگر سیڑھی کے پائیں اور زمین کے درمیان رگڑ نہ ہو تو سیڑھی مائل غل میں قائم نہ رہ سکے تاوقتیکہ اس کو اس محل میں کسی خارجی قوت کی مدد سے کھڑا نہ رکھا جائے۔ رگڑ کے بغیر پیچ اور کیلیں لکڑی کے اندر

رہ سکیں اور نہ ہی ریل گاڑی کا انجن ریل کو کھینچ سکے۔

۵۔ رگڑ کے کلئے حسب ذیل ہیں۔

کلیہ ۱۔ جب دو جسم ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں تو نقطہ تماس پر ان میں سے ایک پر رگڑ کی سمت اس سمت کے متقابل ہوتی ہے جس میں یہ نقطہ تماس حرکت کرنا شروع کر نہوا لا ہو

کلیہ ۲۔ جب اجسام تعادل میں ہوں تو رگڑ کی مقدار

اتنی ہوتی ہے جتنی کہ حرکت کو روکنے کے لئے عین کافی ہو۔  
 اوپر دیے کلئے عام طور پر درست رہتے ہیں۔ لیکن رگڑ کی زیادہ مقدار جو عمل کرتی ہے محدود ہوتی ہے اور بعض اوقات توازن عین ٹوٹنے کو ہوتا ہے اور اکثر حرکت پیدا ہو جاتی ہے۔

انتہائی رگڑ کی تعریف۔ جب ایک جسم دوسرے

جسم پر عین پھسلنے کو ہو تو اس صورت میں توازن کو انتہائی توازن کہتے ہیں۔ اور اس وقت رگڑ کی قوت جو عمل کرتی ہے انتہائی رگڑ

کہلاتی ہے۔ انتہائی رگڑ کی سمت کلیہ اول کے تحت ہوتی ہے اس کی مقدار ذیل کے تین کلیوں سے حاصل ہوتی ہے۔

کلیہ ۳۔ انتہائی رگڑ کی مقدار عادی تعامل کے ساتھ ہمیشہ

ایک مستقل نسبت رکھتی ہے اور یہ نسبت صرف ان اشیاء پر منحصر ہوتی ہے جن سے اجسام بنائے گئے ہیں۔

کلیہ ۴۔ انتہائی رگڑ مس کرنے والی سطحوں کی وسعت اور شکل پر منحصر نہیں ہوتی تاوقتیکہ عمادی تعامل نہ بدلے۔

کلیہ ۵۔ جب حرکت جاری ہو جائے اور ایک جسم دوسرے جسم پر پھسلنا شروع کر دے تو رگڑ کی سمت حرکت کی سمت کے متقابل ہوتی ہے۔ اس کی مقدار رفتار پر منحصر نہیں ہوتی لیکن رگڑ کو عمادی تعامل کے ساتھ جو نسبت ہوتی ہے وہ دوران حرکت میں اس نسبت سے قدرے کم ہوتی ہے جو حالت سکون میں انتہائی (۵۶)

رگڑ کو تعامل کے ساتھ ہوا کرتی ہے جب جسم عین حرکت کرنے کو ہو۔ اوپر کے کلیے محض تجربہ پر مبنی ہیں اور اس لئے ان کو کسی طرح بھی قطعی طور پر صحیح تصور نہیں کیا جاسکتا اگرچہ معمولی حالات میں ان سے معتد بہ حد تک صحیح نتائج ماخوذ ہوتے ہیں۔

مثلاً اگر ایک جسم کو دوسرے جسم پر اتنے زور سے دبایا جائے کہ مس کرنے والی سطحیں ٹوٹنے کے غنیمت قریب ہوں تو کلیہ ۲ صحیح نہیں رہتا اور رگڑ کے ٹوٹنے کی شرح عمادی تعامل کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو جاتی ہے۔

۶۔ رگڑ کی قدر۔ انتہائی رگڑ کو عمادی دباؤ کے ساتھ جو مستقل

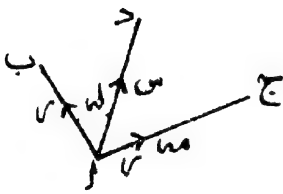
نسبت ہوتی ہے اس کو رگڑ کی قدر کہتے ہیں اور اس کو عام طور پر  $\mu$  سے تعبیر کرتے ہیں۔ پس اگر عین اس وقت جبکہ تعادل ٹوٹنے والا ہو

قوت فرک  $Q$  ہو اور عمادی تعامل  $R$  ہو تو  $\frac{Q}{R} = \mu$

اور اس لئے  $ق = مہا$  مہا کی قیمتیں اشیاء کے مختلف جوڑوں کے لئے مختلف ہوتی ہیں۔ تاہم کوئی ایسی اشیاء نہیں ہیں جن کے لئے رگڑ کی قدر اتنی زیادہ ہو کہ ایک کے مساوی ہو جائے۔

رگڑ کا زاویہ۔ جب تعادل انتہائی ہو تو اس وقت انتہائی رگڑ اور عمادی تعامل کو ترکیب دینے سے جو واحد قوت حاصل ہوتی ہے اس کے اور عماد کے درمیانی زاویہ کو رگڑ کا زاویہ کہتے ہیں اور واحد حاصل قوت کو حاصل تعامل کہتے ہیں۔

فرض کرو کہ  $A$  دو جسموں کا نقطہ تماس ہے اور  $B$  اور  $C$  بالترتیب عمادی قوت  $M$  اور رگڑ  $مہا$  کی سمتیں ہیں۔ نیز فرض کرو کہ حاصل تعامل  $S$  کی سمت  $A$  د ہے۔



پس  $B > A$  د رگڑ کا زاویہ ہے۔ فرض کرو کہ یہ زاویہ  $لہا$  ہے۔

تب  $S$  جم  $لہا = S$  اور  $S$  جب  $لہا = مہا$

پس  $S = |1 + مہا \times S|$

اور  $S = لہا = مہا$  اس سے ظاہر ہے کہ رگڑ کی قدر رگڑ کے زاویہ کے  $ماس$  کے مساوی ہوتی ہے۔

چونکہ رگڑ کی بڑی سے بڑی قیمت  $مہا$  ہو سکتی ہے اس لئے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بڑے سے بڑا زاویہ جو حاصل تعامل کی سمت

عماد کی ساتھ بنا سکتی ہے وہ لہ یعنی مسئلہ ہوتا ہے۔

(۵۶) پس اگر دو جسم ایک دوسرے کو مس کرتے ہوں اور مشترک عماد کو محور اور نقطہ تماس کو رأس بان کر ایک مخروط بنایا جائے جس کا نصف راہی زاویہ مسئلہ ہو تو یہ ممکن ہے کہ حاصل تعامل کی سمت اس مخروط کے اندر یا عین اس کے اوپر واقع ہو لیکن اس کی سمت اس مخروط کے باہر واقع نہیں ہو سکتی۔

اس مخروط کو مرکز کا مخروط کہتے ہیں۔

۷۔ ذیل کی جدول میں چند اشیا کے لئے مرکز کی قدریں اور مرکز کے زاویے بتائے گئے ہیں۔ یہ جدول پروفیسر رینکن کی کتاب مشینری اینڈ مل ورک میں سے لی گئی ہے۔

نام اشیا	مہ	لہ
لکڑی لکڑی پر (خشک)	۲۵ تا ۵۵	$\frac{1}{3}$ تا $\frac{1}{4}$
لکڑی لکڑی پر (صابن لگائی ہوئی)	۲ تا ۱۰	$\frac{1}{3}$ تا $\frac{1}{4}$
دھاتیں دھاتوں پر (خشک)	۱۵ تا ۲۲	$\frac{1}{3}$ تا $\frac{1}{4}$
دھاتیں دھاتوں پر (نمدار)	۳	$\frac{1}{4}$ تا $\frac{1}{3}$
چمڑا دھاتوں پر (خشک)	۶ تا ۵	$\frac{1}{4}$ تا $\frac{1}{3}$
" " (نمدار)	۶ تا ۳	$\frac{1}{4}$ تا $\frac{1}{3}$
" " (مچرب)	۵ تا ۱	$\frac{1}{4}$ تا $\frac{1}{3}$

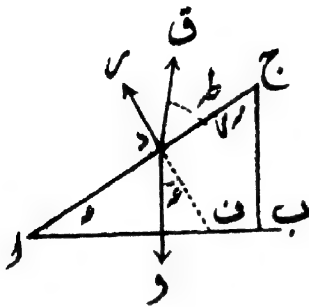
۸۔ کھردری مستوی سطح مائل پر تعادل۔

ایک جسم ایک کھردری مائل مستوی سطح پر رکھا گیا ہے جو افقی کے ساتھ مرکز کے زاویہ سے بڑا زاویہ بناتی ہے اور خط میلان اعظم اور اس جسم میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں اس پر ایک قوت عمل کرتی ہے جو اس کو تھامے ہوئے ہے، قوت کے حدود دریافت کرد۔

فرض کرو کہ سطح مائل کا میلان افق کے ساتھ  $\theta$  ہے، جسم کا وزن

وہ ہے اور مرا انتصابی  
تعالیٰ ہے۔

اگر قوت ق سطح  
مائل کے ساتھ زاویہ طہ بناتی  
ہے جبکہ جسم سطح مائل سے  
نیچے کی طرف حرکت کرنے کو  
ہو تو رگڑ اوپر کی طرف  
عمل کرے گی اور تعادل کی  
مساواتیں ہونگی



ق حجم طه + مه ص = وجب عه ..... (۱)

ق جب طه + ص = و جم عه .... (۲)

$$\text{اس لئے } Q = \frac{\text{جب } e - \text{مہجم } e}{\text{جم } ط - \text{مہ جب } ط} = \frac{\text{جب } (e - l)}{\text{جم } (ط + ل)} \dots (3)$$

اب مرا آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

(۵۸) جب جسم سطح مائل پر اوپر کی طرف عین حرکت کر نیکو ہو تو رگڑ مہ سطح مائل کے نیچے کی طرف عمل کرتی ہے پس مہ کی علامت بدلنے سے

$$Q = \frac{\text{حجم (طه - له)}}{\text{حجم (عمه + له)}} \dots\dots\dots (م)$$

ق اور ق کے درمیان قوت کی کسی قیمت کے لئے جسم تعادل میں رہیگا  
لیکن یہ تعادل انتہائی نہ ہوگا یعنی جسم کسی سمت میں عین حرکت کرنے کو نہ ہوگا۔  
جسم کو سطح اہل براد پر کی طرف عین حرکت دینے کے لئے قوت چھوٹی  
سے چھوٹی اس وقت ہوگی جب (۴) کم سے کم ہو۔

یعنی جب 'جم (ط - ل) = ا یعنی جب ط = ل



پس جسم کو سطح مائل پر اوپر کی طرف لیجا ہوتا تو کم سے کم قوت اُس سمت میں لگانی چاہیے جو سطح مائل کے ساتھ رگڑ کے زاویہ کے مساوی زاویہ بناتی ہو۔

(۳) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ قی صفر ہوگا اگر لہ = عہ یعنی اگر سطح مائل افقی کے ساتھ ایسا زاویہ بناتی ہو جو رگڑ کے زاویہ کے مساوی ہو تو جسم سطح مائل پر متعادل رہے گا لیکن یہ تعادل انتہائی ہوگا اور جسم عین نیچے پھسلنے کو ہوگا۔ اس خاصیت کی وجہ سے رگڑ کے زاویہ کو بعض اوقات ٹھہراؤ کا زاویہ کہتے ہیں۔

اس نتیجہ کی مدد سے بھی دو اشیا کے درمیان رگڑ کی قدر تجربہ سے معلوم ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ سطح مائل ایک سے کی بنی ہوئی ہے اور جسم ایک تختی سے جس کا ایک رخ افقی ہے اور جو کسی دوسری شے کی بنی ہوئی ہے۔ اگر سطح مائل کے زاویہ میلان کو بتدریج بڑھایا جائے حتیٰ کہ تختی عین پھسلنی شروع ہو جائے تو میلان کے زاویہ کا عماس رگڑ کی قدر ہوگی۔ اس طریقہ سے دفعہ ۵ء کے کلیوں کی تصدیق ہو سکتی ہے۔ پہلے پہل کولوم (Coulomb) نے یہ طریقہ استعمال کیا تھا۔

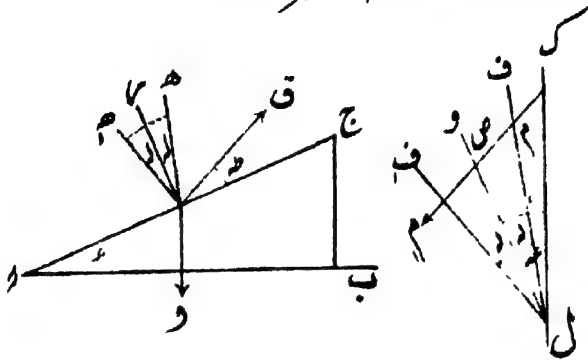
۵۔ دفعہ اقبل کے نتائج ہندسی عمل سے بھی مستنبط ہو سکتے ہیں۔ کوئی انقباضی خطہ کی کھینچو جو کسی موزوں پیمانہ کے موافق و کو تعبیر کرے۔

(مثلاً ایک انچ = ایک پونڈ یا ایک انچ = ۱۰ پونڈ)

ل و کو عمادی تعامل کی سمت کے متوازی کھینچو، ول ف ول ف دو مساوی زاویے بناؤ جن میں سے ہر ایک رگڑ کے زاویہ ل کے مساوی ہو جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ تب ل ف ل ف لیجا نا سمت متوازی ہونگے ۵ھ اور ۵ھ کے جن میں ۵ھ پر تعامل کی قوت بالترتیب عمل کرتی ہے جب کہ جسم سطح مائل پر نیچے کی طرف یا اوپر کی طرف عین حرکت کرنے والا ہو۔

اب ایک خط ک م م ایسا کھینچو جو سہارنے والی قوت ق کے متوازی ہو اور ل ف، ل ف سے م اور م پر لے، اب سرچاک ل م اور ک ل م تعادل کے دو انتہائی محلوں کے لئے قوتوں کے مثلث ہیں۔ پس اسی پیمانہ پر جس کی بوجب ک ل وزن و کو تعبیر کرتا ہے ک م اور ک م

(۵۹) دفعہ اقبل کی قوتوں ق اور ق کو تعمیر کرتے ہیں۔



صریحا ولک = سر اور سمت انتصابی کا درمیانی زاویہ = عہ

پس  $\langle \text{م ل ک} \rangle = \text{عہ - لہ}$  اور  $\langle \text{م ل ک} \rangle = \text{عہ + لہ}$

اسی طرح  $\chi^2 = 0$  وہ ناویج جو سر اور ق کے درمیان ہے  
 $= 90 - 10 = 80$  پس

حک ص ل = ۹۰ + ط ، حک م ل = ۹۰ + ط - ل

اور  $\text{حکم مل} = 90 + ط + ل$  اس لئے

$$\frac{\text{ق ک م}}{\text{و ک ک}} = \frac{\text{ج ب ک ل م}}{\text{ج ب ک م ل}} = \frac{\text{ج ب (ع - ل)}}{\text{ج ب (ع - ل)}} = \frac{\text{ج ب (ع - ل)}}{\text{ج م (ط + ل)}}$$

$$\text{اور } \frac{ق}{د} = \frac{ک م}{م ل} = \frac{ج ب ک ل م}{ج ب ک م ل} = \frac{ج ب (ع + ل)}{ج ب (ط - ل)} = \frac{ج ب (ع + ل)}{ج ب (ط - ل)}$$

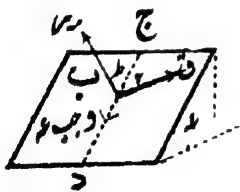
یہ ظاہر ہے کہ کم سے کم اُس وقت ہو گا جب اسے  $\frac{1}{2}$  پر عودار کھینچا جائے یعنی جب  $\theta = \frac{\pi}{2}$  حاصل تعامل کی سمت دھکے ساتھ زاویہ قائمہ بنائے اور اس لئے سطح مائل کے ساتھ زاویہ نہ بنائے۔

۸۰۔ ایک ذرہ کو ایک کھردری مائل سطح پر رکھا گیا ہے جس کا میلان افق کے ساتھ  $\theta$  ہے۔ ذرہ پر ایک قوت  $Q$  سطح مستوی کے متوازی اس سمت میں عمل کرتی ہے جو سطح مائل پر کے میلان اعظم کے خطا کے ساتھ زاویہ  $\phi$  بناتی ہے۔ اگر رگڑ کی قدر  $\mu$  ہو اور تعادل انتہائی ہو تو معلوم کرو کہ جسم کس سمت میں حرکت کرنا شروع کرے گا۔

فرض کرو کہ ذرہ کا وزن  $W$  ہے اور اس پر عمادی تعادل سرا ہے۔ سطح مائل پر عمود وار قوتیں صفر ہونی چاہئیں۔

$$\therefore W \sin \theta = \mu W \cos \theta \quad (۱)$$

وزن کا دوسرا جزو ترکیبی  $W \cos \theta$  ہو گا جو میلان اعظم کی سمت میں نیچے کی طرف عمل کرے گا۔



فرض کرو کہ رگڑ  $\mu$  سمت  $\theta$  میں عمل کرتی ہے جو میلان اعظم کی سمت کے ساتھ زاویہ  $\phi$  بناتی ہے پس

ذرہ  $W \sin \theta$  کی سمت میں حرکت کرنا شروع کرے گا۔

(۹۰)

چونکہ سطح مائل کے متوازی عمل کرنے والی قوتیں تعادل میں ہیں اس لئے لامی کے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{W \sin \theta}{W \cos \theta} = \frac{Q \sin \theta}{Q \cos \theta} \quad (۲)$$

(۱) اور (۲) سے  $\rho$  اور  $\omega$  کو سا قط کرنے سے

$$\frac{\text{جم عم} = \frac{\rho}{\omega} = \frac{\text{جب عم جب ب}}{\text{مہ جب (طہ + ب)}}$$

$$\text{لہذا جب (طہ + ب)} = \frac{\text{مس عم جب ب}}{\text{مہ}} \dots \dots \dots (۳)$$

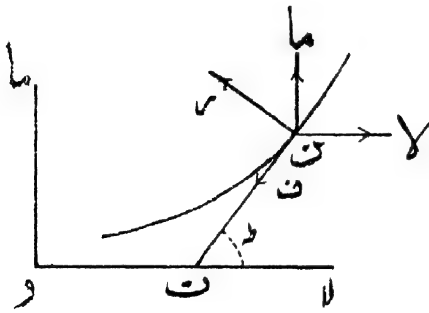
جس سے طہ حاصل ہو جاتا ہے۔

۸۱۔ ایک معلومہ مکھدرے منحنی پر دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ذرہ کا تعادل۔

فرض کرو کہ منحنی مستوی ہے اور ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی بالترتیب  $\rho$  اور  $\omega$  ہیں۔

فرض کرو کہ عمادی

تقابل  $\rho$  ہے اور  $\omega$  اس  
نکت کی سمت میں  
جو محور  $\rho$  کے ساتھ زاویہ  
طہ بناتا ہے رگڑ کی  
قوت  $F$  ہے، تب  
 $\rho$  اور عمادی  
سمت میں تحلیل  
کرنے سے



$$\text{لا. جم طہ + ما. جب طہ} = F \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{لا. جب طہ - ما. جم طہ} = \rho \dots \dots \dots (۲)$$

اگر رگڑ کی قدر  $\rho$  ہو تو ذرہ تعادل میں رہے گا جب کہ  $F$ ،  $\rho$  سے

بڑایا۔ مس سے چھوٹا نہ ہو یعنی جبکہ لا جم ط + ما جب ط کی عددی قیمت  
بالحاظ علامت

(مس لا جب ط - ما جم ط)

سے کم ہو یا اس کے مساوی ہو

یعنی جب، (لا + ما س ط) > (لا س ط - ما)

یعنی جب، (لا + ما فریا) > (لا فریا - ما)

جہاں فریا معلومہ منحنی کی مساوات سے معلوم کیا جاتا ہے۔

۸۲۔ اگر منحنی مستوی نہ ہو اور کسی نقطہ پر اس کے ماس کی سمتی جیوب التمام

(ل م، ن) ہوں، تب چونکہ کھردرے منحنی پر کے کسی نقطہ پر حاصل تعامل  
عماد کے ساتھ ل سے بڑا زاویہ نہیں بنا سکتا گویا ماس کے ساتھ  $\frac{\pi}{2}$  - ل سے

چھوٹا زاویہ نہیں بنا سکتا اس لئے ذرہ تعادل میں رہے گا اگر وہ زاویہ جو حاصل  
قوت ماس کے ساتھ بناتی ہے  $\frac{\pi}{2}$  - ل کے مساوی ہو یا اس سے بڑا ہو

یعنی اگر جم (ل لا + م ما + ن - مے) >  $\frac{\pi}{2}$  - ل

یعنی اگر ل لا + م ما + ن مے > جب ل

یعنی اگر (ل لا + م ما + ن - مے) >  $\frac{\pi}{2}$  - ل

کیونکہ مس ل = مے

۸۳۔ اگر ایک ذرہ ایک کھردری سطح پر ساکن ہو جس کی مساوات

فہ (لا، ما، ی) = - ہے اور ذرہ پر جو قوتیں عمل کر رہی ہوں ان کے اجزائے  
تخلیل لا، ما، ی ہوں تو تعادل کی مساواتیں آسانی سے معلوم ہو سکتی ہیں  
کیونکہ اس صورت میں کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر سطح کے عماد کی سمتی جیوب تمام  
جف لا / جف ما / جف ی کے متناسب ہوتے ہیں۔

ذره تعادل میں ہوگا اگر وہ زاویہ جو حاصل تھا مل عماد کے ساتھ بناتا ہے  
اسے بڑا نہ ہو۔

$$\text{یعنی اگر ہم } \left\{ \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}} \right\} = \left\{ \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}} \right\}$$

$$\text{یعنی اگر } \left\{ \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}} \right\} = \left\{ \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ی}} \right\}$$

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ کم سے کم قوت جو کسی وزن و کو کھر در سی افقی سطح پر کھینچ سکتی ہے  
جب فہ ہوتی ہے جہاں فہ رگڑ کا زاویہ ہے۔

۲۔ بتاؤ کہ ایک وزنی گاڑی کے ساتھ رستے بازہ کرکس سمت میں کھینچا جائے  
کہ گاڑی کو کم سے کم قوت کے ساتھ ایک پہاڑی پر کھینچ کر لے جائیں۔

۳۔ ایک کھر در سی سطح مال پر جو افق کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے اور جس کی  
رگڑ کی قدر ۱/۲ ہے ایک وزن ورکھا گیا ہے۔ وزن کے ساتھ ایک رسی  
بندھی ہے جو سطح مال کی چوٹی ل پر ایک چکنے طبقے میں سے گزرتی ہے اور ایک وزن

ف کو سہارے ہوئے ہے جو انتصافاً ٹنگ رہا ہے اگر  $\frac{۳}{۲}$  ف اور رسی ڈر کا بڑے سے بڑا میلان سطح مائل کے میلان اعظم کے ساتھ ط ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم ط} = \frac{۲}{۳}$$

نیز و سمت معلوم کرو جس میں وزن و حرکت کرنا شروع کرے گا۔

۴۔ ایک وزن و ایک کھر در می سطح مائل پر بڑا ہے جس کا زاویہ میلان افق کے ساتھ عد ہے اور رگڑ کی قدر صفر ہے۔ ثابت کرو کہ سطح مائل کے متوازی کم از کم انقی قوت جو جسم کو حرکت دے سکتی ہے  $\frac{۱}{۳}$  و جب عد ہے اور جسم ایک ایسی سمت میں حرکت کرنا شروع کرے گا جو سطح مائل کے میلان اعظم کے ساتھ  $\frac{۱}{۲}$  کا زاویہ بناتی ہے۔

۵۔ ایک کھر در می سطح مائل کا زاویہ میلان عد ہے اس پر ایک ذری ذرہ رکھا گیا ہے اور اس کو ایک تہی ہوئی بے وزن رسی ڈن کے ذریعے مائل مستوی میں ایک ثابت نقطہ سے لایا گیا ہے۔ اگر میلان اعظم کا خط (ب) ہو اور زاویہ (ب) (ب) ط کے مساوی ہو جبکہ ذرہ عین حرکت کرنے والا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ط} = \text{م م مم عد}$$

م م مم عد کے ایک سے بڑا ہونے کی صورت میں جواب کی تشریح کرو۔

۶۔ دو وزنوں ڈ اور ب کو ایک رسی کے ذریعے لایا گیا ہے اور ڈ کو ایک انقی مینر پر جس کی رگڑ کی قدر صفر ہے رکھا گیا ہے۔ ایک قوت ق جو م (ڈ + ب) سے چھوٹی ہے ڈ پر ب ڈ کی سمت میں لگائی گئی ہے اور اس کی سمت کو انقی سطح مستوی میں بتدریج زاویہ ط میں سے گھمایا گیا ہے۔ اگر ق < م (ڈ + ب)  $\frac{۱}{۲}$  تو ثابت کرو کہ ڈ اور ب دونوں پھسلیں گے جبکہ

$$\text{جم ط} = \frac{\text{م (ب) - (ڈ) + ق}^۲}{۲ \text{ م ب ق}}$$

لیکن اگر قوت ق، م (ڈ + ب) سے کم کر م (ڈ) سے زیادہ ہو تو صرف ڈ پھسلے گا جبکہ

$$\text{جب ط} = \frac{\text{م (ڈ)}}{\text{ق}}$$

۷۔ ایک خط تدویر کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور اس نیچے وار ہے ثابت کرو کہ ذرہ اس کے کسی نقطہ پر ساکن رہ سکتا ہے جسکی بلندی اس سے ۲ ا جب ۱ حصہ سے زیادہ نہ ہو جہاں حصہ رگڑ کا زاویہ ہے اور ۱ خط تدویر کے متکوہنی دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۸۔ ایک ذرہ محوری کے متوازی ایک مستقل قوت کے زیر عمل سطح لا ی = ج پڑ ساکن ہے اگر رگڑ کی قدر مہ ہو تو ثابت کرو کہ مخروط  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_1}$  اور دی ہوئی سطح کا منحنی تقاطع سطح کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کر دے گا جن میں سے ایک ہر توازن ممکن ہے اور دوسرے پر ممکن نہیں ہے۔

۹۔ ناقص نما  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}$  کی سطح کھردری ہے اور اس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ لاکا محور انتصابی ہے ثابت کرو کہ کوئی وزنی ذرہ اس ناقص کے اس حصہ میں جو ناقص نما اور اسطوانہ ۱ ج ۲ (مہ ب ۲ + لا) + ی ۲ ب ۲ (مہ ج ۲ + ۲) = مہ ب ۲ ج ۲ کے منحنی تقاطع کے اوپر واقع ہے کہیں بھی متعادل رہ سکتا ہے۔ چنانہ رگڑ کی قدر ہے۔

۱۰۔ مکافی نما  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_2}$  ی کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس اوپر وار ہے اگر رگڑ کی قدر مہ ہو تو ثابت کرو کہ ایک ذرہ مکافی نما کے اس حصہ میں جو مکافی نما اور اسطوانہ  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_2}$  مہ کے منحنی تقاطع کے اوپر واقع ہے کہیں بھی متعادل رہے گا۔

۱۱۔ ایک قائم زائد کو اس کے ایک انتصابی متقارب کے گرد گھمانے سے ایک سطح حاصل کی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ اس سطح اور ایک خاص مستدیر اسطوانہ کے خط تقاطع کے پر سے کے حصہ میں کسی مقام پر ایک ذرہ متعادل رہ سکتا ہے۔

۱۲۔ ایک کھردرا گردشی مکافی نما ہے جس کا وتر خاص مہ ہے اور رگڑ کی قدر مہ ہے۔ یہ یکساں زاویہ رفتار مہ کے ساتھ اپنے محور کے گرد جو انتصابی ہے گھومتا ہے۔



اگر  $\frac{م}{۱۲} > \frac{ج}{۱۲}$  مس  $\frac{ج}{۱۲}$  تو ثابت کر دو کہ ذرہ ایک خاص

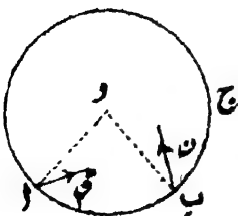
منطقہ کے سوائے ہر مقام پر متبادل رہے گا، لیکن اگر زاویہ رفتار ان انتہائی قیمتوں کے اندر واقع ہو تو ذرہ ہر مقام پر متبادل رہیگا۔

[اس سوال کو حل کرنے کے لئے فرض کر سکتے ہیں کہ سطح ساکن ہے اور ذرہ ہر ایک مزید مرکزی قوت م سداً ما عمل کرتی ہے جس کی سمت ذرہ سے مکافہ نما کے محور پر کھینچے ہوئے عمود کے باہر کی طرف ہے]

۸۴۔ کھردرے جوڑ یا قیضے۔ دفعہ ۶۵ کی شکل میں اگر رگڑ کو بھی لمحوہ نظر رکھا جائے تو لپر کا حاصل تعادل، لپر کے عماد کی سمت میں نہیں ہوگا۔ اس صورت میں لپر کا تعادل ق، مرکز و میں سے گزرنے والی ایک متوازی قوت ق مع ایک جنت کے مساوی ہوگا جس کا معیار اثر قوت اور اس عمود کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا جو د سے ق کی سمت پر کھینچا جائے۔ اسی طرح تماس کے دیگر نقطوں کے لئے۔ پس حاصل تعادل و میں سے گزرنے والی چند قوتوں اور چند جنتوں کے مساوی ہوتا ہے یہ ترکیب پا کر و میں سے گزرنے والی ایک واحد قوت اور ایک واحد جنت کے مساوی ہوتے ہیں۔ پس جب کسی جوڑ میں رگڑ عمل کرے اور ایک سے زیادہ نقطوں پر تماس ہو تو دفعہ ۶۵ کی نامعلوم قوتوں یا قوتوں کے نامعلوم اجزائے ترکیبی کو فرض کر لینے کے علاوہ ایک نامعلوم جنت کو بھی فرض کرنا چاہیے۔

جب جوڑ کھردرا ہو لیکن تماس صرف ایک ہی نقطہ پر واقع ہو جیسا کہ ساتھ

کی شکل میں لپر دکھایا گیا ہے تو چکنے جوڑ کی طرح ہم فرض کر سکتے ہیں کہ تعادل ایک واحد قوت پر مشتمل ہے جو ا میں سے گزرتی ہے۔



۸۵۔ رگڑ کے کلیوں کی توضیح کے لئے ہم چند

مثالیں ذیل میں درج کرتے ہیں۔

مثال ۱۔ ایک یکساں سلاخ انتہائی تعادل کے محل میں ایک کھر دے کرے کے اندر پڑی ہے۔ اگر کرے کے مرکز پر سلاخ کے محاذی زاویہ ۲۰ بنے اور اگر رگڑ کا زاویہ نہ ہو تو ثابت کرو کہ افقی کے ساتھ سلاخ کے سیلان کا زاویہ ہوگا

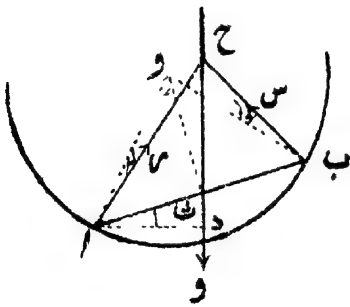
$$\text{مس} = \frac{\text{جب } ۲۰}{\text{جم } (۲۰ + ۲۰) - \text{جم } (۲۰ - ۲۰)}$$

فرض کرو کہ اب ایک سلاخ ہے اس کا وسطی نقطہ ہے اور و کرہ کا مرکز ہے، تب

(۶۲)

$$\angle \text{د و ا} = \angle \text{د و ب} = ۲۰$$

ا اور ب میں سے خطوط ا ج اور ب ج کھینچو جو ا اور ب کو کرہ کے مرکز سے ملانے والے خطوط کے ساتھ زاویہ نہ بنائیں، تب دفعہ ۱ کی رو سے یہ خطوط ا اور ب پر کے حاصل تعاملوں س اور مس کی سمتیں



چونکہ یہ تعامل اور سلاخ کا وزن سلاخ کو تعادل کی حالت میں رکھتے ہیں اس لئے د و میں سے گزرنے والا اتصافی خط ج میں سے گزرے گا۔  
ا میں سے ایک افقی خط ا د کھینچو جو ج د سے دپرے۔

فرض کرو کہ زاویہ د و ا = د و ب = ط

$$\text{تب زاویہ ج ا د} = \angle \text{د و ا} = ۲۰ - ۲۰ = ۰ - ۲۰$$

$$\text{اور زاویہ ج ب د} = \angle \text{د و ب} = ۲۰ - ۲۰ = ۰ - ۲۰$$

پس دفعہ ۵۵ کے مسئلہ ۲ سے حاصل ہوتا ہے

$$۲ \text{ مس } ط = \text{مس } (۲۰ + ۲۰) - \text{مس } (۲۰ - ۲۰)$$

جب ۲۰

$$(۱) \quad \frac{\text{جم } (۲۰ + ۲۰) - \text{جم } (۲۰ - ۲۰)}{\text{جم } ۲۰}$$

یا اس طرح: دفعہ ۶۰ کی شرائط کو استعمال کرنے سے بھی مطلوبہ حل حاصل ہو سکتا ہے۔  
قوتوں کو سلاخ کے متوازی تحلیل کرنے سے

مراجب (ع + ل) - س جب (ع - ل) = وجب ط ..... (۲)  
سلاخ کے عمود وار تحلیل کرنے سے

مراجب (ع + ل) + س جب (ع - ل) = وجب ط ..... (۳)  
ا کے گرد معیار اثر لینے سے

۲ س جب (ع - ل) = وجب ط ..... (۴)  
ساداتوں (۳) اور (۴) سے

مراجب (ع + ل) = س جب (ع - ل) =  $\frac{1}{4}$  وجب ط  
س اور س کی یہ قیمتیں (۲) میں درج کرنے سے

مس (ع + ل) - مس (ع - ل) = ۲ مس ط

مثال ۲۔ ایک شہتیر اب اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سر ل ایک کھر در سے  
افقی فرش پر ہے اور دوسرا سر اب ایک کھر در می انتصابی دیوار کو مس کرتا ہے۔  
اب میں سے گزرنے والا انتصابی مستوی دیوار پر عمود وار ہے اگر شہتیر کا زاویہ  
میلان افقی کے ساتھ دیا ہو تو شہتیر کے قوازن پر بحث کرو۔

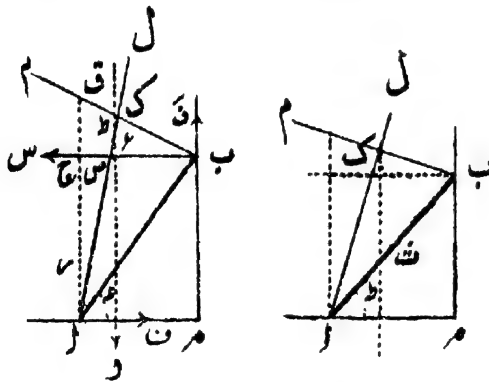
فرض کرو کہ اب کا عمادی تعال اور رگڑ بالترتیب س اور ف ہیں اور ب  
پر کا عمادی تعال اور رگڑ بالترتیب س اور ف ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا  
گیا ہے۔

دہ سمتوں میں تحلیل کرنے اور کسی نقطہ کے گرد معیار اثر لینے سے ہمیں چار نامعلوم

مقداروں  $س$ ،  $ف$  اور  $ت$  میں صرف تین مساواتیں ملتی ہیں۔ اس لئے یہ مقداریں معلوم نہیں ہو سکتیں۔

یہ امر واقعہ علم ہندسہ سے بھی ظاہر ہے۔ دو خط  $ال$  اور  $بم$  ایسے کھینچو جو عمادوں  $اج$  اور  $بج$  سے بالترتیب زاویے  $ل$  اور  $ک$  بنائیں جہاں  $ل$  اور  $ک$  اور  $ب$  پر گزرنے والا انتصابی خط  $ان$  سے  $ع$  اور  $ط$  پر ملتا ہے۔ تب تا وقتیکہ  $ط$  فضا  $ق$   $ال$  کے اندر اور  $ع$  فضا  $بم$  کے اندر ہے جیسا کہ شکل میں ہے یعنی تا وقتیکہ  $ت$  میں سے گزرنے والا انتصابی خط فضا  $جق$   $ک$   $ص$  کو کاٹے ہم  $ع$  اور  $ط$  کے اندر کوئی نقطہ  $ن$  ایسا لے سکتے ہیں کہ  $ل$  اور  $ب$  پر کے حاصل تعاملوں کی سمتیں  $ان$  اور  $بک$  ہوں اور شہتیر تعادل میں رہے۔ اگر  $ن$  نقطہ  $ع$  پر منطبق ہو تو  $ل$  پر تعادل انتہائی

(۶۵)



ہوگا لیکن  $ب$  پر نہیں اور اگر  $ن$   $ط$  پر منطبق ہو تو تعادل  $ب$  پر انتہائی ہوگا لیکن  $ل$  پر نہیں۔ اور ان دو انتہائی محلوں کے اندر قوتوں کی کوئی سی ترتیب ہو سکتی ہے۔ اگر  $ت$  میں سے گزرنے والا انتصابی خط  $ک$  کے دائیں جانب واقع ہو تو

اس پر ہمیں کوئی نقلہ تک ایسا نہیں مل سکتا کہ حرف ایک ساتھ ڈپرر گوا کے مخروط اور نیز فب ن  
 ج پر رگڑ کے مخروط کے اندر ہو اس لئے تعادل نامکن ہوگا۔

اگر شہر تیر ایسے محل میں ہو کہ اس کا تقاضا انتہائی ہو اور بناؤ علیہ شہر نیچے پھسلنے کے  
عین قریب ہو تو نقطہ  $ک$  پر منطبق ہو جائیں گے جو  $ل$  اور  $ب$  م کا نقطہ  
تقاطع ہے، اگر  $ا$  =  $ل$  اور  $ب$  =  $م$  تو دفعہ ۵ کی مسئلہ کی روش سے

(۱ + ب) ممکن است ب = ا م ر ک ت - ب م ر ک ت ب

یعنی (ا + ب) مس ط = ا مم ل - ب مس ل

یعنی  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{(1 + \frac{1}{2})} + \frac{1}{(1 + \frac{1}{2})} \right\}$

**مثال ۳۔** ناقدین کی شکل کو ایک یکساں دزنی تار ہے جس کے محور پر اور بیجا ہیں۔ اس کو ایک چھوٹی کھر درمی کھونٹ پر لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تار اپنے ہر مقام پر کھونٹ

کے اوپر متعادل رہ سکتا ہو تو گڑ کی قدر  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  سے کم نہیں ہو سکتی۔

فرض کرو کہ تار انتہائی تعادل میں ہے جبکہ نقطہ تماس تن ہے۔

فوض کرو کہ کنال خورا عظیم پر غور ہے ، نیز کثافات عماد ہے اور ج مرکز ہے ۔

۷۶) **حق پر کا حاصل** تعامل جو حق پر کے علماء کے ساتھ نہاد یہ کہ بناتا ہے وزن کو عین سوزانی

کرنے گا اس لئے جتنی احتیاج ہوگا اور زاویہ جتنا ہے۔

اگر فن کا خروج مرکزى زاویہ طے ہو تو

$\text{مساجد} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}} \times \text{مسط}$

اور سن لعل = لعل = پ جب ط بد (پہلے ٹ ج ل) = پ مسط

اور مسئلہ = مس جن ف مس (ن مثال - ج ل) =  $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2}}$  مس

$$= \frac{b^2 - b^2}{b^2} \text{ جب } b^2 \text{ ط}$$

اس لئے جب  $b^2$  ط  $= \frac{b^2 - b^2}{b^2}$  سے تقادول کا انتہائی محل حاصل ہوتا ہے۔

اگر  $\frac{b^2 - b^2}{b^2} < 1$  تو ط کی کوئی حقیقی قیمت نہیں ہوتی یعنی تقادول کا کوئی انتہائی محل نہیں ہے۔ اس لئے تاہم کھونٹی کے اوپر کسی نقطہ پر متعادل ردہ سکتا ہے۔

مثال ۴۔ ایک میز کے خانہ کے دستے اس کی طرفوں سے متساوی الفضل ہیں۔ اور ایک دوسرے سے ۲ ج کے فاصلہ پر ہیں، خانہ کے پہلوؤں میں رگڑ کی مقدار  $b$  ہو اور پینڈا چکنا ہو تو ثابت کرو کہ صرف ایک دستہ کو سیدھا باہر کی طرف کھینچنے سے خانہ باہر نہیں نکل سکتا تا وقتیکہ خانہ کا طول سامنے کے رخ سے پشت تک ۲ ج سے زیادہ نہ ہو۔

فرض کرو کہ خانہ  $b$  ج د ہے اور اس کا طول  $a$  ج اور گہرائی  $b$  ج بالترتیب  $b^2$  اور  $a^2$  ج کے مساوی ہیں۔ اگر  $b$  کے قریب کا دستہ  $c$  ہو تو  $c$  پر باہر کی طرف قوت لگا کر کھینچنے کا یہ نتیجہ ہوگا کہ خانہ کے کونے  $c$  ج اور  $a$  میز کے ساتھ جم جائیں گے اور اس طرح پہلوؤں  $a$  ج اور  $b$  ج پر دباؤ مقامات  $a$  ج اور  $b$  ج پر بالترتیب  $a$  ج اور  $b$  ج ہو گئے جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے

جسم کی حرکت میں

زیادہ سے زیادہ مزاحمت

اس وقت ہوگی جب کہ

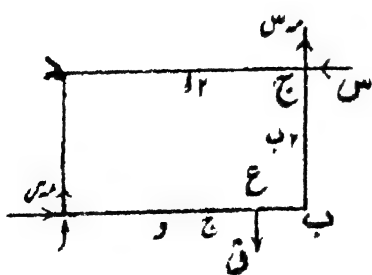
$a$  ج اور  $b$  ج پر رگڑ کی قوتیں

$a$  ج اور  $b$  ج کے

مساوی ہوں۔

$a$  ج کے متوازی

تخلیل کرنے سے



مس = ..... (۱)

۱ کے گرو مسیار اثر لینے سے ق = (ج + ۱) = مس ۲x ۱ + مس ۲x ۲ ب ..... (۲)

نیز اگر د ۱ کی سمت میں حرکت ہو سکے تو لازمی طور پر

$$ق < مس (مس + ج) \quad \text{یعنی} < مس \frac{ج + ۱}{مس + ۱} ق$$

یعنی (ب - مس ج) ق < .

چونکہ ق صفر نہیں ہے اس لئے ضروری ہے کہ ب < مس ج

اس صورت میں ق کی مقدار کا نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا یعنی

اگر ب < مس ج

تو ق خود کشا ہی کم ہو خانہ باہر کھینچ آئے گا لیکن اگر ب > مس ج سے تو ق خواہ کشا ہی بڑا کیوں نہ ہو خانہ باہر نہ کھینچے گا۔

مثال ۵ — ایک بائیکل کے پیروں کے سب سے پچھلے نقطوں کو ملانے والے خط کا (۳۴)

طول ۲ و ہے اور سیکل کا مرکز ثقل اس خط کے اوپر ف ارتفاع پر اور اس کے وسطی نقطہ سے فاصلہ لاپرنگے کی طرف واقع ہے۔ اگر ڈھرے کی رگڑ کا لحاظ نہ کیا جائے تو بتاؤ کہ اس سطح ایل کی بڑی سے بڑی ڈھال کیا ہو سکتی ہے جس پر بائیکل بغیر پہلے ٹھہر کے جبکہ بالترتیب

اس کے اگلے یا پچھلے پہیہ کو

بریک لگا دیا جائے

جب پچھلے پہیہ کو بریک

ہو تو اس پر رگڑ مس

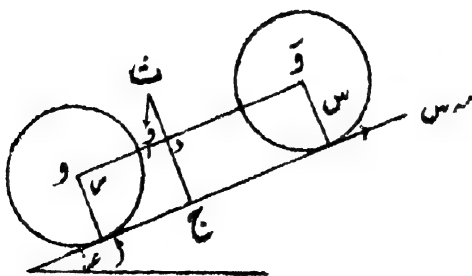
کے مساوی ہوگی۔ اگر مرکز

ثقل ہو تو

$$د و = ۱ + لا$$

$$د و = ۱ - لا$$

$$ج ث = ف$$



سطح مائل کے متوازی اور اس پر عمود اور سمت میں تحلیل کرنے سے اور ث کے گرد محیا را اثر لینے سے

$$\text{مس} = \text{د جب ع} \quad (۱)$$

$$\text{مس} + \text{مس} = \text{د حجم ع} \quad (۲)$$

$$\text{مس (مرف + ل + لا)} = \text{مس (ل - لا)} \quad (۳)$$

$$(۲) \text{ اور } (۳) \text{ سے مس (مرف + ل + لا)} = \text{مس (ل - لا)} \quad (۴)$$

$$\text{اس لئے (۱) سے مس ع} = \frac{\text{مس (ل - لا)}}{\text{مرف + ل + لا}} \quad (۵)$$

اگر اگلے پیریکہ کو بریک ہو تو ل پر رگڑ مہی کے مساوی ہوگی اور اگر اس صورت میں سطح مائل کی ڈھال یہ ہو تو اسی طرح

$$\text{مس} = \text{د جب ب}$$

$$\text{مس} + \text{مس} = \text{د حجم ب}$$

$$\text{اور مس (ل - لا - مرف)} = \text{مس (ل + لا)} \quad (۶)$$

$$\text{اس لئے حسب سابق مس ب} = \frac{\text{مس (ل + لا)}}{\text{مرف - ل - لا}} \quad (۷)$$

ظاہر ہے کہ ب بڑا ہے ع سے یعنی جب اگلے پیریکہ کو بریک لگا ہو تو بائیں کل زیادہ بڑے سیلان والی سطح مستوی پر ٹھہر سکتی ہے بہ نسبت اس صورت کے جبکہ پچھلے پیریکہ کو لگا ہو۔  
مثال ۴۔ ایک چمٹا دزن مستدیر قرص ایک کھر در سی سطح مستوی پر پڑا ہے اور اپنے محیط کی ایک سوئی کے گرد بلا تکلف گھوم سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ کسی محل میں ساکن

رہ سکتا ہے جبکہ رگڑ کی قدر  $\frac{۱۹}{۳۲}$  مس ع سے بڑی ہو جہاں ع سطح مائل کا سیلان ہے

افتح۔ کے ساتھ یہاں یہ فرض کر دیا گیا ہے کہ قرص کا وزن اس کے رقبہ پر یکساں منقسم ہے۔  
فرض کرو کہ قرص کا تقادل انتہائی ہے جبکہ اس کا قطر و ا جو سوئی و میں سے گزرتا ہے خط سیلان اعظم کے ساتھ زاویہ ف بنا سئے۔ نیز فرض کرو کہ قرص کا وزن فی اکائی رقبہ د ہے اور اس کا نصف قطر و ہے۔ اس لئے اس کا کل وزن ۱۹ و ہے۔



اگر قرص پر کوئی نقطہ ایسا ہو کہ  $ON = r$  اور  $\angle AON = ط$  تو  $n$  کے گرد رقبہ کا عنصر  $رمف$  ط  $\times$  مع  $r$  کے مساوی ہوگا۔ پس اس عنصر پر گرد کی قوت (م  $\times$  رمف ط مع  $r$   $\times$  جم عم) ہے اور  $n$  پر  $ON$  کے عمود وار سمت میں عمل کرتی ہے کیونکہ اگر  $n$  حرکت کرے تو وہ  $ON$  پر عمود وار حرکت کرے گا۔ اس لئے کہ گرد معیافہ لینے سے

$\pi$  و جب ع $x$  و جب ذ $= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$  حجم و در فوط فر جسم ع $x$  ر

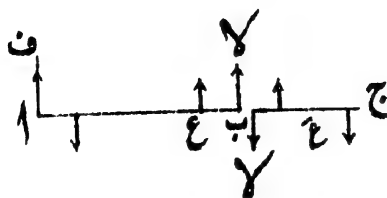
$$= \text{جم } \frac{1}{3} \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{r} \times \text{جم } r \text{ فرط } = \frac{r^2}{9} \times \text{جم } r \text{ فرط}$$

۵ جب ف =  $\frac{۳۲}{۹}$  مس =

اس سے تعادل کا انتہائی محل حاصل ہوتا ہے۔ اگر  $32\text{ مہ}$   $\leq \pi$   $\leq 40\text{ مہ}$  تو انتہائی محل نہیں ہوتا یعنی قرص ہر مقام پر متعادل رہیگا۔

مثال ۷۔ دو یکساں سلاخیں اب اور ب ج میں جن کے وزن بالترتیب ۱۰ اور ۲۰ ہیں ان کو ب پر وصل کر کے ایک کھر درے میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ دونوں سلاخیں ایک ہی خط مستقیم میں ہوں۔ دوسرے پر ایک بتدریج بڑھتی ہوئی قوت ف سلاخوں پر عمود وار عمل کرتی ہے۔ بتاؤ کہ تعادل کس طرح ٹوٹے گا۔

فرض کرو کہ جب تعادل عین ٹوٹنے کو ہو تو سلاحِ لب اپنے ایک نقطہ کے گرد گھومنے کو اور



جہاں

اے = لا، ب = ع = ما اور ا ب = ہ اور ب ج = ب

تب ا، ع اور ب پر رگڑ کی قوتیں متقابل سمتوں میں ہونگی جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

اسی طرح ب، ع اور ج کے لئے۔  
فرض کرو کہ ب پر رگڑ متقابل لا ہے جو صریحاً ہر ایک سلاخ پر عمود وار ہے۔ ا، ع پر رگڑ  $\frac{b}{l}$  ہے اور ع سے  $\frac{b}{l}$  فاصلہ پر عمل کرتی ہے۔ اس لئے ع، ب پر رگڑ  $\frac{b}{l}$  ہے اور ع سے  $\frac{l-b}{2}$  فاصلہ پر عمل کرتی ہے۔

سلاخ ا، ب پر عمود وار تحلیل کرنے سے اور ع کے گرد معیار اثر لینے سے

$$F + \text{لا} = \text{مرد} \frac{b}{l} - \text{مرد} \frac{l-b}{2} = \frac{b}{l} - \frac{l-b}{2} \quad (1) \dots \dots$$

$$\text{اور } F - \text{لا} = (1-b) = \text{مرد} \frac{b}{l} + \text{مرد} \frac{l-b}{2} \quad (2) \dots \dots$$

$$(2) \dots \dots \dots \left[ \frac{l}{2} + (1-b) \right] \text{مرد} =$$

اسی طرح ب، ج کے لئے

$$(2) \dots \dots \dots (b - 1) = \frac{b}{l} - \text{لا} \quad (3)$$

$$\text{اور } \text{لا} = 1 = \left[ \frac{b}{l} + (1-b) \right] \text{مرد} \quad (3) \dots \dots \dots$$

(۳) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے  $\frac{b}{l} = \text{لا}$  اور  $\text{لا} = \text{مرد} (1 - \frac{b}{l})$  نیز (۱) اور (۲) سے

$$\frac{\text{مرد}}{l} \left[ \frac{l}{2} - (1-b) \right] = \text{لا} = \text{مرد} (1 - \frac{b}{l}) \quad (4)$$

$$\text{لا} = \frac{l}{2} + \left[ \frac{b}{l} (1 - \frac{l}{2}) \right]$$

اور ف، (۱) سے نکل جاتا ہے۔

ذکرہ بالا عمل درست رہیگا جب تک کہ  $\frac{2}{\omega} > (1 - \frac{2}{\omega})$  یعنی  $\omega \geq 1$

اگر  $\frac{2}{\omega} < (1 - \frac{2}{\omega})$  یعنی  $\omega < 1$  تو اوپر کا عمل درست نہیں ہے اور  
 لب کے مختلف نقطوں پر رگڑ کی قوتیں سب کی سب ایک ہی سمت میں عمل کرتی ہیں۔

اس صورت میں آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ  $\omega = 1$  ہے یعنی اس صورت  
 میں لا کم ہے  $\omega = 1$  جو اوپر کے مطابق دو قوت ہے جو جگہ کو حرکت دینے کے  
 لئے درکار ہے۔ اس لئے دوسری سلاخ میں حرکت کرنے کے قریب نہیں ہے بلکہ  
 صرف لب حرکت کرنے کے قریب ہے۔

## مثالیں

(۱) ایک یکساں سلاخ  $M$  کے سرے دو ثابت سیدھی کھداری نالیوں والی اور لب کے  
 اندر ہیں جو ایک ہی انتصابی سطح مستوی میں واقع ہیں اور افق کے ساتھ  $\theta$  اور  $\phi$  زاویے  
 بناتی ہیں ثابت کرو کہ جب  $M$  اس کی سمت میں عین پھسلنے کو ہو تو  $M$  ن افق کے  
 ساتھ جو زاویہ بناتا ہے اس کا  $M$  اس

جب (ع - ب - ۲) ہوگا جہاں  $L$  رگڑ کا زاویہ ہے۔  
 ۲ جب (ب - ۲) جب (ع - ۲)

(۲) ایک انتصابی سطح شہتیر کا وزن  $W$  ہے اور اس کا پچھلا سر ایک چکنے فرش پر رکھا  
 شہتیر اس طرح مقید ہے کہ یہ صرف اپنی سمت میں حرکت کر سکتا ہے۔ اگر اس کے نیچے معلوم  
 ڈھال کی ایک چکنی سطح مائل ایک ایسی قوت سے ڈھکیں دیا جائے جو سطح مائل کے پشت  
 پر عمل کرتی ہے اور افق کے متوازی ہے تو اس قوت کی مقدار معلوم کرو۔

اگر صرف فرش اور سطح مائل کے درمیان رگڑ ہو لیکن کسی اور جگہ رگڑ نہ ہو تو  
 بتاؤ کہ  $M$  کی کم سے کم قیمت کیا ہونی چاہیئے کہ سطح مائل کو چھوڑ دینے پر وہ شہتیر کے  
 نیچے ٹپک جائے اور شہتیر کے وزن سے باہر نہ نکل پڑے۔

(۳) ایک دزنی سلاخ جس کا طول  $L$  ہے ایک کھداری میں پڑی ہے اور اس کا

اور اس کے ساتھ ساتھ ایک کھردری انتظامی دیوار پر چکا ہوا ٹکڑا ہے۔ اگر دیوار سے بیچ کا فاصلہ ج ہو اور دیوار اور بیچ ہر ایک پر رگڑ کا زاویہ لہ ہو تو ثابت کرو کہ دیوار اور سلاخ کا نقطہ تماس بیچ سے اوپر ہونے کی صورت میں سلاخ نیچے کی طرف مائل ہونے سے پہلے کو ہوگی جبکہ جب  $\frac{ج}{ل} = \frac{ط}{ل + ط}$  جم لہ جہاں ط سلاخ کا میلان ہے دیوار کے ساتھ۔

اگر سلاخ اور دیوار کا نقطہ تماس بیچ سے نیچے ہو تو ثابت کرو کہ سلاخ نیچے کی طرف مائل ہونے سے پہلے کو ہوگی جبکہ

$$\text{جب } \frac{ط}{ل + ط} = \frac{ج}{ل} \text{ جم لہ}$$

اور اوپر کی طرف مائل ہونے سے پہلے کو ہوگی جبکہ جب  $\frac{ط}{ل + ط} = \frac{ج}{ل}$  جم لہ۔

(۴) ایک یکساں شہتیر کا طول ۲ فٹ ہے اس کا ایک سر ایک کھردری افقی سطح مستوی پر ہے اور دوسری جانب شہتیر ایک کھردری دیوار کے اوپر کے کنارے پر ٹکا ہوا ہے جس کی بلندی ۲ فٹ ہے۔ شہتیر میں سے گزرنے والا انتظامی مستوی دیوار پر عمود وار ہے۔ اگر شہتیر ہر میلان پر جو ہندسی طور پر ممکن ہو متبادل رہ سکے اور دیوار اور فرش مساوی طور پر کھردرے ہوں تو بتاؤ کہ شہتیر اور دیوار یا شہتیر اور زمین کا رگڑ کا زاویہ  $\frac{1}{3}$  جب  $\frac{ط}{ل + ط} = \frac{ج}{ل}$  سے کم نہیں ہو سکتا۔

(۵) ۲ فٹ طول کی دو مساوی یکساں سلاخیں چکنے طور پر ایک سرے پر ایک قبضہ کے ذریعہ جوڑ دی گئی ہیں اور ج نصف قطر کے ایک کھردرے کرہ پر متشابہ ساکن ہیں۔ متبادل کا انتہائی محل معلوم کرو۔ اور ثابت کرو کہ اگر رگڑ کی قدر  $\frac{1}{3}$  ہو تو سمت انتظامی کے ساتھ ہر ایک سلاخ کا انتہائی میلان  $\frac{1}{3}$  تھا ہے۔

(۶) اگر ایک ہر کار ایک چکنے افقی اسطوانہ پر جس کا نصف قطر ج ہے آڑی پر ڈی ہو تو ثابت کرو کہ جوڑ پر رگڑ کا جفت جو اس کی ساتین کو پھسلنے سے روکتا ہے (ج کم ع - ج ع - وجب ع)

ہے جہاں ہر ایک ساق کا وزن ہے ۲۱ عدد ساقین کا درمیانی زاویہ ہے اور جوڑے سے ساق کے مرکز ثقل کا فاصلہ ہے۔

(۷) ایک سلاخ ایک کھر درمی سطح اہل پر پڑی ہے سطح اہل کا افق کے ساتھ میلان عدد رگڑ کے زاویہ کہ سے بڑا ہے سلاخ اپنے ایک سرے کے گرد بلا تکلف گھوم سکتی ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کے لئے خط میلان اعظم اور سلاخ کا درمیانی زاویہ زیادہ سے زیادہ جب  $\frac{1}{2}$  (مس لم مم عد) ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ ایک معمولی مسینز کا خانہ اس کے ایک دستہ پر قوت لگانے سے اندر نہیں دھکیلا جاسکتا تا وقتیکہ اس کو کسی اور طرح سے پہلے فاصلہ ۲ ج میں سے اندر نہ دھکیلا جائے جہاں ۲ ج دستوں کا درمیانی فاصلہ ہے اور مرکز کی قدر ہے۔

(۹) اگر آئینہ دار کھر کی ایک ڈوری ٹوٹ جائے تو تباؤ کو چوکھٹ کی رگڑ کی قدر کم سے کم کیا جونی چاہیے کہ دوسرا وزن کھر کی کو سنبھالے رکھے۔

(۱۰) ایک نصف کروی خول ایک ایسی کھر درمی سطح مستوی پر پڑا ہے جسکے رگڑ کا زاویہ نہ ہے، ثابت کرو کہ مستدیر کنارہ کی سطح مستوی کا میلان افق کے ساتھ جب  $\frac{1}{2}$  (جب لم) سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔

[ مرکز ثقل اس نصف قطر کی تعریف کرتا ہے جو خول کے قاعدہ پر عمود وار ہے۔ ]

(۱۱) ایک ٹھوس متجالس نصف گہ ایک کھر درمی افقی سطح مستوی اور ایک چکینی انتصابی دیوار سے ٹکا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر رگڑ کی قدر  $\frac{1}{2}$  سے بڑی ہو تو نصف کہ ہر محل میں متبادل رہ سکتا ہے لیکن اگر رگڑ کی قدر  $\frac{1}{2}$  سے کم ہو تو نصف کہ کا قاعدہ سمت انتصابی کے ساتھ کم سے کم زاویہ  $\frac{1}{2}$  جم بنا سکتا ہے۔

اگر دیوار کھر درمی ہو اور رگڑ کی قدر نہ ہو تو ثابت کرو کہ یہ زاویہ  $\frac{1}{2}$  جم  $\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$  ہے۔

(۷۱)

[ نصف کہ کا مرکز ثقل اس نصف قطر کو جو قاعدہ پر عمود وار ہے نصف ۳ : ۵ میں تقسیم کرتا ہے ]

(۱۲) اگر نصف کہ حالت تعادل میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کی مخفی سطح ایک کھر درمی سطح اہل کو جو افق کے ساتھ زاویہ عد بناتی ہے مس کرتی ہے تو ثابت کرو کہ نصف کہ کی مستوی سطح کا میلان افق کے ساتھ جب  $\frac{1}{2}$  (جب عد) ہے بشرطیکہ عد کم ہو جب  $\frac{1}{2}$  سے

اور نیز کم ہو رگڑ کے زاویہ سے۔

(۱۳) ایک یکسان نصف کرہ کا نصف قطر  $\Delta$  ہے اور وزن  $W$  ہے یہ اپنی کروی سطح کے بل ایک افقی سطح مستوی پر پڑا ہے اور وزن  $W$  کا ایک کھر درازہ اس کی مستوی سطح پر پڑا ہے۔ ثابت کرو کہ مستوی رخ کے مرکز سے ذرہ کا فاصلہ  $\frac{3}{8} W \Delta$  سے زیادہ نہیں ہو سکتا جہاں  $\Delta$  رگڑ کی قدر ہے۔

(۱۴) ایک کرہ جس کا نصف قطر  $\Delta$  ہے اور جس کا مرکز ثقل اس کے مرکز سے فاصلہ  $J$  پر واقع ہے ایک ایسی کھر درسی سطح مستوی پر انتہائی تعادل کی حالت میں ساکن ہے جو افق کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر اس کو زاویہ

$$2 \text{ جم} - \left( \frac{J}{\Delta} \text{ جب } \Delta \right)$$

میں سے گھمادیا جائے تو بھی یہ انتہائی تعادل کی حالت میں رہے گا۔  
(۱۵) ایک یکسان مستطیل تختہ جس کے اضلاع  $2 \Delta$  اور  $2 B$  ہیں ایک ہی افقی خط میں کی دو کھر درسی میخوں پر جن کا درمیانی فاصلہ  $F$  ہے انتہائی تعادل کی حالت میں ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ افق کے ساتھ ضلع  $2 \Delta$  کا میلان  $\theta$  مساوات

$$F \text{ جم} - \text{جم} (2 + \theta) = \Delta \text{ جم} - B \text{ جب } \theta$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں  $\Delta$  رگڑ کا زاویہ ہے۔

(۱۶) ایک استوار چوکھٹ معین کی شکل کی ہے جس کا ہر ضلع  $\Delta$  ہے اور حادہ زاویہ  $\theta$  ہے یہ چوکھٹ ایک کھر درسی میخ پر ساکن ہے جس کی رگڑ کی قدر  $\mu$  ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کے لئے نقطہ تماس کے دو انتہائی مقامات کا درمیانی فاصلہ  $\Delta \mu$  جب  $\theta$  ہے۔

(۱۷) ایک لڑکا جس کا وزن  $W$  ہے بچ کے ایک تختہ پر کھڑا ہے اور اپنے ہاتھوں سے ایک کرسی کے چکنے انتہائی ضلع کو دھکیلتا ہے اگر کرسی کا وزن  $N$  ہو اور کرسی اور بچ کے درمیان اور نیز لڑکے اور بچ کے درمیان رگڑ کی قدر  $\mu$  ہو تو ثابت کرو کہ لڑکا اپنے جسم کو اس قدر جھکا سکتا ہے کہ افق کے طرف  $\theta$  سے بڑا زاویہ بنائے یا  $\theta$  سے بڑا زاویہ بنائے ہو جب اس کے کہ لڑکا کرسی سے یا کرسی

لا کے سے زیادہ وزن دار ہو۔

(۱۸) ایک یکساں وزنی سلاح ایک کھر در سے افقی مینر پر پڑی ہے اور اس کو ایک رسی کے ذریعہ جو اس کے کسی نقطہ کے ساتھ بندھی ہے ایک ایسی سمت میں کھینچا گیا ہے جو اس کے طول پر عمود وار ہے۔ بتاؤ کہ یہ کس نقطہ کے گرد گھومنا شروع کرے گی۔

ثابت کرو کہ ان قوتوں کی نسبت  $1:1+2:1$  ہے جو سلاح کو کھانے کے لئے ضروری ہوں جبکہ ایک قوت کو سلاح کے مرکز پر اور دوسری کو سلاح کے سرے پر اس کے طول پر عمود وار لگایا جائے۔

(۱۹) ایک یکساں کھر در اِشْتِیْر (ب) دو اور شہتیروں پر افق کے متوازی پڑا ہے اور ان کو نقاط ۱ اور ج پر مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کم سے کم افقی قوت جو نقطہ ب پر لب کے عمود وار سمت میں لگانی پڑے تاکہ شہتیر کو ہلانے کے لئے عین کافی ہو

قوتوں  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$  میں سے چھوٹی قوت ہوگی۔ جہاں  $2 = \frac{1}{2}$  اور  $\frac{1}{2}$ ۔

اور  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  نیز شہتیر کا وزن ہے اور مرکز کی قدر ہے۔

(۲۰) ایک یکساں کھر در اِشْتِیْر (ب) جس کا طول ۲ ہے دو مساوی اور مساوی طور پر کھر در سے گزرنے پر افق کے متوازی پڑا ہے۔ گولوں کے مرکزدوں کا درمیانی فاصلہ  $\frac{1}{2}$  ہے اور شہتیر گولوں کو ج اور د پر مس کرتا ہے۔

ثابت کرو کہ اگر ب بڑا نہ ہو  $\frac{1}{2}$  سے تو شہتیر کا ایک ایسا محل معلوم ہو سکتا ہے کہ ب

پر قوت ق شہتیر کی سمت پر عمود وار لگاتے سے شہتیر ج اور د دونوں نقطوں پر بیک وقت حرکت کرنے کو ہوگا۔

(۲۱) ایک یکساں تختہ جس کا طول ۲ ہے اور وزن  $\frac{1}{2}$  ہے ایک کھر در سے افقی اسطوانہ پر اس طرح پڑا ہے کہ اس کا وسطی نقطہ اسطوانہ کو مس کرتا ہے اور اسطوانہ کا محور تختہ کے عمود وار ہے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو تختہ کے ایک سرے پر لگایا جاسکتا

ہے تاکہ اسطوانہ سے نہ پھسلنے پائے  $\frac{1}{2}$  ہے جہاں  $\frac{1}{2}$  اسطوانہ کا نصف قطر

ہے اور لہرگز کا زاویہ ہے۔

(۲۲) ایک قطع ناقص کو جس کا خودج المکز نہ ہے اور ماسکے میں اور میں ہیں اس کے محور اعظم کے گزرنے سے ایک سطح حاصل کی گئی ہے، اس سطح پر ایک کھرورہ ذہن رکھا گیا ہے جن پر دو قوتیں ماسکوں کی طرف عمل کرتی ہیں اور بالترتیب  $n$  میں اور  $n$  میں کے متناسب ہیں۔ ثابت کرو کہ ذہ سطح پر کسی جگہ ساکن رہ سکتا ہے اگر لہرگز کی قدر

$$\frac{2}{n} < \frac{1}{n-1}$$

(۲۳) ایک مستدیر قرص جس کا وزن  $w$  ہے ایک کھرورہ سے میز پر انتصابی مستوی میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا نقطہ  $A$  میز کو مس کرتا ہے ایک شخص اس کو نقطہ  $B$  پر اپنی انگلی سے دباتا ہے۔ اگر خط  $AB$  سمت راست کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بنائے اور اگر  $A$  اور  $B$  پر لہرگز کے زاویے بالترتیب  $\alpha$  اور  $\beta$  ہوں تو ثابت کرو کہ اگر  $\theta$  کے لئے

تو قرص میز پر فوراً لڑکنا شروع کرے گا خواہ  $B$  پر کا دباؤ کتنا ہی کم کیوں نہ ہو اور اگر  $\theta$  کے لئے

ڈالا جائے اور اگر  $\theta$ ،  $\alpha$  اور  $\beta$  دونوں سے کم ہو تو  $B$  پر کوئی قوت اس کو ہلایہ سبکیں۔ (۲۴) دو یکساں شہتیروں  $A$  و  $B$  اور  $C$  کو ج پر ایک جگہ قبضہ کے ذریعہ وصل کیا گیا ہے اور ان کو ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کے دونوں پچھلے سرے ایک کھروری انفی سطح مستوی پر ساکن رہیں۔ اگر تعادل کو توڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ نتیجہ شہتیر کا سر پچھلے گا اور چھوٹا شہتیر گھومے گا۔

(۲۵) ثابت کرو کہ کم سے کم قوت جو ایک وزنی یکساں کرے کی سطح پر لگانی چاہیے تاکہ یہ ایک کھروری انتصابی دیوار کے مقابل متعادل رہ سکے و جمہ

$$w \sin \theta \leq \mu w \cos \theta \quad \text{یا} \quad \tan \theta \leq \mu$$

لے  $\mu$  جمہ  $\frac{1}{2}$  سے کرہ کا وزن ہے اور لہرگز کا زاویہ ہے۔

(۲۶) ثابت کرو کہ دو اسطوانی کندے جن کے نصف قطر مساوی ہیں لیکن جن کے وزن  $w$  اور  $w'$  مختلف ہیں (جہاں  $w < w'$ ) ایک سطح مائل پر اس طرح ساکن رہ سکتے



ہیں کہ ان کے محور متوازی الافق نہیں اور زیادہ وزنی کسٹھ اوپر ہو بشرطیکہ رگڑ کی قدر نہ (جو تماس کے دونوں خطوں پر مساوی ہے)  $\frac{d}{2} + \frac{d}{2}$  سے زیادہ ہو اور سطح مائل کا میلان

$$> \text{مس}^1 \frac{2d}{(1+d)(1+d)}$$

اگر سطح مائل کے میلان کو بتدریج بڑایا جائے تو بتاؤ کہ تعادل کس طرح ٹوٹے گا۔  
(۲۷) ایک تختہ سیاہ بردار کے اگلے اور پچھلے پیریمٹر امتصافی کے ساتھ بالترتیب ۳۰° کے زاویہ بناتے ہیں۔ ہر ایک یکساں ہے اور ہر ایک کا وزن ۱ ہے۔ ایک سیاہ تختہ جس کا وزن ۱ ہے اگلے بیروں کے اوپر نصف کو ڈھکے ہوئے ہے ایک ساتھ تختہ کے وسطی نقطہ کو عموداً ایک ایسی قوت سے دباتا ہے جو تختہ کے وزن کے ۲ کے مساوی ہے اگر بیروں اور فرش کے درمیان رگڑ کی قدر ۱/۲ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ پچھلے بیروں کے پھسلنے سے تعادل ٹوٹے گا۔

(۲۸) (۱) ب، ج، طول کی تین یکساں سلاخوں کو اس متوار طور پر جوڑے۔ جس سے ایک مثلث (ب ج) بنایا گیا ہے۔ مثلث کو ایک کھردری سطح پر اس طرح لٹکایا گیا ہے کہ سطح ب ج اس سے مس کرتا ہے۔ اس سلاخ کے اُس حصہ کی حدود معلوم کرو جس کے ہر نقطہ پر مثلث متعادل رہ سکے۔ نیز بتاؤ کہ اگر

$$\text{مس}^1 \frac{(1+1+1)(1+1+1)}{(1+1)(1+1)} + \text{مس}^1 \frac{1}{2}$$

بیاں ج < ب تو مثلث ہر محل میں متعادل رہے گا۔

(۲۹) ایک مکمل طور پر کھردری سطح مستوی افق کے ساتھ عمود زاویہ بناتی ہے / ثابت کرو کہ اس ناقص کا خروج المرکز جو اس سطح مائل پر ساکن رہ سکتا ہے کم سے کم

$$\frac{2}{1+\text{جب}^2} \text{ ہو نا چاہیے۔}$$

(۳۰) قطع ناقص کی شکل کا ایک اسطوانہ ایک کھردری انتصابی سطح اور ایک اتنی ہی کھردری افقی سطح کے درمیان ساکن ہے۔ اسطوانہ کا محور افقی ہے اور ناقص کا محور اعظم افقی کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ رگڑ کی مقدار

$$\frac{1}{2} \frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 2} \text{ ہے، جہاں } \sqrt{2} \text{ ناقص کا خروج مرکز ہے۔}$$

(۳۱) تین مساوی اسطوانی سلاخیں اُسی نصف قطر کی ایک چوتھی سلاخ کے گرد متشاکلاً رکھی گئی ہیں اور پھر اس گٹھے کو دو مساوی لچکدار رسیوں سے گھیر لیا گیا ہے جو سروں کے لحاظ سے متشاکل میں ہیں۔ اگر ہر ایک رسی کا طول (بغیر کچاؤ کے) ہر ایک سلاخ کے محیط کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اندرونی سلاخ کو پھینچنے کے لئے

۴۵ سے لے کر ۹۰° قوت درکار ہوگی جہاں ۹۰° رگڑ کی قدر ہے اور لچک کا مقیاس۔  
(۳۲) نصف قطر ۱ کے تین مساوی گڑے ایک افقی سطح پر پڑے ہیں اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔ ان گڑوں کے اوپر ایک ایسا کرہ رکھا گیا ہے جس کا نصف قطر ۱ ہے۔ اگر تعادل قائم رہے تو ثابت کرو کہ اوپر کے کرہ اور نیچے کے گڑوں کے

درمیان رگڑ کا چھوٹے سے چھوٹا زاویہ  $\frac{1}{2} \pi$  جب  $\left[ \frac{1}{2} \frac{1}{(1+b)} \right]$  ہوگا۔

(۳۳) ایک سائیکل کے پہیوں کے سب سے پچلے نقطوں کو ملائے والے خط کا طول ۱ ہے۔ مرکز ثقل اس خط سے ۵ بلندی پر اور اس کے وسطی نقطہ کے آگے ۱۱ فاصلہ پر واقع ہے۔ اگر دھڑے کی رگڑ اور پہیے کے رکتے وقت اس کے خلاف سرک کی مزاحمت کو نظر انداز کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ جب پچھلے پہیے پر بریک لگا دی جائے تو اس سطح مائل کا بڑے سے بڑا زاویہ میلان جس پر سائیکل بغیر پھسلے روکی جاسکتی

$$\text{ہے وہ ہوگا جہاں } \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \text{ ہے}$$

اور ۹۰° پہیے اور زمین کے درمیان رگڑ کا زاویہ ہے۔

(۳۴) مساوی نصف قطر کے دو پہیوں ۱ اور ۲ کے وزن ۱ اور ۲ ہیں۔ ان کو ایک ہلکی سلاخ سے جو ان کے مرکزدں کے ساتھ جوست ہے ملا لیا گیا ہے سلاخ

کا طول لی ہے۔ ان پہیوں کو ایک کھروری مائل سطح مستوی پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کی مشترک مستوی سطح انتصابی ہے اور ڈاؤپر کی طرف ہے۔ یہ سطح مائل کے میلان کو بتدریج بڑایا گیا ہے اگر کسی ایک پہیہ کو بریک لگانے سے پہلے سطح مائل کے ایک ہی میلان سے پھسلنا شروع کریں تو ثابت کرو کہ  $\frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \phi} + \frac{1}{\sin \psi}$

(۳۵) ایک تانگے کی ریل کے ٹکٹے کا نصف قطر ج ہے اور اس کے دو دائری سرور کا نصف قطر ہے۔ ریل کو ایک کھروری سطح مائل پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ جب یہ نیچے کی طرف لڑکتی ہے تو اس کا تانگا کھلتا جاتا ہے۔ اگر رگڑ کی قدر نہ ہو اور سطح مستوی کا میلان افق کے ساتھ ہو تو ثابت کرو کہ ریل سطح مستوی پر اوپر کی طرف تانگے کے ذریعے کھینچی جاسکتی ہے بشرطیکہ  $\mu > \frac{1}{2} \frac{J}{J + j}$ ۔ اگر یقین اس قیمت کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس کے جواب میں تانگے کی سمت انتہی ہوگی۔

(۳۶) ایک پہیہ کا وسطانی دھرا و متوازی ریل کی پٹریوں پر رکھا ہوا ہے پٹریاں ایک مائل سطح بناتی ہیں۔ ایک ڈوری پہیہ کے محیط پر لپیٹی ہوئی ہے۔ بتاؤ کہ کن حالات میں ڈوری کو نیچے کی طرف مائل سطح کے متوازی کھینچنے سے پہلے پٹریوں پر اوپر کی طرف چڑھے گا۔ (۳۷) تانگے کی ایک لائن کے کنارے اور ٹکٹے کے نصف قطر بالترتیب  $a$  اور  $b$  ہیں ایک کھروری افقی میز پر پڑی ہے اور تانگا کا کھلا سرا جو ٹکٹے کے نیچے سے گزرتا ہے میز پر پڑا ہے۔ یہ پورا نظام ایک ایسے سطح مستوی کے گرد جو ریل کے محور پر عمود وار ہے متشکل ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کھلے سرے کو اتنا اٹھایا جائے کہ یہ افق کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بنائے تو تانگے میں ذرا سا تناؤ بھی عموماً ریل کو لڑکانے کا باعث ہوگا اور اٹھانے والے شخص کے ہاتھ کی طرف یا اس کے مخالف سمت میں حرکت پیدا ہوگی جبکہ ط ایک خاص قیمت سے کم یا زیادہ ہو۔ جب ط کی یہ خاص قیمت ہو تو ثابت کرو کہ حرکت پیدا نہیں ہوگی تاوقتیکہ تناؤ ایک خاص محدود انتہا سے متجاوز نہ کرے۔

(۳۸) دو پہیے کی گاڑی کا ہم جب افق کے متوازی ہو تو اس کا مرکز ثقل پہیے کے

دھڑے کے عین اوپر ہوتا ہے۔ پہیہ کا نصف قطر ہے اور یہ کھردرے دھڑے پر آزادانہ گھوم سکتا ہے دھڑے کا نصف قطر ہے زمین پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لئے کافی بکھردری ہے۔ ثابت کر دکھائے کہ قوت جولی طول واسے ہم کے ایک سرے پر لگائی جائے تو گاڑی کو حرکت دے سکے پہیہ اور زمین کے مشترک نقطہ میں سے

گزرتی ہے اور  $\frac{دک \times (ل + ۲ا)}{۲} = \frac{دک \times (ل + ۲ا - ک)}{۲}$  کے مساوی ہے اس میں  $ک = \frac{۲}{۱}$  جبکہ

جہاں صہ پہیہ اور دھڑے کے درمیان رگڑ کا زاویہ ہے اور و گاڑی کا وزن ہے۔ (۳۹) ایک دزنی پہیہ کو ایک رسی کے ذریعہ جو اس کے ایک اڑے یا تیلی کے ساتھ بندھی ہے ایک رکاوٹ کے اوپر سے کھینچ کر لے جانا مقصود ہے رکاوٹ پہیہ کو ج پر مس کرتی ہے۔ اگر رسی کو افقی کے متوازی کھینچا جائے تو ثابت کر دو کہ پہیہ ج کے گرد گردش کرے گا اور نہ بین پر یا ج پر نہیں پھسلے گا اگر رسی کی اوکھائی ج کے اوپر اور جب عہد مم (ع - ص) سے کم ہو جہاں پہیہ کا نصف قطر ہے، ج پر کی رگڑ کا زاویہ صہ ہے اور وہ زاویہ صہ ہے جو ج میں سے گزرنے والا نصف قطر سمت انتصابی کے ساتھ بناتا ہے۔

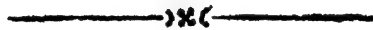
(۴۰) ایک ٹھوس مستدیر اسطوانہ قاعدہ کے بل ایک کھردری افقی سطح مستوی پر پڑا ہے اور اپنے محور کے گرد آزادانہ حرکت کر سکتا ہے۔ اگر اس کا وزن و ہو اور اس کی ترش کا نصف قطر ل ہو تو ثابت کر دو کہ چھوٹے سے چھوٹے جفت کا معیار اثر جو اس کو ہلا سکتا ہے  $\frac{۲}{۳}$  و ہے یہ مان لیا جائے کہ اس کا وزن سطح مستوی پر یکساں طور پر پڑتا ہے۔

(۴۱) ایک وزن اناقصی قرص ایک کھردرے میز پر پڑا ہے اس پر ایک افقی قوت قی عمل کرتی ہے جس کے زیر عمل وہ عین حرکت کرنے کو ہے ثابت کر دو کہ اگر اس کا وزن اس کے رقبہ پر یکساں طور پر منقسم ہو اور یہ ایک ماسکہ کے گرد گھومنا شروع کرے تو قوت کو مرکز سے  $\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳}$  فاصلہ پر زمین کی سمت میں عمل کرنا چاہیئے۔

(۴۲) خط صنوبری (Cardiod) کی شکل کا ایک یکساں قرص ایک کھردری سطح اگلے پر پڑا ہے جو افق کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بناتی ہے۔ قرص اپنے قطب پر ایک سوئی کے گرد گھوم سکتا ہے۔ جب قرص عین پھسلنے کو ہو تو اس کا محور سطح اگلے کے خط میلان اعظم کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بناتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب  $\theta = 90^\circ$  ہو گا، جہاں مرکز اگلی قدر ہے۔

نیز ثابت کرو کہ سوئی پر کے غل کی سمت خط صنوبری کے محور کے ساتھ زاویہ  $\theta$  (ماس  $\theta$ ) بناتی ہے۔

(۴۳) ایک چکر کھردری افقی سطح مستوی پر پڑا ہے اور اس کو ایک رسی کے ذریعہ جو اس کے کسی نقطہ پر بندھی ہے ان پر کے ماس کی سمت میں کھینچا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ چکر ان میں سے گزرنے والے نقطہ کے دوسرے سرے کے گرد گھومنا شروع کرے گا۔

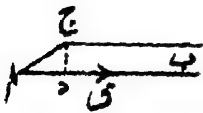


# پانچواں باب

## کام۔ موہوم کام

۸۶۔ جب ایک قوت کا نقطہ عمل قوت کی سمت میں حرکت کرے تو کہتے ہیں کہ قوت نے کام کیا۔ ایک گاڑی کو کھینچنے میں گھوڑا جو قوت لگاتا ہے وہ کام کرتی ہے بھاپ کا دباؤ جب فشار کو حرکت دیتا ہے تو کام کرتا ہے۔  
جب کوئی شخص گھڑی یا گھڑیاں کو کھینچ دیتا ہے تو وہ کام کرتا ہے۔ کسی قوت کے کام کا ناپ قوت عاملہ اور اس فاصلہ کا حاصل ضرب ہے جس میں سے قوت کا نقطہ عمل قوت کی سمت میں حرکت کرتا ہے۔

فرض کرو کہ ایک قوت  $Q$  جو ایک جسم کے نقطہ  $A$  پر عمل کرتی ہے  $A$  کو  $B$  تک لے جاتی ہے۔ ایسا کرنے میں قوت نے جو کام کیا وہ قوت  $Q$  اور  $AB$  کے حاصل ضرب سے تعین ہوگا۔ اگر نقطہ  $A$  کے اُس طرف ہو جس طرف قوت عمل کرتی ہے تو کام مثبت ہوگا اگر اس کے مقابل سمت میں ہو تو کام منفی ہوگا۔



اب فرض کرو کہ قوت کا نقطہ عمل حرکت کر کے  $C$  پر آ جاتا ہے جو  $A$  ب پر واقع نہیں ہے۔  $C$  سے  $A$  یا  $A$  ب سے  $C$  پر عمود گراؤ۔ تب  $AD$  فاصلہ ہے جس میں

سے قوت کے نقطہ عمل نے قوت کی سمت میں حرکت کی ہے۔ اس لئے بائیں شکل میں کام  $Q \times d$  کے مساوی ہے اور دائیں شکل میں کام۔  $Q \times d$  کے مساوی ہے جب کسی قوت کا کام منفی ہو تو اس کو بعض اوقات یوں بیان کرتے ہیں کہ قوت کے خلاف کام کیا گیا ہے۔

اُس صورت میں جب  $d$   $Q$  پر عمود وار ہو تو نقاط  $A$  اور  $B$  منطبق ہو جائے اور قوت  $Q$  کا کام معدوم ہو جاتا ہے۔

مثلاً اگر کسی جسم کو افقی سطح پر حرکت دی جائے تو اس کے وزن کا کام صفر ہو جاتا ہے اسی طرح اگر کوئی جسم ایک سطح اُبل پر حرکت کرے تو سطح اُبل کا عمادی تعامل کوئی کام نہیں کرتا۔

(۷۷)

۸۷۔ کام کی اکائی جو سکونیات میں استعمال کی جاتی ہے فٹ پونڈ کہلاتی ہے۔ ایک فٹ پونڈ کام سے وہ کام مراد ہوتا ہے جو ایک پونڈ وزن کی قوت اپنی سمت میں جسم کے نقطہ عمل کو ایک فٹ تک حرکت دینے میں سرانجام دیتی ہے۔ فٹ پونڈ کی بجائے فٹ پونڈ وزن کہنا زیادہ صحیح ہے لیکن زیادہ بھدا ضرور ہے۔

۸۸۔ یہ بات قابل غور ہے کہ کام کی تعریف جو دفعہ ۸۶ میں دی گئی ہے اس میں حرکت لازمی طور پر مضمحل ہے۔ ممکن ہے کہ ایک شخص جسم کو حرکت دینے کی کوشش میں بہت سی قوت صرف کرے لیکن دراصل جسم پر کوئی کام نہ کرے۔ مثلاً فرض کرو کہ ایک شخص بہت بڑی گاڑی کے ڈنڈے کو پکڑ کر کھینچتا ہے لیکن اسے ہلا نہیں سکتا۔ اس لئے خواہ وہ اسے کھینچنے میں اپنی پوری قوت صرف کر دے لیکن چونکہ اس کی قوت اپنے نقطہ عمل کو ہلا نہیں سکتی اس لئے وہ (کام کے اصطلاحی معنوں میں) کوئی کام نہیں کرتا۔

۸۹۔ ثابت کرو کہ بہت سے ذروں کو ایک مقام سے اٹھا کر دوسرے مقام پر لے جانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ  $W \times F$  کے مساوی ہوتا ہے جہاں  $W$  ذروں کا مجموعی وزن ہے اور  $F$  وہ فاصلہ ہے جس میں سے ذروں کو اٹھا کر منتقل کیا گیا ہے۔





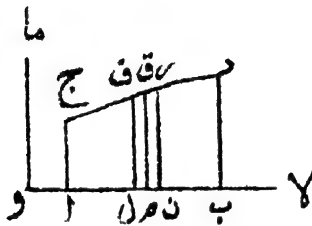
شرح سے اکائی وقت میں کرتا ہے۔

طاقت کی وہ اکائی جو انجینیروں کے ہاں مستعمل ہے اسی طاقت کہلاتی ہے اگر کوئی عامل ایک منٹ میں ۳۳۰۰ فٹ پونڈ کام کرے۔ یعنی ایک منٹ میں ۳۳۰۰ فٹ ایک فٹ تک اٹھائے یا ۳۳۰۰ پونڈ کو ۱۰۰ فٹ تک یا ۳۳ پونڈ کو ۱۰۰۰ فٹ تک تو ہم کہتے ہیں کہ وہ ایک اسی طاقت سے کام کر رہا ہے۔

گھوڑے کی طاقت کا یہ اندازہ ۱۸۰۰ فٹ صاحب نے لگایا تھا لیکن یہ معمولی گھوڑوں کی طاقت سے بہت زیادہ ہے۔

۹۲۔ قوت کے کام کی تریسیمی تعبیر۔

بعض اوقات متغیر قوت کے کام کو براہ راست محسوب کرنا مشکل ہوتا ہے لیکن معتد بہ حد تک تقریبی نتائج حاصل کرنا بہت ممکن ہے۔



فرض کرو کہ متغیر قوت ہمیشہ خط مستقیم ولا کی سمت میں عمل کرتی ہے ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ جب قوت کا نقطہ عمل اسے ب تک حرکت کرے تو قوت کتنا کام کرتی ہے۔

ا اور ب میں سے معین ج اور ب د ٹھینچو جو ان دو نقاط عمل پر قوت کی قوتوں کو ظاہر کریں اسی طرح ا ب کے درمیان ہر نقطہ عمل ل میں سے معین ل ف ٹھینچو جو اس نقطہ پر عمل کرنے والی قوت کی مقدار کو تعبیر کرے۔ تب صریحاً ان معینوں کے سرے ج ف د کی قسم کے کسی مخفی پرہ اقع ہونگے۔ ل کے قریب کوئی نقطہ ہر ایسا الوجودی کے اس قدر قریب ہو کہ قوت کا نقطہ عمل ل سے ہر تک حرکت کرنے کے دوران میں قوت کی مقدار کو مستقل منسہ ص کیا جاسکے۔

تب وقت کا کام = اس کی مقدار  $\times$  وہ فاصلہ جس میں سے قوس کا نقطہ عمل حرکت کرنا ہے۔

$$= \text{ل} \times \text{ف} = \text{ل} \times \text{مر} = \text{ف} \times \text{مر} \text{ تقریباً}$$

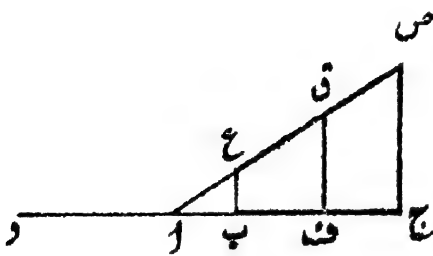
اسی طرح جب نقطہ عمل مر سے ن تک جائے تو

$$\text{کام} = \text{ق} \times \text{ن} \text{ کا رقبہ تقریباً}$$

علیٰ بذالقیاس

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقطہ عمل کے ل سے ب تک حرکت کرنے میں جو کام ہوتا ہے وہ طولوں ل، مر، ن کے..... کو لا انتہا چھوٹا لینے سے رقبہ ا ج ب د کے زیادہ قریب آتا جاتا ہے۔

۹۳۔ مثال کے طور پر ہم وہ کام معلوم کرتے ہیں جو ایک لچکدار رسی کو طول ب ( = د ب ) سے طول ج ( = د ج ) تک پھینچنے میں انجام پاتا ہے رسی کا طول بغیر کھینچاؤ کے ( د - و ) ہے۔



جب اسی کا طول د ف ہو

تو تناؤ =  $\frac{\text{ل} \times (\text{د} - \text{و})}{\text{و}}$  =  $\frac{\text{ل} \times \text{ف}}{\text{و}}$  ، ہک کے کلیہ سے جہاں لچک کی قدر ہے ف برعکس د ف کو کالو جس تناؤ کو تعبیر کرے۔

تب  $\frac{\text{ف} \times \text{ق}}{\text{ل}}$  مستقل ہے اور اس لئے ق واقع ہوگا ایک خط مستقیم ا ر ص پر جو ا میں سے گزرتا ہے۔ اگر یہ خط مستقیم ب اور ج پر کے عمودوں کو ع اور ص پر لے تو دفعہ ما قبل سے مطلوبہ کام رقبہ ب ع ص ج سے تعبیر ہوگا اور اس لئے

۱/۴ ب ج × (ب ع + ج ص) کے مساوی ہوگا۔ یعنی

کام = رسی کا کھجاؤ × ابتدائی اور آخری تناؤں کا اوسط  
یا تکمیلی احصاء سے

$$\text{کام} = \int_{\text{ب}}^{\text{ج}} \text{ت فرلا} = \frac{1}{3} \int_{\text{ب}}^{\text{ج}} (لا - لا) \text{ فرلا}$$

$$= \frac{1}{3} (لا - لا) \left[ \frac{1}{2} (ج - ب) (ج + ب - ب - ۲) \right] = \frac{ج - ب}{۲} (تب + ت ج)$$

۹۴۔ بطور دوسری مثال کے ایک بھاپ انجن کے منظرہ نقشہ پر غور کرو۔  
فرض کرو کہ وادہ فاصلہ ہے جو انجن کا فشارہ طے کرتا ہے۔ جب فشارہ آگے  
کی حرکت میں مقام ہر پر ہو تو اس پر کے بھاپ کے دباؤ کو عمود دھرت سے تعبیر کرو۔  
اس طرح عمل کرنے سے ظاہر ہے کہ فشارہ کی آگے کی حرکت کے دوران میں اس پر

بھاپ کے دباؤ کو منحنی

و ن ڈ تعبیر کرتا ہے۔

اس طرح سے فرض کرو کہ

فشارہ کی دایسی کی حرکت

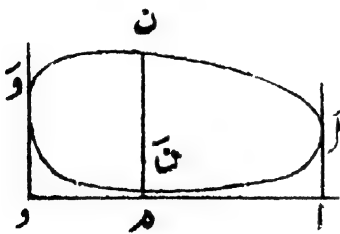
کے دوران میں جب بھاپ

کی آمد بند کر دی جاتی ہے

فشارہ کے اسی رخ کے

دباؤ کو منحنی آن ڈ تعبیر

کرتا ہے۔

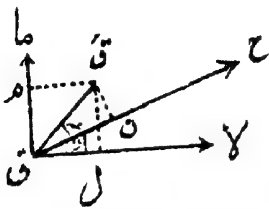


تب فشارہ کی آگے کی حرکت کے دوران میں وہ کام جو بھاپ فشارہ پر کرتی  
ہے منحنی و ن ڈ کے رقبہ سے تعبیر ہوگا اور اسی طرح دایسی کی حرکت میں وہ کام

جو بھاپ فشارہ کے خلاف کرتی ہے سختی  $اَن$  و  $وَل$  کے رتبہ سے تعبیر ہوگا۔  
 اس لئے ایک مکمل ضرب کے دوران میں وہ کل کام جو بھاپ فشارہ کے ایک  
 رنج پر کرتی ہے رتبہ  $وَن اَن$  و سے تعبیر ہوتا ہے اور اس لئے معلوم ہو سکتا ہے۔  
 اس قسم کے سختی کو جو شکل بالا میں دکھایا گیا ہے ہم مظہار نقشہ کمبیں کے اور نقشہ فشارہ  
 کی حرکت سے خود بخود کھینچ سکتا ہے یعنی مناسب با نظام سے انجن اپنا مظہار نقشہ آپ کھینچ سکتا ہے۔  
 ۹۵۔ کسی قوت کا کام۔ اُس قوت کے اجزاء ترکیبی کے کاموں کے  
 مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ قوت  $ح$  کے اجزاء ترکیبی دو علی القوائم سمتوں میں  $لا$  اور  $ما$  ہیں  
 اور  $ح$  محور  $لا$  کی سمت کے ساتھ زاویہ  $ذ$  بناتی ہے۔

اس لئے  $لا = ح \cos ذ$  اور  $ما = ح \sin ذ$   
 فرض کرو کہ  $ح$  کا نقطہ عمل  $ق$  حرکت کر کے  $لا$  ما مستوی میں  $ق$  پر آجاتا  
 ہے،  $ق$  سے  $ح$  کی سمت پر عمود  $ق ن$  کھینچو



اور فرض کرو کہ  $اَن ق ق = عد$

تب  $لا$  اور  $ما$  کے کاموں کا مجموعہ

$$= لا \times ق ل + ما \times ق ه$$

$$= ح \cos ذ \times ق ق + ح \sin ذ \times عد$$

$$= ح ق ق \cos ذ + ح عد \sin ذ = ح ق ن$$

۹۶۔ اگر قوتیں اور ہٹاؤ ایک ہی سطح مستوی میں نہ ہوں تو بھی یہی نتیجہ آسانی سے  
 حاصل ہو سکتا ہے۔

فرض کرو کہ  $ح$  کی سمتی جیوب التمام کسی علی القوائم محاورہ  $ولا$ ،  $وما$ ،  $ومی$ ،  
 کے لحاظ سے  $(ل، م، ن)$  ہیں یعنی  $لا = ل ح$ ،  $ما = م ح$ ،  $ے = ن ح$ ، نیز  
 ہٹاؤ مف سے ایک ایسے خط پر واقع ہوتا ہے جس کی سمتی جیوب التمام  $(ل، م، ن)$   
 ہیں اس طرح مف  $لا = ل مف$ ،  $س = م مف$ ،  $ما = م مف$ ،  $س اور مف می$   
 $= ن مف$  سے

تب ترکیبی قوتوں کا کام = لا مف لا + ما مف ما + مے مف م  
 = ح مف س (ل ل + م م + ن ن)  
 = ح مف س × جم ق ق = ح × ق ق کا فل ح کی سمت پر

ح کا کام  
 اگر کوئی ذرہ فضائیں چکنے منحنی پر حرکت کرے اور اس کے کسی نقطہ (لا، ما، مے)  
 پر اس پر عمل کرنے والی قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، مے ہوں تو ظاہر ہے کہ  
 جب ذرہ اسے حرکت کر کے ب پر جاتا ہے تو وہ کل کام جو اس پر ہوتا ہے وہ  
 = ح (لا فلا + ما فزا + مے فزی)

۹۷۔ جنت کا کام۔ فرض کرو کہ جنت کی ہر ایک قوت ق ہے اور اس کے  
 بازو اب کا طول آ ہے۔

اب فرض کرو کہ جنت یا مقام اختیار کرے اور اب کا مقام اب ہو جاتا ہے  
 اور اب اور آ اب کا راستہ یا زاویہ مف ط ہے۔  
 پہلے قوتوں کو اپنے متوازی اس طرح حرکت کرو کہ بازو اب متوازی محل کج  
 میں آجائے۔ اس ٹھکانے کے لئے مساوی اور متقابل قوتوں ق کا کام صفر ہوگا۔  
 اب قوتوں کو آ کے گرد چھوڑ دو۔ یہ مف ط میں سے ٹھکانے آوت اب جو  
 آ پر عمل کرتی ہے اس کے نقطہ عمل نہیں بدلتا اس لئے وہ کوئی کام نہیں کرتی۔ دوسری  
 قوت ق کے نقطہ عمل کا پتہ اب مف ط ہے۔ اس کے کل کام جو ہوا وہ ق × آ ×  
 مف ط کے مساوی ہے۔ یعنی جنت کے معیار اثر اور گھاؤ کے زاویہ سے حاصل ضرب  
 کے مساوی ہے۔

اگر جنت کے ٹھکانے کا کل زاویہ ع ہو تو جنت کا کام  
 = ح ق × آ مف ط = ق × آ ع

(۸۲)

اس لئے سب صورتوں میں جفت کا کام جب کہ جفت کو اس کے محور کے گرد جو اس کی سطح مستوی پر عود دار ہو گھمایا جائے جفت کے معیار اثر اور گھاؤ کے توازیہ کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتا ہے۔  
**۹۸۔** توانائی بالقوہ۔ قوتوں کے کسی دئے ہوئے نظام کے زیر عمل کسی جسم کی توانائی بالقوہ سے وہ کام مراد ہوتا ہے جو کہ نظام کو کہ جسم پر کر سکتا ہے جب کہ جسم موجودہ روپ (Configuration) سے کسی معیاری روپ تک جس کو محل صفر کہتے ہیں پہنچے۔  
 مثلاً وزن و کے کسی ذرہ کی توانائی بالقوہ جب کہ وہ زمین کے اوپر ارتفاع ہر ہو وہ ہوتی ہے۔

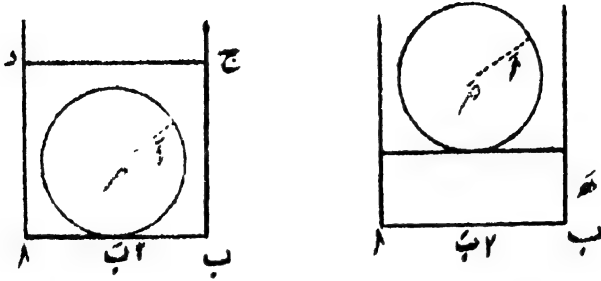
اگر ہم جاذبہ ارض کے تغیر کو بھی ملحوظ رکھیں اور یہ مان لیں کہ زمین کے مرکز سے لا فاصلہ پر کے کسی ذرہ پر زمین کی کشش  $\frac{1}{r^2}$  کے مساوی ہوتی ہے تو وہ بلندی پر توانائی بالقوہ جبکہ زمین کی سطح کو محل صفر مانا جائے اور زمین کو نصف قطر  $R$  کا کرہ فرض کیا جائے

$$K_{\text{سورہ}} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \text{فرق} = \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{(h+1)^2} = \frac{1}{h+1}$$

کے مساوی ہوگی۔ کیونکہ زمین کے سطح پر کے کسی مقام پر کشش  $\frac{1}{r^2}$  اسی طرح اگر ایک لچکدار رسی لی جائے جس کا قدرتی طول  $L$  ہے اور اس کے ایک سرے کو ایک ثابت نقطہ کے ساتھ باندھ دیا جائے تو دفعہ ۹۳ کی رو سے ایک ذرہ کی توانائی بالقوہ جو اس کے دوسرے سرے کے ساتھ بند ہو  $\frac{1}{L^2}$  ہوگی جبکہ کھیا ہوا طول  $L+1$  لا ہو۔

**۹۹۔** مشتق ۱۔ ایک کردی گولی جس کا وزن  $W$  پونڈ اور نصف قطر  $R$  فٹ ہے ایک اسطواناتی ڈول کی تہ میں پڑی ہے۔ ڈول کا نصف قطر  $b$  فٹ ہے اور اس کے اندر  $h$  ( $h < R$ ) ارتفاع تک پانی بھرا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ پوری گولی کو پانی کے عین باہر نکال لینے میں جو کام ہوتا ہے وہ  $\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) W h$  (۵۔)  $\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) W h$  فٹ پونڈ سے زیادہ ہوگا جہاں گولی سے

مٹائے ہوئے پانی کا وزن وہ ہے۔



اگر پانی کے اکائی حجم کا وزن و اور گولی کی کمناخت اضافی ک ہو تو

(۸۲)

$$و = \frac{۳۴}{۳} \text{ و } ک د \quad \text{اور} \quad و = \frac{۳}{۳} \text{ و } ۱۱ \text{ و } ۳۱$$

کام کم از کم نظام کی توانائی بالقوہ کے اضافہ کے مساوی ہونا چاہیئے۔  
پہلی صورت میں توانائی بالقوہ

= پانی کے (اسطوانہ ا ب ج د - کرہ) کی توانائی بالقوہ

+ ک د دئے ہوئے کرہ کے مساوی پانی کی توانائی بالقوہ

= پانی کے اسطوانہ ا ب ج د کی توانائی بالقوہ + پانی کے کرہ کی توانائی بالقوہ کا (ک - ا) گنا

$$۱۱ \text{ ب } ۱۱ \text{ و } ۱۱ + \frac{۳}{۳} \text{ و } ۱۱ \text{ و } ۱۱ (ک - ا) = \frac{۳}{۳} \text{ و } ۱۱ \text{ و } ۱۱ + (د - و) \text{ و } ۱۱ \dots (۱)$$

جب کرہ کو نکال لیا جائے تو فرض کر کہ پانی کی گہرائی ۱۱ ہے

$$۱۱ \text{ ب } ۱۱ \text{ و } ۱۱ = \text{پانی کا حجم} = ۱۱ \text{ ب } ۱۱ - \frac{۳}{۳} \text{ و } ۱۱$$

$$\text{یعنی} \quad ۱۱ = ۱۱ - \frac{۳}{۳} \text{ و } ۱۱ \dots (۲)$$

دوسری صورت میں توانائی بالقوہ

$$۱۱ \text{ ب } ۱۱ \text{ و } ۱۱ + (۱۱ + و) = \frac{۳}{۳} \text{ و } ۱۱ \text{ و } ۱۱ + (۱۱ + و) \dots (۳)$$

توانائی بالقوہ کا اضافہ

$$= \frac{3}{4} \frac{b^2}{r} (\dot{h} - \dot{h}') + \dot{h} + \dot{h}'$$

$$= \dot{h} \left( \frac{3}{4} \frac{b^2}{r} - 1 \right) - \dot{h}' \left( \frac{3}{4} \frac{b^2}{r} - 1 \right)$$

مشق ۲۔  $\pi$  دباؤ پر ایک گیس کا حجم  $H$  ایک اسطوانی برتن کے اندر بند ہے۔ اگر گیس کو اس طرح پھیلنے دیا جائے کہ گیس کا طول  $L$  سے  $L'$  ہو جائے اور پیش مستقل رہے تو ثابت کرو کہ اس کا کام  $\pi H$  لوک  $L/L'$  ہوگا۔

اگر اس کا پھیلاؤ حرانگزم ہو یعنی اس کے پھیلنے میں نہ تو حرارت باہر سے اندر جائے اور نہ اندر سے باہر آئے اور اس لئے دباؤ اور حجم  $H$  کا رشتہ  $H \propto 1/L$  مستقل ہے تو ثابت کرو کہ اس صورت میں کام  $\pi H \left[ 1 - \left( \frac{L}{L'} \right)^2 \right]$  کے مساوی ہوگا۔

فرض کرو کہ دباؤ  $P$  ہے جبکہ گیس اسطوانہ کے طول  $L$  میں پھیلی ہوئی ہے تو کلیہً

$$P L = \pi$$

جب طول  $L$  سے  $L'$  + مف  $L$  ہو جائے تو

کام  $W = P \Delta L$  مف  $L$  جہاں  $P$  اسطوانہ کی عمودی تراش کا رقبہ ہے

$$= \frac{\pi}{L} \times \frac{L}{L'} = \frac{\pi}{L'}$$

پس مطلوبہ کام  $\int_{L'}^L \frac{\pi}{L} dL = \pi \ln \frac{L}{L'}$  لوک  $L/L'$

دوسری صورت میں  $P L = \pi$  لوک

$$اور اس لئے کام  $W = \int_{L'}^L P dL = \int_{L'}^L \frac{\pi}{L^2} dL = \pi \left[ \frac{1}{L'} - \frac{1}{L} \right]$$$



$$= \frac{\pi}{\pi-1} \left( \frac{1}{\pi-1} - \frac{1}{\pi} \right) = \frac{\pi}{\pi-1} \left[ 1 - \left( \frac{\pi}{\pi-1} \right)^{-1} \right]$$

مشق ۳۔ اگر مشق با قبل میں گیس کسی شکل کے برتن کے اندر بند ہو اور دباؤ  $\pi$  پر اس کا حجم  $\pi$  ہو اور پھر اس کا حجم  $\pi$  ہو جائے تو ثابت کرو کہ کام

$$\pi \text{ لوک } \frac{\pi}{\pi-1} \text{ یا } \frac{\pi}{\pi-1} \left[ 1 - \left( \frac{\pi}{\pi-1} \right)^{-1} \right]$$

ہو گا، جو جب اس بات کے کہ پھیلاؤ کس شرط کے ماتحت عمل میں آیا ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک دنمانی جہاز ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہا ہے۔ اگر اس کے انجن کی موثر اسپرے طاقت ۱۰۰۰ ہو تو بتاؤ کہ اس کی حرکت میں کس قدر مزاحمت ہو رہی ہے۔

[ جواب  $\frac{1}{11} \times 1000$  ٹن وزن ]

۲۔ ایک بہاڑی کا ڈھال ۲۰ میں ہے اس پر ایک سائیکل سوار ۶ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اوپر چڑھ رہا ہے اگر سوار اور سائیکل کا مجموعی وزن ۲۰۰ پونڈ ہو تو بتاؤ کہ وہ کم از کم ۱۶ اسپی طاقت سے کام کر رہا ہے۔

۳۔ ایک شخص ایک منٹ میں کشتی پر ۴۰ دفعہ چو چلا رہا ہے اور اس سے کشتی ۱۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے آگے بڑھ رہی ہے اگر اس کی حرکت میں ۸ پونڈ وزن کی مزاحمت ہو تو بتاؤ کہ وہ ایک دفعہ چو چلانے میں کتنا کام کرتا ہے۔ نیز بتاؤ کہ کس اسپرے طاقت سے کام کر رہا ہے۔  
[ جواب ۱۷۶ فٹ پونڈ، ۲۱۳ اسپی طاقت ]

۴۔ ایک لچکدار رسی کا قدرتی طول ۱۰ اینچ ہے اگر اس کو پانچ پونڈ وزن کی قوت سے کھینچا جائے تو اس کا طول کھینچ کر ۱۵ اینچ ہو جاتا ہے۔ بتاؤ کہ اس کے طول کو ۱۲ اینچ سے کھینچ کر ۱۵ اینچ کرنے کے لئے کس قدر کام کرنا پڑتا ہے۔  
[ ۷ فٹ پونڈ ]

۵۔ ایک پیچدار کمائی کو ایک اینچ کھینچنے کے لئے ایک پونڈ وزن کی قوت درکار ہوتی ہے بتاؤ کہ اسے مزید ۳ اینچ کھینچنے میں کتنا کام کرنا پڑیگا۔  
[ ۷ فٹ پونڈ ]

۶۔ ایک قوت ایک ذرہ پر عمل کرتی ہے اس کی ابتدائی قیمت ۲۰ پونڈ ہے اور اس کی قیمتیں جبکہ اس کا نقطہ عمل ذرہ کی حرکت کی سمت میں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ فٹ فاصلوں میں سے حرکت کرے بالترتیب ۲۵، ۲۹، ۳۲، ۳۱، ۲۴ اور ۲۲ پونڈ ہیں پس یہ سیکر کر کے کہ ذرہ کی حرکت کے ہر ایک فٹ میں قوت یکساں طور پر بدلتی ہے قوت اور فاصلہ کی ترسیم بتاؤ اور اس سے قوت کا کام معلوم کرو۔

۷۔ ایک بیج کا محور انتصابی ہے اور اس کی متصل چوڑیوں کا درمیانی فاصلہ ۲ انچ ہے ۱۰۰ پونڈ وزنی دروازہ کو اس بیج کے ساتھ اس طرح لگایا گیا ہے جیسے قبضے کے ساتھ لگایا جاتا ہے بتاؤ کہ دروازہ کو ایک زاویہ قائمہ میں سے گھمانے میں کتنا کام ہوتا ہے۔

(۱/۴ لم فٹ پونڈ)

۸۔ ثابت کر دو کہ رستے کا تناؤ ۹ ٹن وزن ہے جبکہ رستا ایک ایسے دوسرے بیج کے گرد پٹا ہوا ہے جس میں سے ایک پانچ چوڑی فی انچ والا راست دستی بیج ہے اور دوسرا چھ چوڑی فی انچ والا چپ دستی بیج ہے اور ۴۹ پونڈ وزن کی قوت ۲ فٹ کے ہتھے کے سرے پر لگائی گئی ہے۔

{دو ہرے بیج کی ایک مکمل گردش میں سرے (۱/۵ + ۱/۴) انچ قریب آتے ہیں۔ اس لئے کام کے اصول سے

$$\text{ت} \times \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{11} \times ۴۹ \times (۲ \times ۴۲)$$

جہاں ت روک رستے کا تناؤ پونڈ وزن میں ہے]

۹۔ دینسی پردے میں اوپر کی ثابت سلاخ کے علاوہ ن پتلی سلاخیں ہیں اور متابل حرکت حصہ کا وزن وہ پردہ چھوڑ دینے پر اس کا طول لا ہوتا ہے اور جب اس کو اوپر اٹھایا جائے تو اس کا طول ب ہوتا ہے۔ بتاؤ کہ اس کو اوپر اٹھانے میں جاذبہ ارض کے

خلاف جو کام کرنا پڑتا ہے دو  $\frac{1}{2} \times (و - ب)$  ہے

۱۰۔ ایک ٹھوس نصف کرہ جس کا وزن ۱۲ پونڈ اور نصف قطرا فٹ ہے اپنے چپے رخ کے بل ایک میز پر پڑا ہے اگر اس کو اس طرح پٹایا جائے کہ اس کا سطحی رخ میز کو مس کرتے ہوئے لٹکا رہے تو بتاؤ کہ محل اوّل سے محل ثانی میں آنے میں کتنا کام ہوا (دفعہ ۸۹)

(۳ فٹ پونڈ)

اور ۱۴۸ کے نتیجے استعمال کرو

۱۱۔ مثلثی منشور کی شکل کے ایک یکساں کدے کا وزن نصف ٹن ہے۔ اس کی عمودی تراش کے اضلاع  $\frac{1}{2}$  فٹ،  $\frac{1}{2}$  فٹ اور  $\frac{1}{2}$  فٹ ہیں۔ یہ زمین پر سب سے چھوٹے رخ کے بل پڑا ہے اس کو ایک کنارہ کے گرد اس طرح اٹھانا منظور ہے کہ یہ سب سے بڑے رخ کے بل گر پڑے۔ بتاؤ کہ ایسا کرنے کے لئے تقریباً ۲۷ فٹ ٹن کام کرنا پڑیگا۔

(دفعہ ۳ کو استعمال کرو)

۱۲۔ ایک سائیکل سوار جو ہینٹھ  $\frac{2}{3}$  ایسی طاقت کی شرح سے کام کرتا ہے ہموار افقی زمین پر ۱۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے سائیکل چلاتا ہے اور ایک پہاڑی چس کا میلان ۵۰ میں ہے ایل فی گھنٹہ کی رفتار سے چڑھتا ہے۔ فرض کرو کہ سوار اور سائیکل کا وزن ۱۸۰ پونڈ ہے اور افقی زمین پر کی مزاحمت دو حصوں پر مشتمل ہے جن میں سے ایک مستقل ہے اور دوسری رفتار کے مربع کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ جب رفتار دو میل فی گھنٹہ ہو تو مزاحمت فی گھنٹہ

$$(۱۵ + \frac{7}{8}) \text{ پونڈ وزن}$$

۱۳۔ ایک اسطوانہ کی شکل کے کاگ کو جس کا طول ۱ ہے اور نصف قطر ہے ایک بوتل کی گردن میں سے بتدریج نکالا جا رہا ہے۔ اگر بوتل اور کاگ کے درمیان حصہ کے درمیان عمادی دباؤ فی اکائی رقبہ کسی لمحہ میں مستقل رہے اور ق کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس کو نکالنے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ  $\frac{1}{2} \pi r^2 C$  کے مساوی ہے جہاں  $r$  گردن کی قدر ہے۔

۱۴۔ ایک وزن و کو ایک کھردرے مخروط کی سطح پر کھینچا جا رہا ہے۔ مخروط کا ارتفاع  $h$  اور راسی زاویہ  $\alpha$  ہے وزن کا افقی خط میلان  $\alpha$  نظم کو ایک ہی زاویہ  $\beta$  پر قطع کرتا ہے اگر گردن کی قدر  $m$  ہو تو ثابت کرو کہ جب جسم مخروط کے راس پر پہنچے گا تو کل کام وہ  $\frac{1}{2} m h \sin \alpha$  کے مساوی ہوگا۔

$$[ \text{کام} = W \times h + \frac{1}{2} m h \sin \alpha ] \quad \text{جہاں } m = \text{وجہ}$$

(۸۶)

۱۵۔ ایک ذرہ جس کا وزن وہے کھرورے نصف کردی پیالہ کی تہ میں پڑا ہے جو اس پر سب سے نیچے نقطہ پر ثابت ہے۔ ذرہ کے ساتھ ایک رسی بندھی ہے جو پیالہ کے کنارہ پر سے گزرتی ہے اور ذرہ کو ایک انتصابی مستوی میں جو پیالہ کے محور میں سے گزرتا ہے رسی کے ذریعہ آہستہ آہستہ اوپر کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ ذرہ کو کنارہ تک کھینچنے میں

$$[1 + \frac{\pi}{4} \text{ جب } 2 \text{ صد لک } + \frac{\pi}{4} \text{ مس صد}]$$

کام کرنا پڑتا ہے جہاں پیالہ کا نصف قطر اسے اور رگو کا زاویہ صد ہے  
[اگر پیالہ کا نصف قطر اسے جو جیکہ ذرہ میں سے گزرنے والا نصف قطر افق کے ساتھ زاویہ ط بناے تو رسی کے عمود اور تحلیل کرنے سے

$$س = \text{وجہ صد جب } \frac{\pi}{4} \text{ قط } (\frac{\pi}{4} - \text{صد})$$

اس لئے ذرہ کو اوپر کھینچنے میں رگو کے خلاف جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} س (-\text{افرط}) = \text{واجب صد} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{جب } \frac{\pi}{4} \text{ قط } (\frac{\pi}{4} - \text{صد}) \text{ فرط}$$

$$= \text{واجب صد} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{جب } (\text{ذ} + \text{صد}) \text{ قط } \text{ذ} = 2 \text{ واجب صد} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{جب } \text{صد} \text{ صد} \text{ جم صد مس صد} \text{ وغیرہ وغیرہ}$$

نیز وزن کے خلاف جو کام ہوا وہ = [

۱۶۔ ایک متجانس مجسم مخروط کا ارتفاع ھ، نصف قطر ر اور کثافت اصنافی ک ہے اس کو ایک انتصابی اسطوانہ کے اندر جس کا نصف قطر ر ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا راس اوپر کی طرف ہے۔ اسطوانہ کے اندر ارتفاع ھ تک بانی بھرا گیا ہے یعنی مخروط عین دُبا ہوا ہے۔ بتاؤ کہ مخروط کو بانی کے عین باہر نکالنے کے لئے

$$\frac{\pi}{4} \text{ و } (1 - \frac{\pi}{4})$$

کام کرنا پڑتا ہے جہاں مخروط کا وزن وہ ہے اور ک ایک سے بڑا ہے۔  
 ۱۰۰۔ موہوم کام۔ جب ایک جسم قوتوں کے ایک نظام کے زیر عمل ساکن ہو اور  
 اور ہم فرض کریں کہ جسم میں خفیف سا ہٹاؤ واقع ہوتا ہے جو ان ہندسی شرائط کے موافق ہے  
 جن کے تحت قوتوں کے نظام کا وجود ہے اور اگر جسم کا کوئی نقطہ ق اس خفیفالی ہٹاؤ  
 کے بعد قی پر چلا جائے تو ق کو ق کی موہوم رفتار یا ہٹاؤ کہتے ہیں۔ لفظ موہوم  
 کا استعمال اس امر واقع کو ظاہر کرنے کے لئے کیا گیا ہے کہ ہٹاؤ محض خیالی ہے  
 اور فی الحقیقت وقوع پذیر نہیں ہوتا۔

اگر ایک قوت ح نقطہ ق پر عمل کرے اور اگر ق ن ، ق سے ح کی سمت  
 پر غود کھینچا جائے تو حاصل ضرب ح  $\times$  ق ن کو قوت ح کا موہوم کام یا موہوم معیار اثر  
 کہتے ہیں۔

دفعہ ۸۶ کی طرح یہ کام مثبت ہوگا اگر ق ن کی وہی سمت ہو یا ح کی ہے اور  
 منفی ہوگا اگر ق ن کی سمت ح کی سمت کے مخالف ہو۔

۱۰۱۔ موہوم کام کا اصول اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ اگر ایک جسم پر عمل کرنے والی قوتوں  
 کا نظام تعادل میں ہو اور جسم میں خفیف سا ہٹاؤ واقع ہو جس سے نظام کی ہندسی شرائط  
 میں فرق آئے تو موہوم کاموں کا جبری مجموعہ صفر ہوگا اور برعکس اس کے اگر جبری مجموعہ صفر ہو تو  
 قوتیں تعادل میں ہوں گی۔ دوسرے الفاظ میں اگر ہر ایک قوت ق کا موہوم ہٹاؤ اس کے  
 خط عمل کی سمت میں صف ق ہو تو چھوٹی مقداروں کے پہلے رتبے تک

$$\sum (ق \times صف ق) = 0 \text{ نیز برعکس اس کے اگر}$$

$$\sum (ق \times صف ق) \text{ صفر ہو تو قوتیں تعادل میں ہوں گی۔}$$

اگر جسم ایک واحد ذرہ ہو تو دفعہ ۹۶ کی رد سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اگر تمام  
 قوتوں کے موہوم کاموں کا مجموعہ جو ایک ذرہ پر عمل کریں صفر ہو تو حاصل کام موہوم  
 کام بھی صفر ہوتا ہے، اس لئے حاصل قوت معدوم ہو جاتی ہے اور ذرہ تعادل  
 میں رہتا ہے۔

اگلے دفعہ میں ہم سطحی قوتوں کے لئے اس مسئلہ کا ثبوت درج کیا جائیگا تین ابعاد

میں عمل کرنے والی قوتوں کے لئے اس مسئلہ کا ثبوت دفعہ ۷۵ میں دیا جائیگا۔

۱۰۲۔ مہم جو کام کے اصول کا ثبوت جب قوتیں ایک سطح مستوی میں

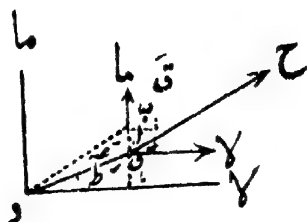
عمل کریں۔

ایک سطح مستوی میں دو خط کھینچو جو ایک دوسرے پر علی التواضع ہوں۔ فرض کرو کہ جسم میں خفیف سا جثاؤ وقوع پذیر ہوتا ہے۔ یہ آسانی سے اس طرح ہو سکتا ہے کہ پہلے جسم کو نقطہ و کے گرد ایک چھوٹے زاویہ عنق میں سے گھمایا جائے اور پھر اس کی محوروں کے متوازی مناسب فاصلوں اور ب میں سے نقل مقام کیا جائے۔ (مثال کے طور پر طالب علم ایک کتاب کو جو میز پر پڑی ہو حرکت دے کر کسی دوسرے آئینہ آوی محل میں لاسکتا ہے اس طرح کہ دوران حرکت میں کتاب میز سے لمس کرتی رہے۔) اگر

فرض کرو کہ کسی قوت ح کا نقطہ عمل ق ہے جس کے محدود بلحاظ مبداء و کے  
لا اور ما ہیں نیز نقطہ ق کے قطبی محدود اور طہ ہیں جہاں وق = ر اور لاوق = طہ  
جب تعقیف ہٹاؤ واقع ہو چکے تو فرض کرو کہ ق کے لئے نئے محل ق کے

مخدور حم (ط + عه) + د اور ر جب (ط + عه) + ب

بیس یعنی رجب طہ - ع رجب طہ + ۱ اور رجب طہ + ع رجب طہ + ب  
جہاں چھوٹے زاویہ ع کے مربعوں کو نظر انداز کیا گیا ہے۔



اس لئے ق کے محدودوں میں تغیرات ہونگے

۱۔ عہ ر جب طہ اور ب + عہ ر جم طہ

یعنی ۱۔ عہ ما اور ب + عہ لا

اس لئے اگر ح کے اجزائے ترکیبی لا اور ما ہوں تو ح کا موہوم کام جو لا اور ما کے موہوم کاموں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے

$$= لا (۱ - عہ ما) + ما (ب + عہ لا)$$

$$= لا + ب ما + عہ (مالا - لا ما)$$

اسی طرح نظام کی کسی اور قوت کا موہوم کام معلوم ہو سکتا ہے۔ ۱، ب اور عہ ہر قوت کے لئے وہی ہونگے۔

اس لئے موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہوگا اگر

$$۱ \leq (لا) + ب \leq (ما) + عہ \leq (مالا - لا ما) \text{ صفر ہو۔}$$

اگر قوتیں تعادل میں ہوں تو  $\leq (لا)$  اور  $\leq (ما)$  دفعہ ۴۰ کی رو سے جدا گانہ صفر ہیں۔

نیز  $\leq (مالا - لا ما) =$  و کے گرد جملہ قوتوں کے معیار اثریوں کا مجموعہ۔

اور یہ مجموعہ دفعہ ۴۰ کی رو سے صفر ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر قوتیں تعادل میں ہوں تو ان کے موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔

۱۰۳۔ برعکس اس کے اگر ہر بٹاؤ کے لئے موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہو تو قوتیں تعادل میں ہونگی۔

دفعہ ما قبل کی ترقیم کے مطابق موہوم کاموں کا مجموعہ صفر ہے۔

$$۱ \leq (لا) + ب \leq (ما) + عہ \leq (مالا - لا ما) \dots\dots\dots (۱)$$

اور اس کے متعلق معلوم ہے کہ یہ سب ہٹاؤں کے لئے صفر ہے۔  
ایک ایسا ہٹاؤ منتخب کرو جس سے جسم صرف محور لا کے متوازی فاصلہ  
اے میں سے حرکت کرے، اس ہٹاؤ کے لئے ب اور ب دو نون صفر ہوں گے  
اور اس صورت میں (۱) سے حاصل ہوگا

$$\Sigma (L) = 0$$

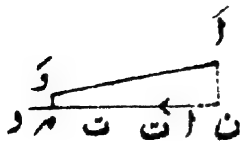
یعنی محور ولا کے متوازی سب اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہے۔  
اسی طرح سے محور ما کے متوازی ہٹاؤ لینے سے و ما کے متوازی بھی  
سب اجزائے ترکیبی کا مجموعہ صفر ہوگا۔  
اسی طرح فرض کرو کہ ہٹاؤ بغیر نقل مقام کے صرف مبداء کے گرد محض  
گردش سے پیدا ہوا ہے۔ اس صورت میں و اور ب دو نون معدوم ہو جاتے ہیں  
اور (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\Sigma (M - L) = 0$$

یعنی و کے گرد قوتوں کے معیار انزوں کا مجموعہ صفر ہے۔  
دفعہ ۶۰ میں تعادل کی جو شرطیں بیان کی گئی ہیں وہ پوری ہوتی ہیں۔  
اس لئے قوتوں کا نظام تعادل میں ہے۔

(۸۹) ۱۰۴۔ قوتیں جو موجہوم کام کی مساوات بنانے میں نظر انداز ہو سکتی ہیں۔

(۱) نامتناہی پذیر رسیوں کے تناؤ  
فرض کرو کہ و لا ایک  
نامتناہی پذیر رسی ہے جس کا تناؤ  
ست ہے۔ فرض کرو کہ بعد  
ہٹاؤ اس کا محل و لا ہے۔  
و لا پر و ن و م عمود





کھینچو۔ یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ رتبہ اول کی صغیر مقداروں تک  $وہ = ا$  اور دو کو مبدا اور  $و$  کو لاکا محور مانو اور فرض کرو کہ نقطہ  $(لا، با، ی)$  اور  $ا$  نقطہ

$$(ا + لا، با، ی) \text{ ہے جہاں } و = ا$$

چونکہ  $و = ا$  کیونکہ رسی کھینچ نہیں سکتی

$$\therefore (ا + لا - لا، با - با، ی - ی) = ا$$

$$\therefore ا (لا - لا) + چھوٹی مقداروں کے مہلے =$$

$$\therefore لا = لا، پہلے رتبہ کی چھوٹی مقدار تک$$

یعنی  $وہ = ا$

اس لئے تناؤ کا موجہوم کام  $= ت \times وہ + ت (-ا) =$

اسی طرح نظام کے کسی دو ذروں  $ن$  اور  $ق$  کو ملائے والے خط میں عمل کرنے والی قوت کی بھی یہی کیفیت ہے بشرطیکہ ان ذروں کا درمیانی فاصلہ نہ بے۔

(۲) جسم جن سطحوں کو مس کرتا ہے ان کا تعامل

اگر سطح چمکی ہو تو تعامل نقطہ تماس  $ن$  پر سطح کے عماد کی سمت میں عمل کریگا

اس لئے اگر  $ن$  اپنے قریب کے نقطہ  $ن$  پر چلا جائے تو  $ن$  قوت

کی سمت پر علی الاقواء ہوگا۔ اس لئے اس قوت کا موجہوم کام صفر ہوگا۔

اگر سطح کھردری ہو تو رگڑگ کا کام یعنی  $گ (-ن) : سادات$

میں داخل ہونا چاہئے کیونکہ یہ بالعموم صفر نہیں ہوگا۔

(۳) اگر جسم کسی ثابت سطح پر بغیر پھسلنے کے لڑھکے تو کسی نقطہ تماس  $ن$  پر کا تعامل۔

ظاہر ہے کہ جسم کا نقطہ تماس  $ن$  اُس آن کے لئے ساکن ہے اور اس لئے اس کا ہٹاؤ

صفر ہے۔ اس وقت  $ن$  پر کا عمادی تعامل اور  $ن$  پر کی رگڑ دونوں کے ہٹاؤ صفر ہوئے ہیں۔

(۴) زیر بحث مادی نظام کے کسی دو جسموں کے درمیان تعامل۔ (۹۰)

ظاہر ہے کہ یہ تعامل دونوں جسموں پر مساوی اور متقابل ہوتے ہیں۔ اسلئے جب ہم دونوں جسموں کے مجموعی موجوم کام کی مساوات لکھتے ہیں تو ایسے تعامل کا موجوم کام مساوات میں دوم تہ مختلف علامتوں کے ساتھ داخل ہوتا ہے اور اس لئے معدوم ہو جاتا ہے۔ مثلاً اگر ہم پیوست کی ہوئی سلاخوں کے کام پر غور کر رہے ہوں تو جوڑوں پر کے تعامل نظر انداز کر دئے جاسکتے ہیں جیسا کہ دفعہ ۱۰۶ میں کیا گیا ہے۔

۱۰۵۔ اگر ہم چاہیں تو ایک ایسا ہٹاؤ منتخب کر سکتے ہیں جو نظام کی بند سی شرائط کو پورا نہ کرے اور ایسا ہٹاؤ منتخب کرنا اکثر اوقات زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے لیکن اگر ہم ایسا کریں تو متناظر قوت کو بھی مساوات میں شامل کرنا لازم ہوگا۔

مثلاً اگر ہم ایسا ہٹاؤ منتخب کریں جس سے رسی کے طول میں تبدیلی پیدا ہو جیسا کہ اگلی دفعہ کی مشق ۲ میں کیا گیا ہے تو ہمیں مساوات میں رقم تبادلاً رسی کے طول کا اضافہ بھی شامل کرنا پڑیگا۔

۱۰۶۔ مشق ۱۔ مساوی طولوں کی چھ سلاخوں اب، ب، ج، د، ع، ف اور ف ا کو ان کے سروں پر بلا تکلف جوڑ کر ایک منظم سدس بنایا گیا ہے سلاخ اب کو افقی محل میں رکھا گیا ہے اور اب اور د ع کے وسطی نقطوں کو رسی کے ذریعے ملایا گیا ہے۔ اگر ہر ایک سلاخ کا وزن و ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا تبادلاً ۳ و ہوگا۔

فرض کرو کہ سلاخوں کے وسطی نقطے ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ ہیں۔ چونکہ

تساؤل سے ب ج اور

ج دست انتصابی کے

ساتھ مساوی المیلان

ہیں اس لئے ظاہر ہے

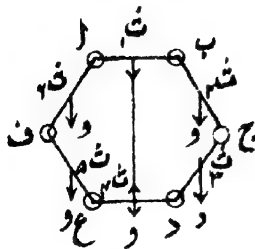
کہ نقاط ج، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲

کی گہرائیاں ا ب

سے میچے ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ کی

گہرائی کا بالترتیب

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ گنا ہیں۔



فرض کرو کہ نظام انتصابی سطح مستوی میں ایک ایسا ہٹاؤ اختیار کرتا ہے کہ د اور ع  
ہمیشہ ب اور ا میں سے گزرنے والے انتصابی نقطوں میں رہتے ہیں اور د ع ہمیشہ  
متوازی الافق رہتا ہے۔ اگر تہ بقدر انتصابی فاصلہ لا کے نیچے اترے تو تہ بقدر  
فاصلہ ۳ لا کے نیچے اترے گا۔ اور د تہ اور د تہ بالترتیب بقدر ۳ لا اور لا فاصلوں کے  
نیچے اترینگے۔

دزنوں کے موبوم کاموں کا مجموعہ

$$= د \times لا + د \times ۳ لا + د \times لا + د \times لا = ۱۲ \times لا$$

اگر رسی کا تناؤ ت ہو تو اس کا موبوم کام

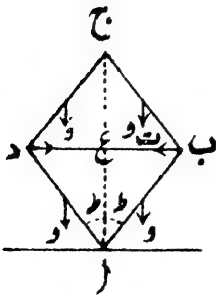
$$= ت \times (۴ - لا)$$

کیونکہ تہ کا ہٹاؤ اُس سمت کے متقابل ہے جس میں تناؤات عمل کرتا ہے اس لئے  
اس کا موبوم کام منفی ہے۔ اب موبوم کام کے اصول سے

$$۱۲ \times لا + ت \times (۴ - لا) = ۰ \quad \text{یعنی ت} = ۳ \times د$$

مشق ۲۔۔ چار مساوی یکساں سلاخوں کو جوڑنے سے ایک معین اب ج د بنایا گیا  
ہے جس کو ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ ا ج انتصابی ہے اور کو نہ  
ا ایک افقی سطح پر رکھا ہوا ہے ایک ہلکی رسی ب د کے ذریعے معین کا زاویہ ب ا ج  
ط کے مساوی رکھا گیا ہے،

(۹۹)



ثابت کرو کہ اس رسی کا تناؤ ۲ دس ط  
ہے جہاں و ایک سلاخ کا وزن ہے۔

فرض کرو کہ ا ب، ا د کے  
وسطی نقطوں کی بلندی افقی سطح ا کے  
اوپر لا ہے۔

نیز فرض کرو کہ ب ع = ع د، ا  
جہاں ع معین کا وسطی نقطہ ہے۔

اب معین کے اس ہٹاؤ پر غور کرو

جس میں ط، ط + مفت اور اس لئے لا، لا + مفت لا اور ما، ما + مفت ما ہو جاتا ہے

تب چنگ ب د کا تناؤت ہے، اس لئے موسم کام کی مساوات ہے

$$۲ \text{ ت } (- \text{مف } \lambda) + \text{د } (- \text{مف } \lambda) + \text{و } (- \text{مف } \lambda) + \text{و } (- \text{مف } \lambda) = ۰$$

$$\text{ت} = ۲ - \text{مف } \lambda$$

اب اگر ڈب = ۲ و تول = ۱ جم طہ اور ما = ۲ جم طہ

$$\text{مف } \lambda = \frac{۱ - \text{جم طہ مف طہ}}{۲ \text{ جم طہ مف طہ}} = \frac{۱ - ۱}{۲} = ۰$$

ت = ۲ و مس طہ

اگر پر کے تعامل کو چھوڑ دیا گیا ہے کیونکہ اس میں کوئی ہٹاؤ واقع نہیں ہوتا۔ ب پر کے تعامل کو بھی چھوڑ دیا گیا ہے اور وہ اس لئے کہ مختلف علامتوں کے ساتھ دو دفعہ آتا ہے، ایک دفعہ سلاخ ڈب کے لئے اور دوسری دفعہ سلاخ ب ج کے لئے

مشق ۳۔ روبرول (Roberval) کی ترازو۔ یہ ترازو خط تولنے میں عام طور پر استعمال

ہوتی ہے۔ اس میں چار سلاخیں ڈب، ب، ع، د اور د لہوتی ہیں جن کو کوئوں ڈب

د ع پر اس طرح

ملا یا ہوتا ہے کہ

ان سے ایک توازی

الاضلاع بنتا ہے

نیز ڈب اور د ع

کے وسطی نقطے ج

اور ف کو ایک انصافی

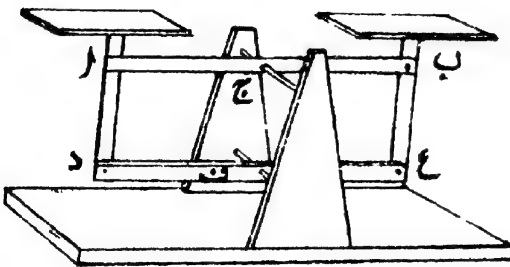
خط میں ثابت

نقطوں کو وصل

کرو یا جاتا ہے

سلاخیں ڈب

اور د ع ب ج ا د ف کے گرد آزادانہ گھوم سکتی ہیں۔



سلاخوں اور بے ع کے ساتھ مساوی پلڑے لگے ہوتے ہیں۔ ان میں سے ایک پر وہ  
شے رکھی جاتی ہے جس کو تو نا مقصود ہوتا ہے اور دوسرے پر باٹ ق رکھے جاتے ہیں۔  
ہم موہوم کام کے اصول سے یہ ثابت کریں گے کہ اوزان و اوزن کو خواہ پلڑوں کے  
کسی حصہ پر رکھا جائے اس سے کچھ فرق نہیں پڑتا۔

(۹۲)

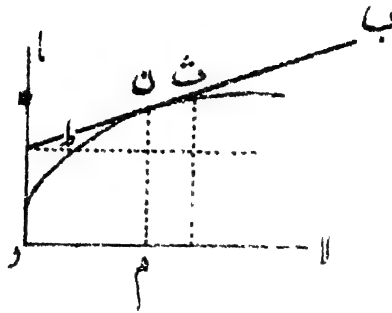
چونکہ ج ب ع ف اور ج ا د ف متوازی الاضلاع ہیں اس لئے ظاہر ہے  
کہ ترازو خواہ کسی زاویہ میں سے گھومے سلاخیں ب ع اور ا د ہمیشہ ج ف کے  
متوازی یعنی انتصابی رہیں گی۔

اگر سلاخ ا ب کو کسی چھوٹے زاویہ میں سے گھمایا جائے تو نقطہ ب اتنا ہی  
اوپر اٹھتا ہے جتنا کہ نقطہ ا نیچے گرتا ہے۔ اس لئے سلاخ ب ع اتنی ہی اوپر اٹھتی  
ہے جتنی کہ ا د نیچے اُترتی ہے اور دائیں طرف کا پلڑا اتنا ہی اوپر چڑھتا ہے جتنا بائیں  
طرف کا نیچے اُترتا ہے اس لئے ایسی صورت میں صرف سلاخ ب ع اور اس کے پلڑے  
کے وزن کا موہوم کام سلاخ کے پلڑے اور اس کے وزنوں کے موہوم کام کے مساوی  
اور مخالف العلامت ہوتا ہے۔ موہوم کام کی مساوات میں ایک دوسرے کو خارج  
کر دیتے ہیں۔

نیز اگر دائیں طرف کے پلڑے کا بٹاؤ اوپر کی طرف پ ہو تو بائیں طرف کے پلڑے  
کا بٹاؤ نیچے کی طرف پ ہو گا اس لئے موہوم کام کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے  
$$ق \times پ + و (- پ) = -$$

اس لئے اگر یہ آدمی محل میں بھی متبادل ہو جائے تو ق اور و مساوی  
ہونگے اور یہ شرط پلڑوں کے اندر باٹوں اور شے کے مقام پر کسی طرح بھی منحصر نہیں ہے  
اس لئے باٹ اور شے پلڑوں میں کسی مقام پر بھی رکھے جاسکتے ہیں۔ اس سے یہ نتیجہ  
بھی نکلتا ہے کہ پلڑوں کا ایک ہی شکل کا ہونا ضروری نہیں ہے اور نہ ہی ان کا آلہ  
کے لحاظ سے متشاکل ہونا ضروری ہے بشرطیکہ ان کے وزن مساوی رہیں۔

مشق ۴۔ ایک یکساں شہتیر ماسی طور پر ایک چکنے انتصابی مغنی پر پڑا ہے اور اس کا  
ایک سر ایک چکنی انتصابی دیوار کے ساتھ لگا ہوا ہے۔ اگر شہتیر ہر محل کے لئے متبادل  
رہے تو مغنی کی مساوات معلوم کرو۔



دیوار کے محور مالو اور اس پر  
کے کسی نقطہ کو مبداء  
فرض کرو۔

اگر شہتیر کے مرکز  
ثقل کی اونچائی و لا کے  
ادیر مآ ہو تو موجہوم کام کی  
مساوات ہوگی

$$و \times \text{مف مآ} =$$

کیونکہ دیگر قوتیں یعنی  
دیوار اور تختی کے تعامل

دفعہ ۱۰ کی رد سے موجہوم کام کی مساوات میں نہیں آتے۔

$$\therefore \text{مآ} = \text{مستقل} = \text{ھ}$$

اس لئے نقطہ ثقل کے محدد ہیں (ا حجم ط، ھ) جہاں ۲ و سلاخ کا طول ہے اور ط

اس کا زاویہ میلان ہے سمت افقی کے ساتھ۔

اس لئے ا ثقل کی مساوات ہے

$$\text{ما} - \text{ھ} = \text{مس ط (لا - ا حجم ط)} = \text{امس ط} - \text{ا جب ط}$$

اس کے لفاف کے لئے ط کے محاط سے تفرق کرنا چاہیے

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے لا = ا حجم ط اور ما - ھ = - ا جب ط

$$\therefore \frac{2}{3} \text{لا} = \frac{2}{3} \text{ا (ما - ھ)} + \frac{2}{3} \text{ا جب ط}$$

یعنی مطلوبہ منحنی چار قرنی درند ویر کا ایک حصہ ہے۔

## مثالیں

۱۔ چار مساوی یکساں وزنی سلاخوں کو جوڑنے سے ایک معین بنایا گیا ہے جس کو ایک

کونے سے آزادانہ لٹکایا گیا ہے اور ہر کی دونوں سلاخوں کے وسطی نقطوں کو ایک ہلکی سلاخ سے ملایا گیا ہے تاکہ معین بند نہ ہو سکے ثابت کر دو کہ ملکی سلاخ کا تناؤ  $m$  و مس  $e$  ہے جہاں  $w$  ہر ایک سلاخ کا وزن ہے اور  $m$  عدد سپار۔  $e$  کے نقطہ پر معین کا زاویہ ہے۔

۲۔ چار مساوی سلاخوں کو جوڑنے سے ایک معین بنایا گیا ہے جس کا چھوٹا ترین زاویہ  $\theta$  طول کی ایک رسی کا بنا ہوا ہے۔ ہر ایک سلاخ کا وزن  $w$  اور طول  $l$  ہے۔ اگر ایک سلاخ کو افقی محل میں رکھا جائے تو ثابت کر دو کہ رسی کا تناؤ ہے

$$w(2 - \frac{1}{2})$$

بہا  $m$  بک۔

۳۔ ایک متعظم سدس  $ABCDEF$  چار مساوی سلاخوں کو آزادانہ جوڑنے سے بنایا گیا ہے۔ سدس ایک انتہائی سطح مستوی میں  $ABCDEF$  ساکن ہے کہ اس کا ضلع  $AB$  افقی میز سے مس کرتا ہے اگرچہ اور  $F$  ایک ہلکی رسی کے ذریعہ پیوست ہوں تو ثابت کر دو کہ رسی کا تناؤ  $w$  ہوگا جہاں  $w$  ہر ایک سلاخ کا وزن ہے۔

۴۔ چار مساوی یکساں سلاخوں کو جوڑنے سے ایک مربع بنایا گیا ہے ہر ایک سلاخ کا وزن  $w$  ہے مربع کو ایک کونے سے لٹکایا گیا ہے نیچے کے تینوں کونوں میں سے ہر ایک پر وزن  $w$  لٹکایا گیا ہے افقی وتر پر ایک سلاخ لگانے سے اسے مربع شکل میں قائم رکھا گیا ہے۔ ثابت کر دو کہ سلاخ کا تناؤ  $w$  ہے۔

۵۔  $ABCD$  کی چار مساوی سلاخوں کو پیوست کر کے ایک کونے سے لٹکایا گیا ہے اور اس کونے کو مقابل کے کونے سے ایک لچکدار رسی کے ذریعہ پیوست کیا گیا ہے۔ اگر سلاخیں ایک مربع کی شکل میں لٹکیں اور رسی کی لچک کی قدر سلاخ کے وزن کے مساوی ہو تو رسی کا طول بغیر کمپنڈ کے  $\frac{2}{3}l$  ہے

۶۔ چار سلاخوں کو جوڑنے سے ایک متوازی الاضلاع بنایا گیا ہے۔ مقابل کے جوڑوں کو رسیوں سے ملایا گیا ہے جو متوازی الاضلاع کے وتر بناتی ہیں۔ اس نظام کو ایک افقی میز پر رکھا گیا ہے، ثابت کر دو کہ ان کے تناؤ سلاخوں کے طولوں کی نسبت میں ہیں۔

۷۔ چار مساوی وزنی شہپتیروں کے سروں کو جوڑنے سے ایک سدس بنایا گیا ہے اور

مسدس انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ ایک شہتیر افقی سطح مستوی پر ساکن ہے اور دوسرے دو مائل شہتیر افقی کے ساتھ زاویہ طے بناتے ہیں اور ان کے وسطی نقطوں کو ایک ہلکی رسی کے ذریعے لایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس کا تناؤ ۶ دم ط ہے جہاں و ہر ایک شہتیر کا وزن ہے۔

۸۔ ایک منظم مسدس چھ مساوی وزنی سلاخوں کے سروں کو جوڑنے سے بنایا گیا ہے اور اس کے دو مقابل کے راسوں کو ایک افقی رسی سے لایا گیا ہے۔ مسدس کی ایک سلاخ ایک افقی سطح مستوی سے منسلک کرتی ہے۔ مقابل کی سلاخ کے وسطی نقطہ پر ایک وزن د رکھا گیا ہے۔ اگر ہر ایک سلاخ کا وزن و ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ  $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$  دم ط ہوگا۔

۹۔ چھ مساوی وزنی سلاخوں کے سروں کو جوڑنے سے ایک منظم مسدس (ج ج ح ع ف بنایا گیا ہے۔ اس کو نقطہ ا سے لٹکایا گیا ہے اور دو ہلکی سلاخوں ب و اور ج ع سے اس شکل کو قائم رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان سلاخوں کے دباؤ  $\frac{3}{2}$  دم ط و اور  $\frac{3}{2}$  دم ط ہیں جہاں و ہر ایک سلاخ کا وزن ہے۔

(پہلے نظام کو مہوہم ہٹاؤ اس طرح دو کہ ا ب اور ا و ثابت رہیں اور ب ج اور ح ع سمت انتصابی کے ساتھ مساوی المیلان ہوں۔ اس طرح ج ع کا تناؤ معلوم کرو تب نظام کو اس طرح ہٹاؤ کہ ب ج اور ح ع دونوں انتصابی رہیں اور باقی سلاخیں بھی سمت انتصابی کے ساتھ مساوی المیلان ہوں)۔

۱۰۔ ایک چپٹا نصف کروی تختہ ایک چکنی افقی سطح پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کی سطح انتصابی ہے اور اس کا منحنی کنارہ اوپر کی طرف ہے۔ اس کو دو معلوم نقطوں پر دو ایسے شہتیروں کے ذریعے دبا گیا ہے جو چکنی انتصابی لمبوں کے اندر پھسلتے ہیں۔ اگر تختہ تقاوی میں ہو تو شہتیروں کے وزنوں کی نسبت معلوم کرو۔

۱۱۔ دو مساوی یکساں سلاخیں ا ب اور ا ج ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول ۲ ط ہے یہ سلاخیں ا پر آزادانہ طور پر جمی ہوئی ہیں اور د نصف قطر کے ایک چکنے انتصابی دائرہ پر ساکن ہیں۔ اگر ان کا درمیانی زاویہ ۲ ط ہو تو

ب ج ۳ ط = ا ج ۲ ط



[جو قوتیں موہوم کام کی مسادات میں آتی ہیں وہ صرف اوزان و ہیں اور ہر ایک سلاخ کے مرکز ثقل کی بلندی دائرہ کے مرکز کے اوپر  $\frac{1}{2}$  جب ط - ب جم ط ہے۔

∴ ۲ و مت {  $\frac{1}{2}$  جب ط - ب جم ط } = ۰ یعنی -  $\frac{1}{2}$  جب ط جم ط مت ط + ب جب ط مت ط - وغیرہ وغیرہ۔

۱۲۔ ایک منشور جس کی عمودی تراشش ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے دو ستویوں میں جو افق کے ساتھ عمود اور بے زاوے بناتے ہیں اس طرح ساکن ہے کہ اس کے دو کنارے ان ستویوں سے مس کرتے ہیں۔ اگر مس کرنے والے کناروں میں سے گزرنے والا رخ سمت انتصابی کے ساتھ دائرہ بیطلہ بنائے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{۲ \text{ جب عم جب ب + جب (ع + ب)}}{۴ \text{ جب (ع + ب)}}$$

۱۳۔ مساوی وزنوں کے دو چھوٹے چکنے حلقے ایک ثابت ناقصی تار پر جس کا محور اعظم انتصابی ہے پھسلتے ہیں۔ وہ ایک رسی سے مربوط ہیں جو اوپر کے ماسک پر ایک چھوٹی چکنی کھونٹی پر سے گزرتی ہے۔ ثابت کرو کہ وزن تعادل میں رہیں گے خواہ ان کو کہیں رکھا جائے۔

۱۴۔ چار مساوی یکساں استوار سلاخیں ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن وہ ہے انکے سروں کو جوڑنے سے ایک معین بنایا گیا ہے جسے ایک کونے پر سے لٹکا کر بے وزن سلاخوں کے ذریعے جو در بناتی ہیں تقریباً مربع کی شکل میں رکھا گیا ہے۔ یہ فرض کر کے کہ بہت چھوٹے پھیلاؤ یا پچکاؤ جو دوتروں میں پیدا ہوتے ہیں دتروں کی سلاخوں کے تناؤں یا دباؤں کے مناسب ہیں ثابت کرو کہ ان قوتوں میں سے ہر ایک و کے مساوی ہے۔

۱۵۔ مساوی وزن کے دو چھوٹے حلقے ایک مکانی کی شکل کے چکنے تار پر پھسلتے ہیں جس کا محور انتصابی ہے اور اس اوپر کی طرف ہے اور ایک دوسرے کو ایک ایسی قوت کے ساتھ کھینچتے ہیں جو اصلے کے متناسب ہے اگر وہ تار پر کسی متشاکل محل میں ساکن رہ سکیں تو ثابت کرو کہ وہ ہر متشاکل محل میں ساکن رہیں گے۔

۱۶۔ ایک قطع ناقص کا محور اعظم انتصابی ہے اور اس کے ماسک پر ایک چکنے حلقہ میں

سے ایک چکنی سلاح گزرتی ہے۔ سلاح کا دوسرا سرا مسکہ مذکور سے بعید ترین ربع پر سکون کی حالت میں ٹپکا ہوا ہے اس کے متبادل کا محل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اس کا طول کم از کم  $\frac{53}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{1 + 8 \times 2}$  ہوگا جہاں ۱۲ محور اعظم کا طول ہے اور ز خروج مرکز ہے۔

۱۷۔ ایک شہتیر کا ایک سرا ایک چکنی انتصابی دیوار پر اور دوسرا سرا ایک انتصابی سطح مستوی میں ایک ایسے چکنے منحنی پر جو دیوار پر عمود دار ہے ساکن ہے اگر شہتیر سب محلوں میں ساکن رہے تو ثابت کرو کہ منحنی قطع ناقص ہے جس کا محور اعظم اس افقی خط مستقیم پر جو شہتیر کا مرکز مرسم کرتا ہے واقع ہے۔

۱۸۔ ایک وزنی سلاح (سب) جس کا طول ۲ ل ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سرا ایک ثابت چکنی میخ ج پر ہے اور اس کا سرا ب ایک چکنے منحنی پر ہے اگر سلاح سب محلوں میں ساکن رہے تو ثابت کرو کہ منحنی مخروط نما ہے جس کی قطبی مساوات بلحاظ مبداء ج کے ہے  $r = l + \frac{1}{\text{جب ط}}$

۱۹۔ ایک چھوٹا وزنی حلقہ ن ایک چکنے تار پر پھسلتا ہے جس کی سطح مستوی انتصابی ہے۔ یہ حلقہ ایک رسی کے ذریعہ جو منحنی کی سطح مستوی میں ایک چھوٹی چرخہ پر سے گزرتی ہے ایک اور وزن و کے ساتھ مربوط ہے جو آزادانہ لٹک رہا ہے۔ اگر حلقہ تار پر کسی مقام میں متبادل ہو تو ثابت کرو کہ تار کی شکل ایک مخروطی ہوگی جس کا ماسکہ چرخہ پر ہوگا۔

[اگر متبادل کے محل میں  $m = n$  اور ریست انتصابی کے ساتھ داویہ طہ بنائے تو موہوم کام کی مساوات ہوگی

$$n \text{ مف (رجم ط)} + \text{مف (ل - ر)} = 0$$

$$n \text{ رجم ط} + \text{د (ل - ر)} = \text{مستقل وغیرہ}$$

۲۰۔ ل ایک وزنی شہتیر ہے جو ل برابر ایک افقی محور کے گرد گھوم سکتا ہے۔ ایک رسی جو ب کے ساتھ بندھی ہے ل کے انتصاباً اوپر ج پر کی ایک چکنی چرخہ کے اوپر

سے گزرتی ہے۔ رسی کا دوسرا سرا ایک معلومہ وزن ن کے ساتھ بندھا ہے جو ایک  
دے ہوئے چکنے مخنی پر حرکت کرتا ہے اگر ہر محل میں تعادل رہے تو مخنی کی مساوات  
معلوم کرو۔

[اگر ل کے نیچے شہتیر کے وسطی نقطہ کی گہرائی لاہو اور اس کا وزن و ہو تو

ن مف (رجم طہ) + و مف لا =۔

یعنی ن رجم طہ + و لا = مستقل

نیز (ل - ر) = ۲ ج + ۳ ق + ۴ ج لا جہاں اب = ۲ ادر ل ج = ج  
ادر ل رسی کا طول ہے۔ لا کو ساقط کرو]

# چھٹا باب

## ترسیمی حل

(۱۹۶)

۱۰۷۔ ایک نقطہ پر عمل کرنے والی متعدد قوتوں کا حاصل قوتوں کے کثیر الاضلاع کے ذریعے ترسیمی طریقے سے بھی معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ (ملاحظہ ہو شکل دفعہ ۴۴) نقطہ جو پر عمل کرنے والی قوتیں جو بلحاظ مقدار اور سمت کثیر الاضلاع ل ا ب ج د ع ف کے اضلاع سے تعبیر ہوتی ہیں متوازن ہیں۔ اس لئے ا ب ا ج د ا ع اور ع ف سے تعبیر ہونے والی قوتوں کا حاصل باقی ماندہ قوت ف ل کے مساوی اور متقابل ہوگا یعنی حاصل مذکور (ف) سے تعبیر ہوگا۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک ذرہ پر عمل کرنے والی قوتوں ف ا ق، م، س، ط کا حاصل اس طرح معلوم ہو سکتا ہے۔ کوئی نقطہ ل ل و اور قوت ف کے متوازی اور متناسب ل ب کھینچو، اسی طرح ق، م، س اور ط کے متوازی اور متناسب ب ج، ج د، د ع اور ع ف کھینچو تب مطلوبہ حاصل بلحاظ مقدار اور سمت کے خط ل ف سے تعبیر ہوگا۔ ظاہر ہے کہ متعدد قوتوں کی صورت میں بھی یہ عمل کیا جاسکتا ہے۔

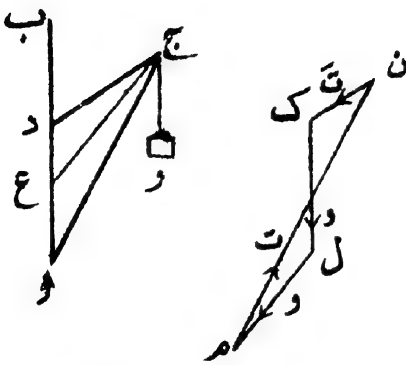
بہت سے سوالات جن کا تحلیل طریقوں سے حل کرنا نہایت مشکل یا محنت طلب ہوتا ہے ترسیمی طریق سے مقابلہ آسانی سے حل ہو سکتے ہیں ایسے سوال انجینیری یا دیگر عملی کام میں کثرت پیش آتے ہیں۔ عام طور پر ان سوالوں کے حل کرنے کے لئے مثلث اور کثیر الاضلاع کے علاوہ کسی چیز کی ضرورت نہیں ہوتی۔

۱۰۸۔ مشق ۱۔ ل ج د ب ایک رسی ہے جس کے سرے دو متوازی الافق



۵۱ پونڈ وزن ہیں۔

مشق ۲۔ حالہ۔ سہار کے ضروری حصے نیچے کی شکل میں دکھائے گئے ہیں، اب ایک انتصابی کھمبا ہے۔ آج ایک شہتیر ہے جس کو جب کہتے ہیں اور جو سرے ا کے گرد گھوم سکتا ہے۔ اس کو لکڑی کی ایک سلاخ یا زنجیر سہار سے لہتی ہے جس کو بندھن کہتے ہیں اور انتصابی کھمبے اب کے نقطہ د سے بندھی ہوتی ہے



ج پر ایک چرخنی ہوتی ہے جس کے اوپر سے ایک زنجیر گزرتی ہے جس کا ایک سر ا وزن و کے ساتھ بندھا ہوتا ہے جسکو اٹھانا منظور ہوتا ہے اور دوسرے

سرے ع پر طاقت لگائی جاتی ہے۔ یہ سر عام طور پر ایک اسطوانہ کے گرد لپٹا ہوتا ہے۔ بندھن ج د بعض صورتوں میں افق کے متوازی ہوتا ہے اور اکثر اوقات زنجیر ج ع کی سمت اس پر منطبق ہوتی ہے۔ اوپر کی صورت میں جب اور بندھن پر کے تعادل ترسیمی طور پر بطریق ذیل معلوم ہو سکتے ہیں۔

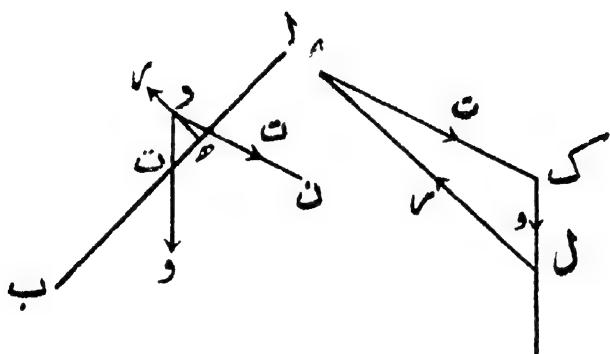
کسی پائندہ کے مطابق د کو بغیر کرنے کے لئے ک ل انتصابی کھینچو، ت ل مرکب ج ع کے متوازی کھینچو اور ک ل کے مساوی ل۔ ہر میں سے د ن آج کے متوازی اور ک ن، و ج کے متوازی کھینچو۔

تب ک ل د ن نقطہ ج کو تعادل میں رکھنے والی قوتوں کا ایک کثیر الاضلاع ہے کیونکہ ہم مان لیتے ہیں کہ زنجیر کا تناؤ چرخنی کے اوپر سے گزرنے میں تبدیل نہیں ہوتا اور اس لئے تناؤ مذکور وزن و کے مساوی ہے۔ اس لئے آج کا د باؤ ت اور ج د کا کچاؤ ت ہو

$$\frac{ت}{د ن} = \frac{ت}{ک} = \frac{و}{ک ل}$$

اس لئے اُسی پیمانہ پر کہ کلِ ودن کو تعمیر کرتا ہے مرن، ت کو اور دن کا ت کو تعمیر کرتا ہے۔

مشق ۳۔ بتاؤ کہ ایک اڈنے والی پتنگ پر حقیقی عمل کرتی ہیں وہ اسے کس طرح تعادل میں رکھتی ہیں اور ثابت کرو کہ پتنگ پر کا عمود، ڈوری اور خط امتصابی کی سمتوں کے اندر واقع ہوگا۔



فرض کرو کہ اہل پتنگ کا وسطی خط ہے اور ب وہ نقطہ ہے جس پر دم لگی ہوئی ہے  
نیز پتنگ کی مستوی سطح کتاب کے ورق کی سطح مستوی پر عمود ہے اور فرض کرو کہ پتنگ  
سج دم کا مرکز ثقل ہے۔

ہوا کا تعامل پتنگ کے ہر ایک نقطہ پر دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل ہو سکتا ہے۔ ایک پتنگ کی سطح پر عود و ارادہ دوسرے اس کی سطح کے متوازی محور الذکر اجزائے ترکیبی کا پتنگ پر کچھ اثر نہیں ہوتا اس لئے ان کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اول الذکر اجزائے ترکیبی ترکیب پاکر پتنگ پر عود و ارادہ ایک واحد قوت بن جاتے ہیں جو ث کے کچھ اوپر نقطہ ہر عمل کرتی ہے، مگر اور کسی نقطہ پر ملتے ہیں اور تیسری قوت یعنی رسی کا تناؤ اس نقطہ میں سے گزرتا ہے۔

وزن و کو تعبیر کرنے کے لئے انتصابی خط لکھیں اور سہا کو تعبیر کرنے کے لئے ل م ا ہ د کے متوازی لکھیں۔ تب قوتوں کے مثلث سے ہر کسی کے تناؤ کو تعبیر کرے گا۔

شکل سے ظاہر ہے کہ انصافی خط لک کے ساتھ خط مرکب بہ نسبت خط

لی مر کے بڑا زاویہ بنائے گا یعنی پتنگ پر کا عمود رسی کی سمت اور خط انتصلی کے اندر واقع ہوگا۔

تو قول کے مثلث سے یہ بھی ظاہر ہے کہ تناؤات اور وزن و دونوں ہوا کی قوت سرا سے چھوٹے ہو گئے۔

## مثالیں

(ذیل کی مثالیں ترمیمی طریق سے حل کی جائیں)

۱۔ ۱۰ فٹ لمبا ایک وزنی شہتیرا لب در رسوں کے ذریعے جولا اور لب پر بند ہے جس میں اس طرح سائون ہے کہ ڈاؤپر کی طرف ہے۔ ر سے افقی کے ساتھ ۵۵° اور ۵۰° کے زاویے بنائے ہیں، اگر لب سمت افقی کے ساتھ ۲۰° کا زاویہ بنائے تو بتاؤ کہ شہتیر کا مرکز ثقل اس سے کتنے فاصلہ پر ہے۔ نیز اگر اس کا وزن ۲۰۰ پونڈ ہو تو رسوں کے تناؤ معلوم کرو۔

(۱۶ س فٹ ۱۲۳ اور ۸ س ۱۱ پونڈ وزن)

۲۔ لب ایک یکساں سلاخ سے جو ج چول کے گرد گھوم سکتی ہے اور ایک ہلکی رسی ا د کے ذریعہ جو ایک طرف ایک بالائین نقطے کے ساتھ اور دوسری طرف ج کے انتہا با نیچے نقطہ د کے ساتھ بندھی ہے ساکن ہے۔ اگر لب = ۳ فٹ، ج = ۱۰ فٹ، ج د = ۲ فٹ اور د ل = ۴ فٹ اور سلاخ کا وزن ۱۰ پونڈ ہو تو رسی کا تناؤ اور محور پر کے تعامل معلوم کرو۔

[ ۶۴۵ اور ۱۶۹ پونڈ وزن ]

۳۔ ایک برآمدہ پیرم ذیل کی دو سلاخوں پر مشتمل ہے ایک افقی سلاخ لب ہے جسے قبضہ کے ذریعے ایک ثابت نقطہ پر وصل کیا ہوا ہے اور دوسری سلاخ ج د ہے جو ایک طرف لب کے نقطہ ج کے ساتھ اور دوسری طرف ل کے عین نیچے ایک ثابت نقطہ د کے ساتھ وصل کی ہوئی ہے۔ ایک ہینڈ رویت کا ایک وزن ب پر بندھا ہے۔ ل اور ج پر کے تعامل معلوم کرو جبکہ لب = ۶ فٹ، ج = ۲ فٹ اور د = ۳ فٹ سلاخوں کے وزنوں کو نظر انداز کیا گیا ہے۔

[ ۲۸۳ اور ۳۶۱ ہینڈ رویت وزن ]



۳۔ ایک پتنگ کی سطح مستوی افق کے ساتھ ۵۰ کا زاویہ بناتی ہے اور پتنگ کا وزن ۱۰ پونڈ ہے۔ اس پر ہوا کا حاصل دباؤ اس کے مرکز ثقل سے ۸ انچ اوپر عمل کرتا ہے اور رسی اس سے ۱۰ انچ اوپر نقطہ کے ساتھ بندھی ہے ڈوری کا تناؤ اور ہوا کا دباؤ معلوم کرو  
[ ۲۶۶۸ اور ۳۲۸۱ پونڈ وزن ]

۱۰۹۔ ریسمانی (یعنی رسی کا) کثیر الاضلاع۔ اگر ایک رسی کے سرے دو ثابت نقطوں کے ساتھ بندھے ہوں اور اگر رسی کے مختلف نقطوں پر وزن لٹکائے جائیں تو رسی سے جو شکل بنتی ہے اُسے ریسمانی کثیر الاضلاع کہتے ہیں۔  
فرض کرو کہ و اور و دو ثابت نقطے ہیں جن پر رسی کے سرے بندھے ہیں

نیز فرض کرو کہ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ رسی کے وہ نقطے ہیں جن پر بالترتیب وزن ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ ٹنک رہے ہیں۔

نیز فرض کرو کہ رسی کے حصوں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ کے طول بالترتیب ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ ہیں اور افق کے ساتھ ان کے میلان عم، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ ہیں۔

اگر نقطوں و اور و کے درمیان افقی اور انتصابی فاصلے بالترتیب ہوں تو

$$۱ \text{ جم عم} + ۲ \text{ جم عم} + ۳ \text{ جم عم} + ۴ \text{ جم عم} + ۵ \text{ جم عم} + ۶ \text{ جم عم} + ۷ \text{ جم عم} + ۸ \text{ جم عم} + ۹ \text{ جم عم} + ۱۰ \text{ جم عم} = ۱۰$$

$$۱ \text{ جب عم} + ۲ \text{ جب عم} + ۳ \text{ جب عم} + ۴ \text{ جب عم} + ۵ \text{ جب عم} + ۶ \text{ جب عم} + ۷ \text{ جب عم} + ۸ \text{ جب عم} + ۹ \text{ جب عم} + ۱۰ \text{ جب عم} = ۱۰$$

فرض کرو کہ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ بالترتیب رسی کے مختلف حصوں کے تناؤ ہیں۔

یکے بعد دیگرے مختلف سمتوں کے تعادل کے لئے افقی اور انتصابی سمتوں

میں تحلیل کرنے سے

تہ جب عم - تہ جب عم = و اور تہ جب عم - تہ جب عم = .

تہ جب عم - تہ جب عم = و اور تہ جب عم - تہ جب عم = .

ت۱+ جب عن۱- ت۱ جب عن۱= ون اور ت۱+ حجم عن۱- ت۱+ حجم عن۱=

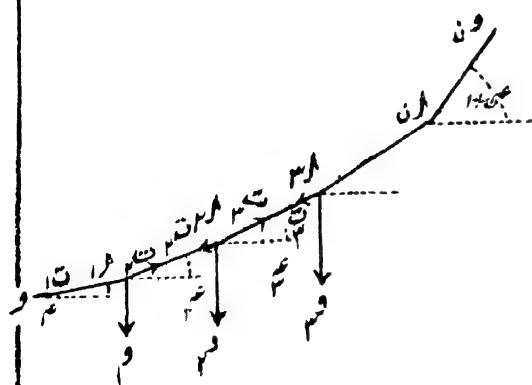
یہ ۲ ن مساواتیں مع مساواتوں (۱) اور (۲) کے (ن + ۱) نامعلوم متناؤں اور (ن + ۱) نامعلوم میلانوں کے معلوم کرنے کے لئے کافی ہیں۔

اوپر کی مساواتوں میں جو مساواتیں بائیں طرف درج ہیں ان سے

تاجرم عم = تاجرم صر = تاجرم صر = ..... =

$$= t_n + 1 + \text{حجم عملیات} = m \text{ (فرض کرد)} \dots (3)$$

یعنی روسی کے تناؤ کا اضافی جزد ترکیبی ہر جگہ مستقل ہے اور ص کے مساوی ہے۔



(۳) سے تم، تہ، تی، ... تن

کی قیمتیں وائیں کالم کی مساواتوں میں

مذبح کرنے سے

مس عم - مس عم =  $\frac{2}{3}$

$$\frac{۲۹}{۴۰} = \text{مس عمود} - \text{مس عمود}$$
$$\frac{\text{مس عم} + \text{مس عم}}{\text{م}} = \text{مس عم}$$





اور فرض کرو کہ ان لانے والے خطوں کے طول  $د$ ،  $ب$ ،  $ج$ ،  $د$ ،  $ع$  ہیں۔  
 قوت  $ف$  کے خط عمل پر کوئی لفظ عدلو اور  $ب$  د کے متوازی خط عدبہ  
 کھینچو جو  $ق$  سے  $ب$  پر ملے  $ج$  د کے متوازی خط  $ب$  جہ کھینچو جو  $س$  سے  $ج$  پر  
 ملے اور دو کے متوازی  $ج$  گہ کھینچو جو  $س$  سے  $گ$  پر ملے  $ا$  گہ اور  $ع$  میں سے  
 $ع$  و اور  $و$  کے متوازی خطوط کھینچو جو ایک دوسرے کو لہ پر ملیں۔  
 لہ میں سے  $ل$ ،  $ل$ ،  $د$ ،  $ع$  کے مساوی اور متوازی کھینچو تب  $ل$ ،  $ل$ ،  $ا$ ،  $س$ ،  
 پیمانہ جس پر  $ا$ ،  $ب$ ،  $ق$ ،  $ف$  کو تعبیر کرتا ہے بلحاظ مقدار اور خط عمل کے مطلوبہ  
 حاصل کو تعبیر کرے گا۔

چونکہ  $ف$ ،  $ا$ ،  $ب$  سے تعبیر ہوتا ہے اس لئے یہ  $ا$ ،  $د$  اور  $د$ ،  $ب$  سے تعبیر  
 ہونے والی دو قوتوں کے متبادل سے  $ا$ ،  $س$  لئے اس کی بجائے دو قوتیں  $ا$  اور  $ب$ ،  
 $ل$ ،  $ع$  اور  $ب$ ،  $ع$  کی سمتوں میں لی جاسکتی ہیں۔ اسی طرح  $ق$  کی بجائے دو قوتیں  
 $س$ ،  $ا$  اور  $ج$ ،  $ا$ ،  $ب$  اور  $ج$ ،  $ب$  کی سمتوں میں لی جاسکتی ہیں،  $س$  کی بجائے  
 دو قوتیں  $ج$  اور  $د$ ،  $ب$ ،  $ج$  اور  $گ$ ،  $ج$  کی سمتوں میں لی جاسکتی ہیں اور  $س$  کی  
 بجائے قوتیں  $د$  اور  $ع$ ،  $ج$  اور  $گ$ ،  $گ$  کی سمتوں میں لی جاسکتی ہیں۔  
 اس طرح قوتوں  $ف$ ،  $ق$ ،  $ا$ ،  $س$  اور  $س$  کی بجائے شکل عدبہ  $ج$  گہ  $ل$   
 کے کناروں کے ساتھ عمل کرنے والی قوتوں مل گئیں۔ ان قوتوں  
 میں سے کناروں عدبہ  $ا$ ،  $ب$ ،  $ج$  اور  $ج$  گہ میں عمل کرنے والی قوتیں ایک دوسرے  
 کے متوازن ہیں۔ اس لئے ہمارے پاس  $ا$ ،  $د$  اور  $د$ ،  $ع$  کے مساوی اور متوازی  
 لہ پر عمل کرنے والی صرف دو قوتیں بچیں جن کا حاصل  $ا$ ،  $ع$  ہے۔  
 چونکہ  $ل$ ،  $ل$ ،  $د$ ،  $ع$  کے مساوی اور متوازی کھینچا گیا ہے اس لئے  
 یہ مطلوبہ حاصل کو بلحاظ مقدار اور سمت کے تعبیر کرے گا۔

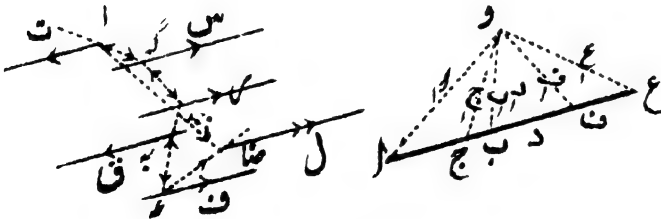
$ا$ ،  $ب$ ،  $ج$ ،  $د$ ،  $ع$  کی قسم کی شکلوں کو قوتوں کا کثیر الاضلاع کہتے ہیں اور عدبہ  $ج$  گہ  $ل$   
 جیسی شکلوں کو زنجیری یا ریسمانی کثیر الاضلاع کے نام سے موسوم کرتے ہیں  
 کیونکہ اس میں بہت سی رسیوں یا زنجیروں کا ایک جٹ تعادل میں ہے۔  
 ۱۱۲۔ اگر قوتوں کے کثیر الاضلاع کا نقطہ  $ل$  پر منطبق ہو تو کثیر الاضلاع

کو بند کہتے ہیں اور اس صورت میں حاصل قوت معدوم ہو جاتی ہے۔  
 اگر قوتوں کا کثیر الاضلاع بند ہو لیکن ریسمانی کثیر الاضلاع بند نہ ہو یعنی اگر  
 کہ لہ عد خط مستقیم نہ ہو تو ہمارے پاس د و اور ا و کے متوازی نقاط گہ اور عد  
 پر عمل کرنے والی دو قوتیں بچ جاتی ہیں یعنی اس صورت میں ہمارے پاس دو مساوی  
 متوازی اور متقابل قوتیں رہ جاتی ہیں جن سے ایک جفت بنتا ہے۔

لیکن اگر ریسمانی کثیر الاضلاع بھی بند ہو تو کہ لہ عد خط مستقیم ہوگا اور یہ مساوی  
 متوازی اور مخالف قوتیں ایک ہی خط مستقیم میں عمل کریں گی اور اس لئے ایک  
 دوسرے کو معدوم کر دیں گی۔

اس لئے اگر قوتیں ف، ا، ص اور س تعادل میں ہوں تو ضروری ہے  
 کہ ان قوتوں کے قوی کثیر الاضلاع اور ریسمانی کثیر الاضلاع دونوں بند ہونے  
 چاہئیں۔

مثلاً اگر قوتیں متوازی ہوں تب بھی عمل دفعہ ماقبل کے مطابق ہو سکتا ہے۔ نیچے  
 جو شکل کھینچی گئی ہے وہ اُس صورت کے لئے ہے جبکہ قوتیں متوازی ہیں اور پانچ  
 قوتوں میں سے دو قوتیں باقی تین قوتوں کی سمت کے مخالف عمل کرتی ہیں۔

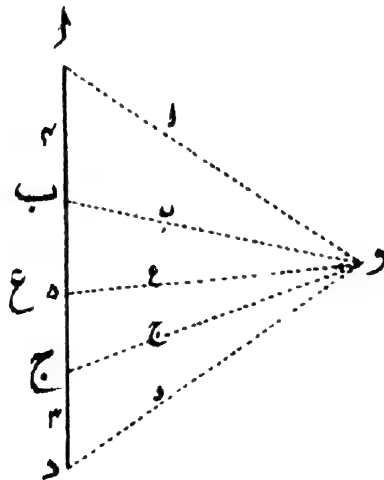
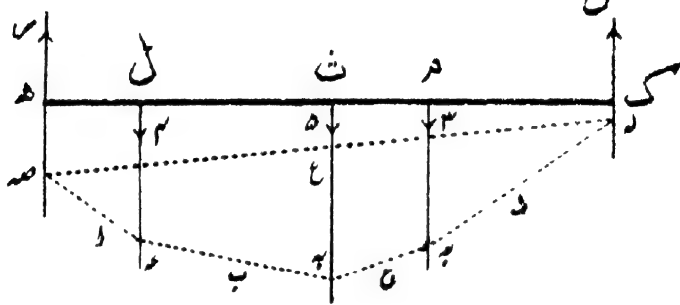


چونکہ ف، ص اور س کی سمت ایک ہی ہے اس لئے ا، ب، ج، د، اہ  
 د و کی سمت بھی لازماً ایک ہی ہوگی۔ اسی طرح ب، ج، ع، ف کی سمت  
 جو ق اور ت کو تعبیر کرتی ہیں اس کے مخالف ہوگی۔

عمل کا ثبوت وہی ہے جو دفعہ ماقبل میں درج کیا گیا ہے۔ خط صال جو  
 ا، ب کے مساوی اور متوازی ہے بلحاظ مقدار اور خط عمل کے مطلوبہ حاصل کو

تعبیر کرتا ہے۔ اس عمل سے صریحاً بہت سے وزنوں کا حاصل وزن معلوم ہو سکتا ہے۔  
 مشق۔ ایک یکساں سلاخ  $h$  گ کو جس کا طول ۱۲ فٹ اور وزن ۵ ہنڈرویت  
 ہے  $h$  اور  $g$  پر اس طرح سہارا گیا ہے کہ یہ افق کے متوازی ہے اس کے نقطوں  $l$   
 اور  $m$  پر جن کے فاصلے  $h$  سے بالترتیب ۲ فٹ اور ۸ فٹ ہیں  $m$  ہنڈرویت اور ۳  
 ہنڈرویت کے وزن باندھے گئے ہیں تیسری طریق سے  $h$  اور  $g$  پر کے نکال  
 دریافت کرو۔

(۱۰۴) ا ب، ب ج، ج د انتصافاً نیچے کی طرف اس پیمانہ کے مطابق اپو جس پر ایک  
 ہنڈرویت نصف انچ سے تعبیر ہوتا ہے، اس طرح ا ب = ۲ انچ، ب ج =  $\frac{1}{2}$  انچ اور  
 ج د =  $\frac{1}{4}$  انچ۔



کوئی مناسب قطب و منتخب کرو۔





اس کو نقطہ ا ب د کہہ سکتے ہیں۔ اس نقطہ کا متناظر قوتوں کا مثلث ا ب د ہے۔ اسی طرح دوسری قوتوں کے لئے۔

۱۱۵۔ اگر دو قطبیوں د اور و کے جواب میں قوتوں کے کسی دئے ہوئے نظام کے دوریسمانی کثیر الاضلاع کھینچے جائیں تو ان کے متناظر اضلاع کے نقاط تقاطع ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں جو د و کے متوازی ہے۔

فرض اگر د کہ عہ بہ دوریسمانی کثیر الاضلاع ہے جو دفعہ ۱۱۱ کے مطابق دوسرے قطب و کے جواب میں بنایا گیا ہے، عہ بہ ا ب د کے جواب میں بنائی گئی ہے، تو قوتوں ف ا ق ا ر ..... کو الٹ دو۔

بہ پر کی قوت قی کو عہ بہ اور عہ بہ کے متوازی دو قوتوں میں تحلیل کر دو جب د اور و ج کے مساوی ہوں اور بہ پر الٹی ہوئی قوت قی کو بہ عہ اور بہ عہ کے متوازی دو قوتوں میں تحلیل کر دو جب د اور ج و کے مساوی ہوں، نقطہ ع کے گرد جو عہ بہ اور عہ بہ کا نقطہ تقاطع ہے معیار اتر لو۔

تب چونکہ یہ چار اجزائے ترکیبی متبادل میں ہیں اس لئے ع کے گرد ان کے معیار اتردوں کا مجموعہ صفر ہے۔ نیز ان میں سے دو قوتیں ع میں سے گزرتی ہیں۔ اس لئے عہ بہ اور بہ عہ پر عمل کرنے والی قوتوں کا معیار اتر ع کے گرد (جو ج اور ج و کے بالترتیب مساوی ہیں) صفر ہے۔

اس لئے ان کا حاصل ع میں سے گزرتا ہے لیکن یہ صریحاً ط میں سے بھی گزرتا ہے جو بہ عہ اور بہ عہ کا نقطہ تقاطع ہے۔ اس لئے ان کا حاصل خط ط میں عمل کرتا ہے لیکن دفعہ ۱۱۱ کی دائیں طرف کی شکل سے ج اور ج و سے تفسیر ہونے والی قوتوں کا حاصل و و کے متوازی ہے۔ پس عہ بہ و و کے متوازی ہے۔

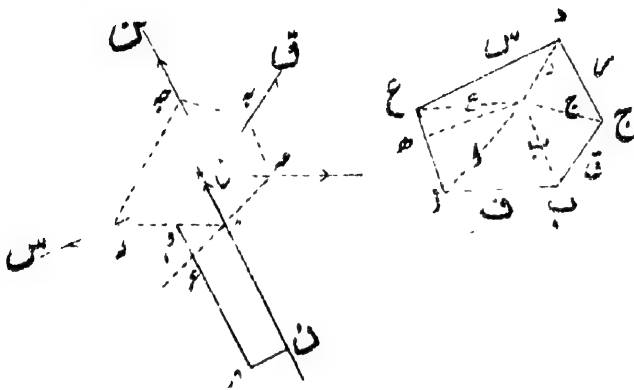
اسی طرح خط ط ص جو ط کو خطوط جہ لہ اور جہ لہ کے تقاطع ص سے ملتا ہے و و کے متوازی ہے۔

اس لئے تمام نقطے ع، ط، ص، ..... ایک خط مستقیم پر واقع ہیں جو و و کے متوازی ہے۔

۱۱۶۔ اگر مستوی قوتوں کے ایک دئے ہوئے نظام کا ایک ریسمانی کثیر الاضلاع



یعنی ہر کے گرد معیار اثر اس حاصل ضرب کے مساوی ہے جس کا آیا ہے۔ ہر وضو ضربی وہ مقطوعہ ہے جو ریسمانی کثیر الاضلاع کے حاصل میں سے گزرنے والے اضلاع کے درمیان سے حاصل متوازی خط پر قطع ہوتا ہو اور دوسرا جزو ضربی وہ عمود ہے جو قطب و مرکز سے حاصل کو تعبیر کرنے والے قوتی کثیر الاضلاع کے ضلع پر کھینچا جائے۔



اسی طرح کسی ترکیبی قوت کا ہر کے گرد معیار اثر اس حاصل ضرب کے مساوی ہے جس کا ایک جزو وہ مضبوط ہے جو ق کے متوازی ہر میں سے گزرنے والے خط پر ریسمانی کے عمود میں سے گزرنے والے دو اضلاع کے درمیان قطع ہوتا ہے اور دوسرا جزو وہ عمود ہے جو قوتوں کے کثیر الاضلاع کے ضلع 'ب' پر (جوف کو تعبیر کرتا ہے) قطب و مرکز سے کھینچا جائے۔

۱۱۸۔ ہلکی سلاخوں کو آزادانہ جوڑنے سے ایک کثیر الاضلاع بنایا گیا ہے قوتوں کا ایک نظام جوڑوں پر عمل کر رہا ہے جو متعادل ہیں سلاخوں کے طولوں کی سمت میں تعامل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ پانچ سلاخوں 'ا', 'ب', 'ج', 'د', 'ه' کو آزادانہ طور پر

پیوست کر کے ایک قالب بنایا گیا ہے۔ فرض کرو کہ اس کے جوڑوں پر قوتیں 'ف', 'ف', 'ف', 'ف', 'ف' عمل کرتی ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔







کی سمت میں یا لام کی سمت میں عمل کرے گی اور لام پر کی قوت لام ۲۱ یا لام ۳۵ کی سمت میں عمل کرے گی۔

اگر ایک سلاخ پر دیاؤ عمل کرتا ہے جیسا کہ موجد وہ صورت میں ہے تو سلاخ کو پھینکنے کے عمل کی مزاحمت کرنی پڑتی ہے یا پھینکنے کے عمل کی مزاحمت کرنی پڑتی ہے۔ پہلی صورت میں ہر ایک سرے پر کا فعال سلاخ کے مرکز سے سروں کی طرف عمل کرتا ہے۔ اس صورت میں سلاخ کو فشار بند سلاخ کہتے ہیں۔ دوسری صورت میں ہر ایک سرے پر کا فعال مرکز کی طرف عمل کرتا ہے۔ اس صورت میں سلاخ کو بند میں سلاخ کہتے ہیں۔ ہر صورت میں سلاخ کے دونوں سروں پر کے فعال مساوی اور متقابل ہوتے ہیں [خطاب ج اعتدالی سمت میں کھینچو جس کا طول ۲ ۱/۲ انچ ہو اور جو لام پر کے وزن کو تعبیر کرے۔ ج ع، لام، لام کے متوازی اور د ع، لام، لام کے متوازی کھینچو تب د ب ج ح جوڑ لام کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع ہے۔

(۱۱۰) خط ع ح اف افقی سمت میں کھینچو جو ج سے ف پر لے۔ تب ع ج ف، لام کے لئے قوتوں کا کثیر الاضلاع ہے اس لئے فعال ف، ج، ف سے اور تناؤ ت، ف، ف سے تعبیر ہوتا ہے۔

بالآخر جوڑ لام کے لئے کثیر الاضلاع د ع ف ا بنتا ہے، اس لئے ف، ف، ف اسے تعبیر ہوتا ہے۔

انچوں میں ناپنے سے  
ع ف = ۱۱۱، ج ع = ۳۱، د ب = ۱۱۴، ۵ (۵، ۳۰) = ۵  
د ع = ۹۱، ج ف = ۱۲۵، ف (۱، ۳۴۵) = ۱

چونکہ ایک انچ دو ہنڈرویلوں کو تعبیر کرتا ہے اس لئے ہنڈرویلوں میں

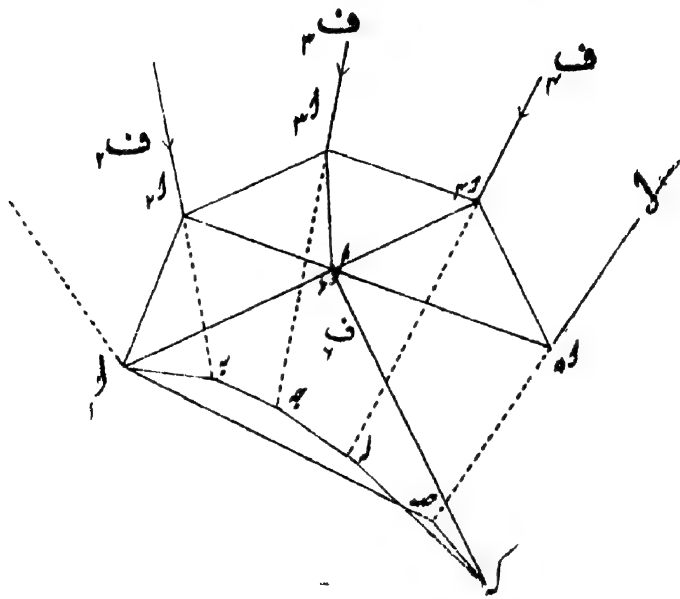
شمار = ۲۵۲۰، شمار = ۶۵۶۲، شمار = ۳۴۵۴







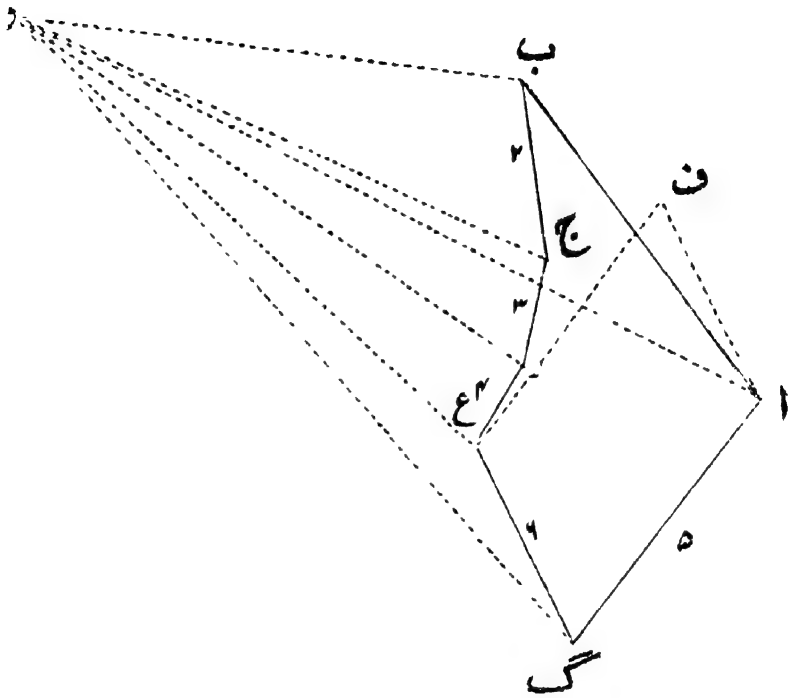
شکل میں دکھایا گیا ہے، نقطوں  $ا، ب، ج، د، ه، و، ز$  پر قوتیں  $ف_ا، ف_ب، ف_ج، ف_د، ف_ه، ف_و، ف_ز$   $ف$  حسب شکل ذیل مختلف سمتوں میں عمل کرتی ہیں۔ متبادل  $ا، ب$  پر کے تعامل  $ف_ا$  کے ذریعے جو بلحاظ سمت اور مقدار کے نامعلوم ہے اور  $ا، ب$  پر کے نامعلوم تعامل  $ف_ب$  کے ذریعے جو  $ا، ب$  کی سمت میں عمل کرتا ہے قائم ہے۔  
ان تعاملوں کو معلوم کرو اور نیز قالب کی سلاخوں کے دباؤ اور تناؤ معلوم کرو۔



ہمیں پہلے  $ف$  اور  $ف_ه$  کی مقدار میں معلوم کرنی چاہئیں۔  
کسی مناسب پیمانہ پر  $ب، ج، د، ه، و، ز$ ،  $ع$  گنگ کھینچو جو  $ف_ا، ف_ب، ف_ج، ف_د، ف_ه، ف_و، ف_ز$   $ف$  کو بلحاظ سمت اور مقدار کے تغیر کریں۔ کسی نقطہ کو قطب مقرر کرو۔

$ا، ب$  سے شروع ہو کر کیونکہ نامعلوم قوت  $ف$  کے خط عمل میں یہی ایک معلوم نقطہ ہو  
ریسانی کثیر الاضلاع  $ا، ب، ج، د، ه، و، ز$ ..... کھینچو جس میں  $ا، ب، ج، د، ه، و، ز$  کے مضامین

بالترتیب د ب ، د ج ، د د ع ، و گ کے متوازی ہوں۔



۱) ضد کو ملاؤ اور د ا اس کے متوازی کھینچو جو گ ا سے (جو معلوم سمت ۱۵ کا کے متوازی کھینچا گیا ہے) ا پر ملے۔

تب صریحاً گ ا نامعلوم تعامل ف ۱ کو تعبیر کرتا ہے اور ا ب ، ا پر کے نامعلوم تعامل ف ۱ کو بلحاظ مقدار اور سمت دونوں کے تعبیر کرتا ہے کیونکہ قوتوں کا کثیر الاضلاع ا ب ج د ع گ ا اور ریسانی کثیر الاضلاع ا ب ج د ع گ ا کے بند ہونے کی وجہ سے نقاط ا ۱ ، ا ۲ ، ..... پر عمل کرنے والی متناظر قوتیں ف ۱ ، ف ۲ ، ..... جو معلوم یا معلوم کردہ سمتوں میں عمل کرتی ہیں متبادل ہیں۔







ت ۱ x لہ سے عمود لہ لہ پر

= ف ۱ x لہ سے لہ لہ پر عمود

اسی طرح سے لہ لہ اور لہ لہ کے تقاطع کے گرد اور لہ لہ کے گرد

(۱۵)

معیار اثر لینے سے ہمیں ت ۱۳۴ لہ لہ حاصل ہونگے

اس طریقہ کے مطابق عمل کر لے میں احتیاط رکھنی چاہیے کہ تراش قالب کے تین رکنوں سے زیادہ کو قطع نہ کرے۔

۱۳۴ — چند سلاخیں جن کے سروں کو باہم وصل کیا ہوتا ہے قالب کہتے ہیں۔ جب اس قسم کی سلاخ پر عمل کرنے والی قوتیں ایسی ہوں کہ سلاخ تناؤ کی حالت میں ہوتو اس کو بندہن کہتے ہیں لیکن جب وہ پچکاؤ کی حالت میں ہوتو اسکو فشارہ بند کہتے ہیں۔

سب سے سادہ قالب ایک مثلث ہوتا ہے جو تین سلاخوں 'ا'، 'ب'، 'ج' کے سروں کو جوڑنے سے بنایا جاتا ہے۔ چونکہ مثلث کے اضلاع کو معین کر دینے سے اس کی شکل معین ہو جاتی ہے اس لئے اس قسم کے قالب کی شکل ناقابل تبدیل ہوگی اس کو صلب یا مکمل قالب کہتے ہیں خواہ اس کے جوڑوں پر کیسے ہی وزن کیوں نہ لٹکائے جائیں۔

لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ ایک ایسے قالب کی شکل جو چار سلاخوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کے سروں 'ا'، 'ب'، 'ج' اور 'د' کو جوڑنے سے بنائی جائے ہمیشہ ایک ہی رہے کیونکہ سوائے مثلث کے اور کوئی ہندسی شکل محض اضلاع کا تعین کر دینے سے متعین نہیں ہو سکتی۔

اب سے قالب کو نامکمل کہتے ہیں کیونکہ اس کے سروں پر عمل کرنے والی قوتوں کے بدلنے سے اس کی شکل بدلتی ہے۔ لیکن اگر ہم چاہیں تو اس میں ایک قطری سلاخ 'ج' کا اضافہ کرنے سے جس کے سرے فہنہ کے ذریعہ 'ا' اور 'ج' کے ساتھ وصل کر دئے گئے ہیں اس کو استوار بنا سکتے ہیں۔ اب اگر قالب کے جوڑوں پر قوتوں کا کوئی معلومہ نظام عمل کرے تو ہم قالب کے پانچ اضلاع کے ساتھ عمل کرنے والی قوتوں کو معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ قطری سلاخ 'ج' کے علاوہ ہم ایک اور قطری سلاخ 'ب' د

لگا دیتے ہیں۔ اس صورت میں قالب کو دائرہ کہتے ہیں چونکہ اس میں سلاخوں کی اس تعداد کی نسبت جو اس کی شکل کو متعین کرنے کے لئے ضروری ہیں ایک سلاخ زیادہ ہے اب اس کے ہر رکن کے ساتھ جو قوتیں عمل کرتی ہیں ان کا تعین کرنا ممکن نہیں ہے۔ عام طور پر کوئی قالب صلب اس وقت ہوتا ہے جبکہ یہ مثلثوں کی کسی تعداد میں منقسم ہو سکے مگر ممکن ہے کہ یہ زائد ہو۔

۱۲۴۔ غیر زائد صلب قالب۔ دو ابعاد میں اگر جوڑوں کی تعداد  $n$  ہو تو قالب کے صلب اور غیر زائد بھی ہونے کے لئے سلاخوں کی تعداد  $2n - 3$  ہونی چاہیئے کیونکہ اگر ہمارے پاس تین جوڑے 'ا' ب، 'ج' ہوں تو ان کو متعین کرنے کے لئے تین سلاخوں یعنی 'ب' ج، 'ج' 'ا' اور 'ا' ب کی ضرورت ہوتی ہے۔ کسی اور جوڑے 'د' کا مقام متعین ہو جاتا ہے اگر ہمیں 'د' کو کسی دو گزشتہ جوڑوں کے ساتھ ملانے والی سلاخیں مثلاً 'ا' د، 'ب' د دی ہوئی ہوں۔ اسی طرح کسی اور جوڑے 'ع' کے لئے علیٰ ہذا النقیاس، پس پہلے تین جوڑوں کے بعد ہر ایک جوڑے کے لئے دو مزید سلاخوں کا ہونا ضروری ہے۔ اس لئے  $n$  جوڑوں کی کل تعداد

(۱۱۶)

$$3 + 2(n - 3) = 2n - 3$$

تین ابعاد میں ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ تعداد مذکور  $2n - 3$  ہوگی کیونکہ پہلے تین جوڑے 'ا' ب، 'ب' ج، 'ج' 'ا' کے معلوم ہونے کے بعد چوتھے جوڑے 'د' کا مقام اس صورت میں متعین ہو سکتا ہے اگر ہمیں سلاخیں 'ا' د، 'ب' د، 'ج' د معلوم ہوں کسی پانچویں جوڑے 'ع' کا مقام معلوم ہو سکتا ہے اگر ہمیں اس کو گزشتہ جوڑوں میں سے کسی تین کے ساتھ ملانے والی سلاخوں کے طول مثلاً 'ا' ع، 'ب' ع، 'د' ع کے طول معلوم ہوں۔ اس لئے پہلے تین کے بعد ہر ایک جوڑے کے لئے ہمارے پاس تین مزید سلاخیں ہونی چاہئیں، پس ہر تعداد مطلوبہ

$$3 + 3(n - 3) = 3n - 6$$



۱۲۵۔ دفعہ ۱۲۰ کی مثالوں میں بہت سے غیر زائد صلب قالب ہیں۔ بعض اوقات زائد قالب سہولت بخش ہوتا ہے مثلاً دفعہ ۱۲۰ کی مشق ایس ۱، ۱۳ ایک بندہ بن ہے اگر ۲ پر کے ۱۰ ہنڈرویت نکال دئے جائیں تو ۱، ۱۳ صرف کا فشار بند بن جائیگا۔ لیکن اگر ۱، ۱۳ بہت جلد ہی مڑ جانے والا ہوتا تو یہ فشار بند کے طور پر اچھی طرح کام نہیں دے سکتا۔ اس صورت میں ایک مزید بندہ ۱، ۱۳ رکھنا مفید ہوتا، جب سب وزن ۱، ۱۳ پر ہوتا تو قوت ۱، ۱۳ پر عمل کرتی اور ۱، ۱۳ چٹیاں مفید ہوتی اگر سب وزن ۱، ۱۳ پر ہوتا تو سلاح ۱، ۱۳ بے کار ہو جاتی اور عمل صرف ۱، ۱۳ پر ہوتا۔  
۱، ۱۳ یا ۱، ۱۳ جیسے رکضوں کو جو صرف فشار بند یا بندہ بن کے طور پر استعمال ہو سکتی ہیں نیم رکن کہتے ہیں۔

## مثالیں

۱۔ ایک ۱۰ فٹ لمبے شہتیر کے ایک سرے سے ۱ فٹ ۳، ۱ فٹ ۱، ۱ فٹ کے فاصلوں پر بالترتیب اوزان ۱۲، ۱۴، ۱۶ ہنڈرویت لٹکائے گئے ہیں۔ صحیح نقشہ کفی کے عمل سے حاصل کا خط عمل دریافت کرو۔

(اس سرے سے ۳، ۱ فٹ)

۲۔ ایک افقی شہتیر ۲۰ فٹ لمبا ہے اور اس کے ایک سرے سے بالترتیب ۱، ۱۳، ۱۵ فٹ کے فاصلوں پر ۱۲، ۱۴، ۱۶ ہنڈرویت وزن لٹک رہے ہیں۔  
ریسمانی کثیر الاضلاع کے ذریعے دونوں سروں پر کے دباؤ معلوم کرو۔

(۱۵، ۱ اور ۸۵، ۹ ہنڈرویت)

۳۔ ایک شہتیر پر ۱۵، ۱۱، ۱۲، ۱۸ پونڈ کے وزن اس کے ایک سرے سے بالترتیب ۱، ۱۴، ۱۵، ۱۲ فٹ کے فاصلوں پر آویزاں ہیں۔ شہتیر اپنے ایک سرے سے ۵ اور ۱۵ فٹ کے فاصلوں پر سہارا ہوا ہے تریسیمی طور پر سہارے والی توتیں معلوم کرو۔

(۳۴، ۳ اور ۸۶ پونڈ وزن)

۴۔ ا ب ج د ع ف ایک منظر سدس ہے۔ اگر ع ج کے ساتھ ایک ہم پونڈ

وزن کی قوت عمل کرے تو ثابت کرو کہ متبادل قائم رکھنے کے لئے (ج، د، ع، ف، ہ، اے) پر بالترتیب ۱۰، ۳۲، ۱۷ اور ۶۳ و ۳۴ پونڈ وزن کی قوتیں عمل کریں گی۔

۵۔ ذیل کی شکل (۱) میں ہلکی سلاخوں کا ایک متشاکل نظام ہے جن کے سرے آزادانہ جوڑے گئے ہیں اور جسے سروں پر عمل کرنے والی انتصابی قوتوں کے ذریعے سہارا ہوا ہے۔ ۱۰ اور ۵ ہنڈرویٹ کے وزن ان نقطوں پر جو دکھائے گئے ہیں انتصابی سمت میں عمل کرتے ہیں۔

اگر جانبی سلاخیں افقی کے ساتھ ۵۰ کا زاویہ بنائیں تو سلاخوں کے دباؤ اور تناؤ معلوم کرو۔

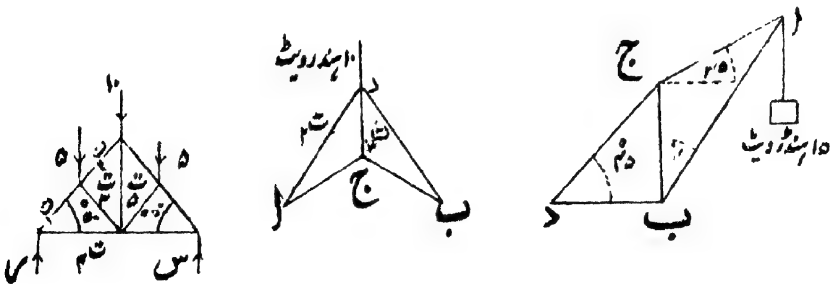
(ت = ۱۳۵.۵، ت = ۹۷.۹، ت = ۳۵.۲۶، ت = ۸۷.۳۹)

۶۔ شکل (۲) میں ہلکی سلاخوں کا ایک نظام ہے جس کے سرے آزادانہ جوڑے گئے ہیں اور جو سروں ۱ اور ۲ پر عمل کرنے والے انتصابی قوتوں سے سہارا ہوا ہے اگر اہنڈرویٹ کا ایک وزن ۵ پر رکھا جائے تو سلاخوں کے دباؤ اور تناؤ معلوم کرو۔

معلوم ہے کہ  $د ا ب = ۵$  اور  $ج ا ب = ۳۵$

(ت = ۸۷.۳۹، ت = ۱۱۷.۹۸، ت = ۹۷.۶۲ ہنڈرویٹ، ت = فشار بند ہے)

اور ت = اور ت = بندھن ہیں)



۷۔ شکل (۳) میں ایک حامل کی شکل دکھائی گئی ہے اس میں ۱ پر ۱۵ ہنڈرویٹ کا

ایک وزن نیک رہا ہے۔ حصول ارج اور لب پر عمل کرنے والی قوتیں معلوم کرو۔ اگر کھمبا ب ج آزادانہ حرکت کر سکے اور ب د استوار طور پر ثابت ہو تو بندہ من ج د پکھنچاؤ معلوم کرو۔

{ ۳۷۳ / ۳۷۵ م اور ۱۵۳ م ہندو ویٹ }

۸۔ ایک دارن گرد کا ایک حصہ میں مساوی الاضلاع مثلثوں ا ب ج، ا د ج،  
ب ج ع پر مشتمل ہے جن کے خط ا ب، د ج ع افقی ہیں اور موخر الذکر سلاخ سب  
سے اوپر ہے۔ یہ انتصابی سپاروں ا اور ب پر ساکن ہے اور اس کے نقطہ د پر ہٹن  
اور ع پر مٹن وزن آویزاں ہیں۔ اس کے چار مائل رکنوں پر کے تعامل اور باء معلوم کر کے  
(۶ ٹن اور ۲ ٹن / ۵۷، ۱۵۵، ۱۵۵ / ۴۳، ۴۳، ۴۳) سو خرا ذکر

چار کنوں میں سے پہلا، تیسرا اور چوتھا فشار بند ہیں اور دوسرا بندھن ہے )

۱۰۔ ہنڈرویٹ کے اوزان نقاط د اور ع پر لگائے گئے ہیں اور قالب کو ۱ اور ج پر سہارا گیا ہے۔ منکافی شکل کھینچو اور قالب کے تمام رکنوں میں دباؤ درپافت کرو۔

۱۲۔ ایک قالب کو جو پانچ سلاخوں (ب، ج، د، ج، د) کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے بنایا گیا ہے انتصابی سطح مستوی میں رکھا گیا ہے۔ (ب، ج، د) ایک قائم الزاویہ مثلث ہے جس کا ضلع (ب، ج) افقی ہے اور (ج، د) انتصابی ہے اور (ب، د) = (ج، د) = ۱۰ فٹ، زاویہ (ب، د، ج) = ۱۳۵ کے مساوی ہے اور (ج، د، ج) = ۱۲۰ کے مساوی ہے۔ قالب کا ایک نقطہ (د، ا) کے انتصابی وزن کو سہارے ہوئے ہے اور (د، ا) اور (ب، ج) پر عمل کرنے والی انتصابی قوتوں کے ذریعے متادل کو قائم رکھا گیا ہے۔ ان قوتوں کی مقدار اور قالب کی مختلف سلاخوں کے متبادل معلوم کرو۔

۴۴۱۔ ایک وارن گرڈر سادی الاصلہ مشائشوں سے بنا ہوا ہے، اس کے نیچے کے حصہ میں بائیں جوڑ ہیں اور اوپر کے حصہ میں چار پگلی لمبی سلاخ کے سرے دوہم ارتفاع ستونوں پر قائم ہیں۔ نیچے کے ہر ایک جوڑ پر تین ٹن کا وزن پڑا ہے اور اوپر کے حصہ میں بائیں طرف سے دوسرے جوڑ پر ۵ ٹن کا وزن پڑا ہے ترتیبی طریق سے ستونوں پر کے تعامل اور قالب کے ان چار گروں پر کے دباؤ معلوم کرو جو قالب کے بائیں جانب کو مائل ہیں۔

۱۳۔ ایک وارن گرڈ کے پچھلے سروں کا درمیان فی فاصلہ ۸ فٹ ہے، اس کی پچلی لمبی سلاح چار حصوں میں منقسم ہے اور مائل رکنوں کا طول ۱۲ فٹ ہے۔ اس پر ساوی طور پر تقسیم کیا ہوا ۲ ٹن فی فٹ کے حساب سے وزن لٹک رہا ہے اور مرکز پر ۵۰ ٹن کا وزن یکجا لٹک رہا ہے۔ رکنوں پر دباؤ کی مقدار درست معلوم کرو۔

(ہر ایک حصہ پر عمل کرنے والے وزن کی بجائے حصہ مذکور کے کناروں پر عمل کرنے والے دو نصف وزن فرض کرو)

ج، د، ع پر آزادانہ جوڑا گیا ہے اور کنارے ڈ اور ع مساوی بلندی پر سہارے ہوئے ہیں۔ چھت یکساں طور پر کمپریل سے ڈھکی ہوئی ہے۔ قلاب کے وزن کو چھت کے وزن کے مقابلہ میں نظر انداز کر کے تیسری طریقہ سے یا کسی اور طرح چھت کے مختلف رکڑوں پر کے دباؤں کی مقداریں چھت کے وزن کی رقوم میں حاصل کرو۔

شہتیروں (ا، ب، ج، د، ع کو ڈھکنے والی کمپریل کی ہر تراش کا وزن ہر ایک شہتیر کے وسطی نقطہ پر عمل کرتا ہوا فرض کیا جاسکتا ہے۔

۱۶۔ شہتیر کو دو قوتوں کے کسی نظام کے حاصل کا خط عمل نظام مذکور کے سب رسیاینوں کے آخری اضلاع کے تقاطع تقاطع کا طریق ہوتا ہے۔

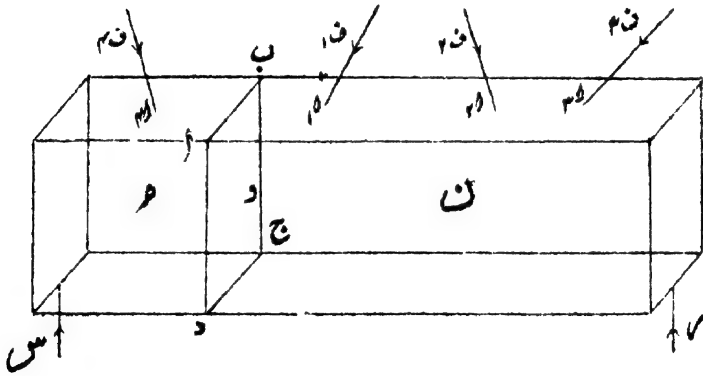


# ساتواں باب

## بخاری زور اور جھکاؤ کے معیار اثر

(۱۱۵)

۱۲۶۔ اس باب میں ہم ایک شہتیر کی تراش پر عمل کرنے والے اندرونی تعاملوں کی چند مثالوں پر غور کریں گے۔



ایک شہتیر پر غور کرو جس کی شکل اوپر دکھائی گئی ہے اس شہتیر کو کناروں پر سہا لایا ہے اور اس کے نقطوں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه'، 'و'، 'ز'، 'ح'، 'ط'، 'ی'، 'ک'، 'ل'، 'م'، 'ن' پر ترقیوتیں 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د'، 'ه'، 'و'، 'ز'، 'ح'، 'ط'، 'ی'، 'ک'، 'ل'، 'م'، 'ن' عمل کرتی ہیں۔ شہتیر کی کوئی تراش 'ا' ب ج د و۔ تراش کے بائیں طرف کے حصہ کو 'م' سے اور دائیں طرف کے حصہ کو 'ن' سے موسوم کرو۔ ہر کا جو عمل 'ن' پر ہے وہ ان بیشتر قوتوں پر مشتمل ہے جو شہتیر کی تراش 'ا' ب ج د کو عبور کرنے والے ریشے لگاتے ہیں۔



(۲) ایک قوت میں جو اس کے طول پر عمود وار ہوتی ہے۔ اس کو جڑی زور کہتے ہیں۔

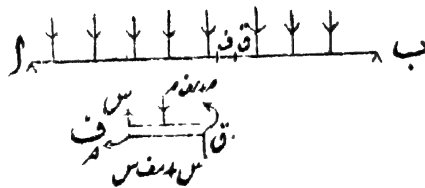
(۳) ایک حاصل جنت اُس خط کے گرد جو اس کے طول پر عمود وار ہو۔ اس کو جھکاؤ کا معیار اثر یا زور کا جنت کہتے ہیں۔

۱۲۸۔ یہ بات اکثر مشاہدہ میں آتی ہے جیسے کی منیل جیسے اجسام کو توڑنے کا سبب جھکاؤ کا معیار اثر ہوتا ہے نہ کہ تباؤ کی قوت۔ لیکن دُوری کی صورت میں جھکاؤ کا معیار اثر کوئی وقعت نہیں رکھتا اور یہ صرف تباؤ کی قوت سے ٹوٹتی ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ سلاح کے ٹوٹنے کا میلان زیادہ ہوگا جیسے جھکاؤ کا معیار اثر زیادہ ہو۔ اس لئے ہمیشہ جھکاؤ کے معیار اثر کو سلاح کے ٹوٹنے کے میلان کا ناپ قرار دیا جاتا ہے۔

ترجمی طور پر جڑی زور اور جھکاؤ کا معیار اثر دونوں سلاح کے ہر ایک نقطہ پر معین نکال کر ان میں سے ہر ایک کو ان کے متناسب بنانے سے دکھائے جاسکتے ہیں۔ (۱۲۹)

۱۲۹۔ اگر کسی افقی شہتیر پر انتصاباً وزن لا دیا جائے تو ثابت کر کہ انتصابی جڑی زور سے  $\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}$  کے مساوی ہوگا جہاں ہر نقطہ زیر بحث پر جھکاؤ کا معیار اثر ہے۔



شہتیر کے کنارہ ا سے فاصلہ لا پر کے چھوٹے عنصر  $ق$  (= معن لا) پر غور کرو۔ فرض کرو کہ رخ  $ق$  پر ادبر کی طرف کا جڑی زور  $س$  ہے اور رخ  $ق$  پر نیچے کی طرف جڑی زور  $س$  + معن  $س$  ہے۔ نیز فرض کرو کہ  $ق$  پر جھکاؤ کا



معیار اثر لہر ہے اور اس لئے ق پر جھکاؤ کا معیار اثر م + مف مڑ ہوگا۔

(بہلی شکل میں ف ق کو بڑے پیمانہ پر دکھایا گیا ہے)

فرض کرو کہ ف ق پر بی اکائی طول وزن لا ہے اس لئے ف ق کے وزن کو لا مف لا کے مساوی فرض کر سکتے ہیں جو اس کے وسطی نقطہ پر عمل کرتا ہے تب ف ق کے لئے ف کے گرد معیار اثر لینے سے

$$م = م + مف م - (س + مف س) - لا مف لا - \frac{مف لا}{۲}$$

$$\therefore س + مف س = \frac{مف م}{مف لا} - \frac{۱}{۲} لا مف لا$$

انتہا لینے سے جب مف لا صفر ہو جائے تو کسی طرح محدود وزنوں سے لدی ہوئی سلاخ کے لئے

$$س = \frac{فر م}{فر لا}$$

اس سے ظاہر ہے کہ اگر ہم جڑی زرد کا منحنی کھینچیں اور نیز جھکاؤ کے معیار اثر کا منحنی کھینچیں تو پہلے منحنی کا متین دوسرے منحنی کی ڈھال کو تعبیر کرے گا۔ نیز اگر اس عنصر ف ق پر عمل کرنے والی قوتوں کو استصواباً تحلیل کریں تو

$$س = س + مف س + لا مف لا$$

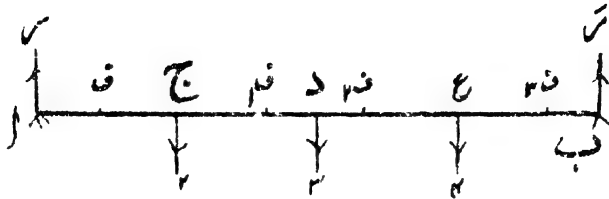
$$\frac{فر س}{فر لا} = - لا ، انتہا میں$$

۱۳۰۔ مشق ۱۔ ایک شہتیر جس کا وزن انڈر انداز ہو سکتا ہے ۱۲ فٹ لمبا ہے۔ شہتیر

کو اس کے کناروں پر سہارا گیا ہے اور اس کے ایک سرے سے چوتھائی فاصلہ پر ۲ ٹن کا وزن رکھا ہے اس کے وسطی نقطہ پر ۳ ٹن کا وزن اور اس کے دوسرے سرے سے چوتھائی فاصلہ پر ۴ ٹن کا وزن رکھا ہے۔ جھکانے والے معیار اثر اور جڑی زرد کے منحنی پر سے شہتیر کے لئے معلوم کرو۔

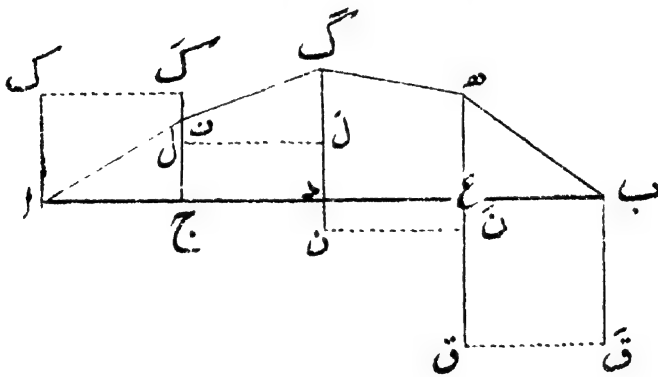
فرض کرو کہ س اور س سروں پر کے سہاروں کے تعامل میں۔ اس لئے ان کے

سروں کے گرد معیار اثر لینے سے ہیں آسانی سے حاصل ہوتا ہے کہ  $سا = سب$  اور  $سا = ۵$  ہٹ



$$\begin{array}{cccc} \frac{سا}{سا} & \frac{سا}{سا} & \frac{سا}{سا} & \frac{سا}{سا} \\ \frac{سا}{سا} & \frac{سا}{سا} & \frac{سا}{سا} & \frac{سا}{سا} \end{array}$$

فرض کرو کہ ل اور ج کے درمیان کسی نقطہ ف پر جھکاؤ کا معیار اثر اور جزی زور  
ہر اور س ہیں جیسے کہ شکل میں دکھائے گئے ہیں اسی طرح ج اور د کے درمیان کسی نقطہ  
ف کے لئے یہ بالترتیب ہر اور س ہیں اور علیٰ ہذا القیاس -



فرض کرو کہ لا = لاف، لا = لام، اور لاف = لام، اف = لام  
ن پر کے جھکاؤ کے معیار اثر کو ف کے بائیں طرف کے حصہ کی قوتوں کے معیار اثروں کے مساوی  
فرض کرنے سے

$$\begin{array}{l} \text{ہر} = س \times لا = لا \\ \text{س} = س = س \end{array} \quad \dots (۱)$$

اسی طرح سے ف کے لئے

$$\text{مر} = \text{مر} \times \text{لام} - ۲ = (\text{لام} - \text{اج}) \times ۲ = ۲ - ۲ = ۰ \dots (۲)$$

اور  $\text{سم} = \text{سم} - \text{مر} = ۲ - ۲ = ۰$

فسم کے لئے ف کے دائیں طرف کے حصہ پر غور کرنے سے

$$\text{مر} = \text{مر} (۱۲ - \text{لام}) - \text{سم} = (\text{لام} - \text{ع}) \times \text{سم} = ۲۴ - \text{لام} \dots (۳)$$

$\text{سم} = ۳ - \text{مر} = ۱ - ۰ = ۱$

اسی طرح بالآخر فسم کے لئے ک فسم کے دائیں طرف کے حصہ پر غور کرنے سے

$$\text{مر} = \text{مر} (۱۵ - \text{لام}) = ۵ - ۴۰ = -۳۵ \dots (۴)$$

$\text{سم} = -۳۵ - \text{مر} = -۳۵ - (-۳۵) = ۰$

(۱۲۳) اگر ہم شہتیر کے ہر ایک نقطہ پر اتنے طول کا معین کھینچیں کہ اس سے اس نقطہ پر کا جھکاؤ کا معیار اثر تعبیر ہو تو ان معینوں کے سروں کے طریق خطوط مستقیم اف، ف گ، گ، گھ، اور ہ با ہونگے جہاں ج ف، د گ، ع ہ بالترتیب ۱۲، ۱۸ اور ۱۵ فٹ ٹنوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

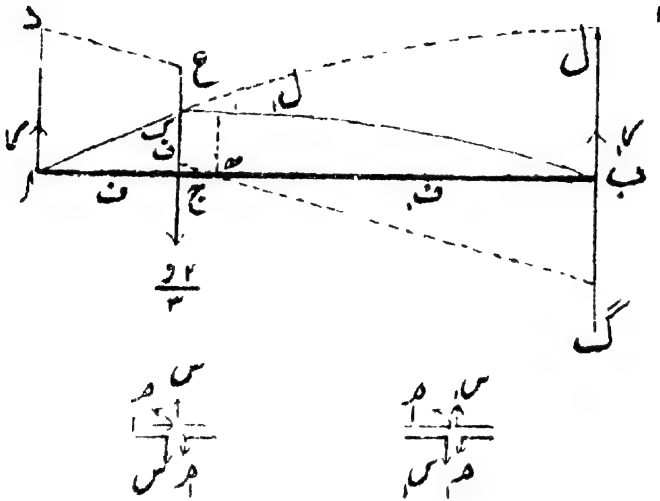
مختلف نقطوں پر مرکز بوجھوں سے لہے ہوئے شہتیروں کی صورت میں ہمیشہ دیکھا جائے گا کہ جھکاؤ کے معیار اثروں کے منحنی خطوط مستقیم ہوتے ہیں۔ اس لئے صرف مرکز بوجھ والے نقطوں پر جھکاؤ کے معیار اثروں کی قیمتیں معلوم کر لینی کافی ہو گئی۔

مرکز بوجھ کے نقطہ پر مثلاً ج پر جزئی زور میں تسلسل نہیں رہتا۔ اس عدم تسلسل کی وجہ یہ مفروض ہے کہ وزن مذکور ایک جگہ مرکز کر کے ہندسی نقطہ پر لگا یا گیا ہے۔ عملاً وزن ایسے نقطہ پر عمل نہیں کر سکتا اس لئے اس قسم کا عدم تسلسل ایک سخت واقعہ نہیں رہتا۔ مشق ۲۔ اب ایک سخت یکساں سلاخ ہے جس کا وزن ۱۰ اور طول ۲ ہے اور اسے اس کے کناروں ۱ اور ۲ پر افقی وضع میں مہیا کیا گیا ہے ایک وزن ۲۲ شہتیر کے ایک ایسے نقطہ ج پر رکھا گیا ہے کہ ل ج = ۱۱ جھکاؤ کے معیار اثر اور

لہ نیز جزئی زوروں کے منحنی افقی خطوط مستقیم ک، ل، ن، ن، ق، ق ہوں گے جہاں اک، ج، ل، دن اور ع، ق بالترتیب ۴، ۲، ۱ اور ۰ ہوں گے۔ ٹنوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

تبدیلی زور کے مٹھنی کیسے ہوتی۔

اگر سلاخ کے اکائی طول کا وزن  $w$  ہو تو  $w = 2$  و  $w$



۱ اور ب کے گرد معیار اثر لینے سے ہیں آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ  $s = w$  اور  $s = \frac{w}{2}$  اور ج کے درمیان کسی نقطہ ف کے لئے جہاں  $f = 1$  لا جھکاؤ کا معیار اثر  $w$  = ف کے گرد ا ف پر عمل کرنے والی قوتوں کا معیار اثر (۱)

$$s = w - \frac{w}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{w}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

اگر نقطہ ف پر تبدیلی زور  $s$  ہو تو

$$s - s = w$$

$$s = \frac{w}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

(۱۲۴)

ج اور ب کے درمیان کسی نقطہ ف کے لئے جہاں  $اف = لا$  اسی طرح سے حاصل ہو سکتا ہے

$$م = سر - لا - د لا \times \frac{۱}{۳} - لا - \frac{۱}{۳} (لا - \frac{۱}{۳})$$

$$= - \frac{د}{۳} (لا - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳}) \dots \dots (۳)$$

$$اور س - سر = د لا + \frac{د۲}{۳}$$

$$اس لئے س = - \frac{د}{۱۲} (لا - \frac{۱}{۳}) \dots \dots (۴)$$

کسی مناسب طول کے انتصابی خط کو جھکاؤ کے معیار اثر کی اکائی فرض کرو تو مساوات (۱) ایک مکافی کے قوس آگ کو تعبیر کرتی ہے جس کا رأس نقطہ ل پر ہے جو ب سے انتصا با اوپر ہے اور مساوات (۳) مساوی مکافی کے قوس ک ب ہے جس کا رأس ل ، انتصا بی خط لا =  $\frac{۱}{۳}$  پر ہے ، یعنی ہل پر ہے ۔

اسی طرح کوئی مناسب طول کے انتصا بی خط کو جڈی زور کی اکائی مانو۔ تب (۲) خط مستقیم د ع کو اور (۴) خط مستقیم ف ہ گ کو تعبیر کر گجا۔  
حسب ذنفعہ گوشہ کسی نقطہ پر جڈی مخنی کا معین متناظر نقطہ پر جھکاؤ کے معیار اثر کے مخنی کے ڈھال کے مساوی ہوتا ہے ہر دو مخنی ج میں سے گزرنے والے معین پر عدم تسلسل رکھتے ہیں ۔  
بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر

$$لا = \frac{۱}{۳} ، سے حاصل ہوتا ہے$$

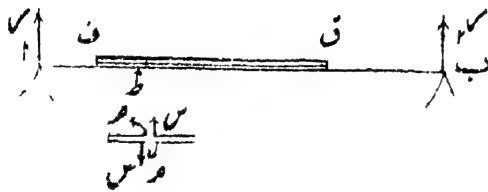
اور تب یہ مساوی ہوتا ہے و  $\times \frac{۱}{۹}$  کے ۔

ان تمام صورتوں میں جبکہ شہتیر یکساں طور پر لدا ہوا ہو اور مختلف نقطوں پر سہارا ہوا ہو ہم دیکھیں گے کہ جھکاؤ کے معیار اثروں کے مخنی مکافیوں کے حصے ہونے میں

جن کا وتر خاص ایک ہی ہوتا ہے۔

مشق ۳۔۔ ایب اعلیٰ شہتیر لب کا طول ۲ ل ہے اور اس کا وزن نظر انداز ہو سکتا ہے۔ شہتیر دونوں سروں پر سہارا ہوا ہے اور اس پر کیساں کثافت و کی متحرک گاڑی ف ق گزر رہی ہے گاڑی کا طول ۲ ل (۱ > ۲ ل) ہے۔

شہتیر کے کسی نقطہ و پر بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ اس وقت واقع ہوتا ہے جب نقطہ ط گاڑی کے طول کو اسی نسبت سے تقسیم کرتا ہے جس میں یہ لب کو تقسیم کرتا ہے۔



فرض کرو کہ سہ اور سہ سہاراؤں پر کے تعامل ہیں اور  $L = 2L$  اور لب

$$\frac{F}{L} = \frac{F}{L} (1 - \frac{L}{2L})$$

$$\frac{F}{L} = \frac{F}{L} (1 + \frac{L}{2L})$$

فرض کرو کہ  $L = 0$ ، اور ط پر جھکاؤ کا معیار اثر ہے۔ حصہ (ط) کے لئے معیار اثر

لینے سے

$$M = \frac{F}{L} (L - \frac{L}{2})$$

$$= \frac{F}{L} (1 - \frac{L}{2L}) (L - \frac{L}{2L}) \dots (1)$$

نقطہ ط کے ایک معلوم محل کے لئے مڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ  $\frac{F}{L} = 0$ ۔

یعنی جب  $0 = \frac{1}{L} + (1 - \frac{1}{L}) = 0$

یعنی جب  $1 = 1 - \frac{1}{L}$  ..... (۳)

اور تب  $\frac{F_{\text{ط}}}{F_{\text{ب}}} = \frac{1 - \frac{1}{L}}{1 - \frac{1}{L}} = \frac{1 - \frac{1}{L}}{1 - \frac{1}{L}} = 1$

لا کی جو قیمت (۲) سے حاصل ہوتی ہے اسے (۱) میں مندرج کرنے سے

مر کی بڑی سے بڑی قیمت  $= \frac{1}{L} (1 - \frac{1}{L}) (1 - \frac{1}{L})$

پس بڑے سے بڑے جھکاؤ کے سیار اثر کا سنگینی مکانی ہوتا ہے جس کا اس اب کے وسطی نقطہ کے انتصاباً اد پر ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ط پر کا جزئی زور س ہے۔ حصہ لٹ کے لئے انتصاباً تحلیل کر کے

س = ۳ - د (۱ - ل) =  $\frac{1}{L} (1 - \frac{1}{L} - \frac{1}{L} - \frac{1}{L}) + (1 - \frac{1}{L}) = \frac{1}{L} (1 - \frac{1}{L})$

نقطہ د کے کسی معلومہ محل کے لئے یہ صریحاً بڑھتا ہے جیسے لا بڑھتا ہے اور بڑے سے بڑا اس وقت ہوتا ہے جب ف نقطہ ط پر منطبق ہو اور اس وقت س کی بڑی سے بڑی قیمت

$= \frac{1}{L} [1 - \frac{1}{L} - \frac{1}{L} - \frac{1}{L}]$

پس بڑے سے بڑے جزئی زور کا سنگینی خط مستقیم ہے۔

مشق ۴ — ایک صلب افقی سلاح ایک کنارہ ا پر اور کسی دوسرے نقطہ ج پر سہاری گئی ہے۔ اگر اس پر پکیاں طور پر تقسیم کیا ہوا بڑے سے بڑا وزن اس طرح رکھا جائے کہ یہ نہ ٹوٹے تو ثابت کرو کہ ج سلاح کو نسبت ۱:۱+۲ میں تقسیم کرے گا۔

فرض کرو کہ ا ب = ۲، ا ج = ۱، نیز فرض کرو کہ ل اور ج پر کے تقابل

ساہ اور ساہ ہیں، پس اگر اکائی طول پر وزن د ہو تو ساہ =  $\frac{1}{L} (1 - \frac{1}{L})$

$$\text{اور } \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$$

کرنا > ل ج تو کسی ایسی تزلزل کے لئے جس کا فاصلہ اسے لاہر جھکاؤ کا معیار اثر

$$= \frac{2}{1} - \frac{2}{1} = 0$$

اور اس لئے یہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ  $\frac{2}{1} = 0$ ۔

اس لئے ا ج کے لئے بڑے سے بڑے جھکاؤ کا معیار اثر

$$= \frac{2}{1} - \frac{2}{1} = \frac{2}{1} - \frac{2}{1} = 0 \quad (1)$$

تیز حصہ ج ب کے لئے بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر ہر کجا ج پر ہوتا ہے اور

$$= \frac{2}{1} - \frac{2}{1} = \frac{2}{1} - \frac{2}{1} = 0 \quad (2)$$

اگر (۱) اور (۲) مساوی نہ ہوں تو ہم بڑے کو کم کر سکتے ہیں اور اس لئے ماکو بدلتے سے ٹوٹنے کے بڑے سے بڑے میلان کو کم کر سکتے ہیں۔

اگر وہ مساوی ہوں تو بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر حسب خواہش چھوٹا ہو سکتا ہے۔

$$\frac{2}{1} - \frac{2}{1} = \frac{2}{1} - \frac{2}{1} = 0 \quad (3)$$

$$\text{اور تب } \frac{2}{1} - \frac{2}{1} = \frac{2}{1} - \frac{2}{1} = 0$$

$$\text{یعنی } 1 = 1$$

$$\text{اس صورت میں } \frac{2}{1} - \frac{2}{1} = \frac{2}{1} - \frac{2}{1} = 0$$

(۳) کے باقی حصوں سے نامکن نتائج حاصل ہونے میں کیونکہ ماکو سرکجا مثبت ہونا چاہیے اور نیز ل سے بڑا اور ل سے چھوٹا ہونا چاہیے۔



## مثالیں

۱۔ ایک سلاخ  $\Delta$  ب اپنے کناروں پر اس طرح سہاری ہوئی ہے کہ یہ متوازی افق ہے۔ جڑی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو

(۱) جبکہ سلاخ یکساں طور پر لدی ہوئی ہو۔ دباؤ کہ فٹ پر کا جھکاؤ کا معیار اثر

ایسے بدلتا ہے جیسے  $\Delta F \propto F$

(۲) جبکہ اس کے اپنے وزن کو نظر انداز کر دیا جائے لیکن اس کے وسطی نقطہ پر

ایک وزن دے۔

۲۔ ایک سلاخ  $\Delta$  ب ایک نقطہ  $\Delta$  پر اس طرح ثابت ہے کہ وہاں یہ افق کے متوازی ہے جڑی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے سختی کھینچو

(۱) جبکہ یہ یکساں طور پر لدی ہوئی ہو

(۲) جبکہ اس کے وزن کو نظر انداز کیا جائے لیکن اس کے وسطی نقطہ پر ایک

وزن دے ہو

۳۔ ایک شہتیر ۸۰ فٹ لمبا اپنے وسطی نقطہ کے سہارے پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کے ایک سرے پر ۵۰ ٹن وزن ٹنک رہا ہے اور دوسرے سرے پر ایک رسی کے ذریعہ زمین کے ساتھ بندھا ہے اس کے جڑی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو۔

۴۔ ایک شہتیر ۲۵ فٹ لمبا ہے اور ایک طرف ایک سرے پر اور دوسری طرف دوسرے سرے سے ۵ فٹ کے فاصلہ پر سہارا ہوا ہے اس کے طول پر ۵۰۰ پونڈ فی فٹ کا یکساں وزن لدا ہوا ہے اور سہارے سے بڑھے ہوئے سرے پر ۱۰۰۰ پونڈ کا وزن ٹنک رہا ہے سہاروں پر کے دباؤ معلوم کرو، نیز بڑھے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر اور اس معیار اثر کی تراش کا محل معلوم کرو۔

جھکاؤ کے معیار اثر اور جڑی زور کے سختی بھی کھینچو۔

[دباؤ ۵۷۵ ۲۱۸ پونڈ وزن اور ۱۲۰ ۲۰۳ پونڈ وزن میں، جھکاؤ کا بڑے

سے بڑا معیار اثر سہارے کے دوسرے نقطہ پر ہے]

۵ — ایک شہتیر ۱ ب ۱۰ فٹ لمبا ہے اور یہ دو ایسے نقطوں پر سہارا ہوا ہے جن کے فاصلے ۱ سے ۲ اور ۷ فٹ ہیں ۱ اور ۲ ب پر بالترتیب ۱ اور ۳ ٹن کے وزن بند ہے ہیں اور علاوہ ازیں سہاروں کے درمیانی طول پر ۲ ٹن فی فٹ کا یکساں وزن لدا ہوا ہے۔ جھکاؤ کے معیار اثر اور جڑی زور کے نقشے کھینچو اور ترسیمی طریق پر یا کسی اور طرح سے معلوم کرو کہ جھکاؤ کا معیار اثر کہاں صفر ہے۔

۶ — ایک بیرم ۱ ب کے سرے کو رسی کے ذریعہ زمین کے ساتھ بانڈہ دیا گیا ہے اور اسے وسطی نقطے ج پر سہارا کیا ہے جو ۱ کی ہمواری پر واقع ہے۔ جھکاؤ کے معیار اثر اور جڑی زور کے منحنی کھینچو

(۱) جبکہ ۱۰ ٹن کا وزن ب پر لٹکایا جائے اور ۵ ٹن کا وزن ج کے وسطی نقطہ پر لٹکایا جائے۔

(۲) جب ۱۰ ٹن کا وزن ب پر لٹکایا جائے اور ج پر ۵ ٹن کا تقسیم شدہ وزن لٹکایا جائے۔

دونوں صورتوں میں شہتیر کے وزن کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

۷ — ۱ ب ایک افقی شہتیر ہے جس کا طول ۱۸ فٹ ہے اور جو اپنے سروں ۱ اور ۲ ب پر سہارا ہوا ہے۔ اس پر دو نقطے ج اور د ایسے ہیں کہ ج = ۶ فٹ اور د = ۱۰ فٹ ج اور د پر دو وزن ۴ اور ۵ ٹن کے رکھے ہیں اور اس پر ۱ سے ج تک ۱ ٹن فی فٹ کے حساب سے ج سے د تک ۵ ٹن فی فٹ کے حساب سے اور د سے ج تک ۲ ٹن فی فٹ کے حساب سے یکساں وزن لدا ہے ہوئے ہیں شہتیر کے مختلف حصوں کے لئے جڑی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو۔

۸ — ایک برقی ٹرام کا کھنبا انتصاباً لگا ہوا ہے اور اس کے اوپر کے سرے پر ایک بازو باہر کو نکلا ہوا ہے۔ جو کھنبے کے مرکزی خط سے ۱۰ فٹ کے فاصلہ پر تاروں کو سہارا ہوئے ہے۔ ہر ایک کھنبا ۲۰۰ پونڈ تار کو سنبھالے ہوئے ہے اور باہر نکلے ہوئے بازو کا وزن ۲۰۰ پونڈ ہے۔ یہ فرض کر کے کہ بازو کا وزن اس کے تمام طول پر یکساں طور پر منقسم ہے بازو کے طول پر جڑی زور اور جھکاؤ کے منحنی کھینچو اور کھنبے کے پینڈے پر جھکاؤ کا معیار اثر محسوب کرو۔

۹۔ ایک افقی شہتیر ۲۵ فٹ لمبا ہے، ایک طرف ایک سرے پر اور دوسری طرف ایک نقطہ ج پر جو دوسرے سرے سے ۵ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہے سہارا ہوا ہے۔ وزن کی شدت ب سے ۱ تک بندریج  $\frac{1}{4}$  ٹن فی فٹ سے  $\frac{1}{4}$  اٹن فی فٹ تک بڑھتی ہے۔ شہتیر میں بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار اثر اور جزی زور معلوم کرو نیز جھکاؤ کے معیار اثر اور جزی زور کے منحنی کھینچو۔

۱۰۔ ا ب ایک سخت یکساں شہتیر ہے جس کا وزن ۱ اور طول ۲ ل ہے۔ اسے دو وزن سروں پر اس طرح سہارا گیا ہے کہ افق کے متوازی ہے۔ ایک شخص جس کا وزن ۵۰ شہتیر کے ایک ایسے نقطہ ن پر کھڑا ہے کہ  $\angle \text{ن} = \angle \text{لا}$  (حل) ثابت کرو کہ جھکاؤ کے معیار اثر کا منحنی دو ایسے مکافوں کی دو قوسوں پر مشتمل ہے جن کے وتر خاص مساوی ہیں اور جھکاؤ کا معیار اثر اُس نقطہ پر بڑے سے بڑا ہوتا ہے جس کا فاصلہ ا سے ل۔  $\frac{1}{2}$  ل ہے۔

۱۱۔ ایک شہتیر کے سروں کے درمیان ۸۰ فٹ کا فاصلہ ہے اور اس کا وزن فی فٹ طول ایک ٹن ہے۔ شہتیر کے اوپر دس فٹ لمبا متحرک بوجھ ہے جس کا وزن ۲ ٹن فی فٹ طول ہے۔ تقریبی پیمانہ پر بڑے سے بڑے مثبت اور منفی جزی زور کا منحنی کھینچو جبکہ متحرک بوجھ ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرتا ہے۔

۱۲۔ ایک ریل گاڑی جو  $\frac{1}{4}$  اٹن فی فٹ طول کے متحرک بوجھ کے مساوی ہے ایک ایسے گاڑ پر سے گزرتی ہے جس کے سروں کا درمیانی فاصلہ ۱۲۰ فٹ ہے شہتیر کے ہر نقطہ کے لئے بڑے سے بڑے جزی زور اور بڑے سے بڑے جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو جبکہ (۱) متحرک بوجھ ۱۲۰ فٹ سے زیادہ طول رکھتا ہو نیز جبکہ (۲) اس کا طول ۶۰ فٹ ہو۔

۱۳۔ ۱۰ ٹن اور ۵ اٹن کے دو متحرک بوجھ ایک دوسرے سے  $\frac{1}{4}$  فٹ کے فاصلہ پر ۵ فٹ لمبے گاڑ کو اس طرح عبور کرتے ہیں کہ بڑا وزن اُس کے چلتا ہے۔ تمام گاڑ کے لئے بڑے سے بڑے جھکاؤ کے معیار اثر اور جزی زور کے منحنی کھینچو۔

۱۴۔ ایک مسلسل بوجھ جس کا وزن ۵ ٹن فی فٹ طول ہے ایک ہموار بل پر کھینچا گیا

پہلے ڈنٹ طول کے ایک واحد استوار گا ڈر پر مشتمل ہے۔ بوجھ استوار نہیں ہے اور پل سے زیادہ لمبا ہے۔ پل کے اپنے وزن کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔ گا ڈر پر ایک نقطہ ن ایسا ہے جو نزدیک کے سرے سے ک فٹ کے فاصلہ پر ہے، ثابت کر دو کہ ن پر بڑے سے بڑا جزیی زور  $\frac{W(1-K)}{2}$  ڈنٹ ہے اور دکھاؤ کہ جب متحرک بوجھ کسی مقام

پر ہو اور اس کے ایک سرے سے ایک خط انتہائی وس کھینچا جائے جو ن پر کے جزیی زور کے متناسب ہو تو وس سے جو سختی مرسم ہوتا ہے وہ چارمکانی کی قوسوں اور ایک خط مستقیم پر مشتمل ہوتا ہے۔

۱۵۔ ایک یکساں گا ڈر اپنے سروں کے سہارے ساکن ہے اور وزن اس کے وسطی نقطہ پر مرکوز ہے۔ ثابت کر دو کہ بڑے سے بڑا جھکاؤ کا معیار انٹر اس صورت کی نسبت جب کہ وزن یکساں طور پر تقسیم شدہ ہو دو چند بڑا ہوگا۔

۱۶۔ ایک پتلی یکساں سلاخ کے نچلے سرے کو ایک چکنے قبضہ کے ساتھ وصل کر دیا گیا ہے اور اس کا اوپر کا سراب ایک چکنی انتہائی سطح مستوی پر ساکن ہے۔ ثابت کر دو کہ کسی نقطہ ن پر ٹوٹنے کا میلان ایسے بدلتا ہے جیسے ل اور ب سے ن کے فاصلوں کا حاصل ضرب۔

۱۷۔ ایک تختہ جس کا وزن ن و اور طول ل ہے متوازی الافقی محل میں اپنے سروں پر ساکن ہے۔ ایک آدمی جس کا وزن و ہے اس کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک اس طرح چل سکتا ہے کہ تختہ ٹوٹنے کے عین قریب ہوتا ہے۔ اگر تختہ کے ایک سرے کو ثابت کر دیا جائے اور دوسرا سر آزادانہ حرکت کر سکے تو ثابت کر دو کہ اب آدمی صرف  $\frac{L}{3}$  (۱-۳ ن) فاصلہ تک چل سکتا ہے۔

۱۸۔ سیدھی بے وزن وصل کی ہوئی سلاخوں کے ذریعہ ایک محراب اس طرح بنانا مقصود ہے کہ اس کے کناروں کا درمیانی فاصلہ و اور ارتفاع ہ ہو اور اس میں  $\frac{L}{2}$  کے باہمی افقی فاصلوں پر سات مساوی اوزان و بندھے ہوں اور سلاخوں کے کسی نقطہ پر کوئی جھکاؤ کا معیار اثر نہ ہو۔ بتاؤ کہ تریسیمی عمل سے سلاخ کی شکل کس طرح متعین ہو سکتی ہے اور ثابت کر دو کہ سروں کو ساکن رکھنے کے لئے جو افقی قوتیں لگاتی

پڑتی ہیں وہ  $\frac{1}{2}$  کے مساوی ہیں۔

۱۹۔ ایک یکساں سلاخ کا طول ۱ اور وزن دس ہے۔ اس کے سروں کے ساتھ مساوی طول ب کی رسیاں بندھی ہیں جن کے دوسرے سرے دو ایسے ثابت نقطوں کے ساتھ بندھے ہیں جن میں سے ایک دوسرے سے انتصبا  $\frac{1}{2}$  فاصلہ اونچا ہے۔ اگر سلاخ کو یکساں تراوی لڑھکا رہے کے ساتھ انتصبا بی خط کے گرد گھمایا جائے تو

ثابت کر دو کہ کسی سرے سے فاصلہ لا پر جھکاؤ کا معیار اثر  $\frac{1}{2}$  (۱-۱) اس سے ہوگا جہاں

اور ب سا حجم  $\frac{1}{2}$  ہے افق کے ساتھ۔ نیز بتاؤ کہ رسیوں کے تناؤ مساوی ہیں

۲۰۔ ایک ہلکی افقی سلاخ جس کا طول ۱ ہے اپنے سروں پر ساکن ہے۔ سلاخ کو اس طرح درزی بنایا گیا ہے کہ کسی نقطہ پر ٹٹنے کا میلان نقطہ مذکور پر بی اکائی طول وزن کے مناسب ہے۔ ثابت کر دو کہ کسی نقطہ پر کا وزن ایسے بدلتا ہے جیسے جب  $\frac{1}{2}$  جہاں لا اس نقطہ کا سلاخ کے ایک سرے سے فاصلہ ہے۔

(اگر ایک سرے پر کا تعامل ہو اور اس نقطہ پر جس کا فاصلہ سلاخ کے ایک سرے سے لا ہو بی اکائی طول وزن ۱ ہو اور اس نقطہ پر جس کا فاصلہ اسی سرے سے لا ہے جھکاؤ کا معیار اثر لہ ۱ ہو تو مترابط سوال کی رو سے

$$L = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (1-1) \quad \text{و فرلا}$$

اس لئے لا کے لحاظ سے دو دفعہ تفرق کرنے سے

$$L = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \therefore \quad (1-1) \quad \text{جب } (1-1) \quad \text{جہاں } 1 \text{ اور } 1 \text{ مستقل ہیں۔}$$

نیز چونکہ ہر ایک سرے پر جھکاؤ کا معیار اثر صفر ہوتا ہے اس لئے ۱ صفر ہونا چاہیئے جب کہ لا = ۱ یا ۱

$$\text{اس لئے } 1 = \frac{1}{2} \quad \text{اور} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

۲۱ — ایک تاجرس کا وزن وہ ہے نصف دائرہ کی شکل کا ہے جس کا نصف قطر وہ ہے تاجر ایک انتصابی سطح مستوی میں ایک سرے پر اس طرح لٹک رہا ہے کہ یہ آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ کسی نقطہ پر جھکاؤ کا معیار اثر معلوم کرو۔

[دفعہ ۴۶۱ مشتق ۱ میں یہ دکھایا جائے گا کہ تاجر کا مرکز ثقل  $\frac{1}{2}$  سے  $\frac{1}{3}$  فاصلہ پر ہوتا ہے، نیز تقادل کے لئے ضروری ہے کہ کٹس سپارے کے مقام  $\frac{1}{3}$  کے عین نیچے ہو۔ اس لئے  $\frac{1}{3}$  میں سے گزرنے والا قطر خط انتصابی کے ساتھ ایک زاویہ  $\frac{2}{3}$  عہ ایسا بنائے گا کہ  $\frac{2}{3}$  =

اگر تاجر کا کوئی نقطہ  $\frac{1}{3}$  ایسا ہو کہ  $\frac{1}{3}$  خط انتصابی کے ساتھ زاویہ  $\frac{2}{3}$  بنائے تو  $\frac{1}{3}$  پر جھکاؤ کا معیار اثر =  $\frac{1}{3}$  کی ایک طرف کی سب بیرونی قوتوں کے معیار اثروں کا مجموعہ

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{3} \text{ فرخہ } (12 \text{ جب فرخہ } (ع - ف) - 12 \text{ جب طجم } (ع - ط))$$

$$= \frac{1}{3} \left[ (ع - ط) \text{ جب } (ع - ط) + (ع - ط) \text{ جب } (ع - ط) \right]$$

۲۲ — ایک تپائی تین مسادہ سخت یکساں سلاخوں پر مشتمل ہے تینوں سلاخوں کے ایک ایک سرے کو ایک جگہ آزادانہ وصل کر دیا گیا ہے۔ اس مقام وصل سے کیتلی لٹک رہی ہے۔ باقی سرے زمین پر ٹکے ہوئے ہیں اور انھیں پھسلنے سے روکنے کے لئے ایک چکنا مسند پر حلقہ ان کے گرد زمین پر قائم ہے۔ ثابت کرو کہ ایک سلاخ کے جھکاؤ کا معیار اثر اس کے وسطی نقطہ پر بڑے سے بڑا ہوگا اور یہ سلاخ کے طول اور کیتلی کے وزن پر منحصر نہیں ہوگا۔

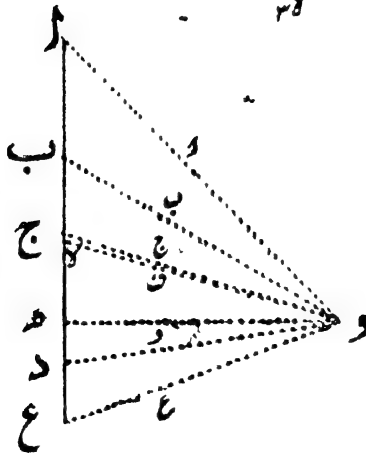
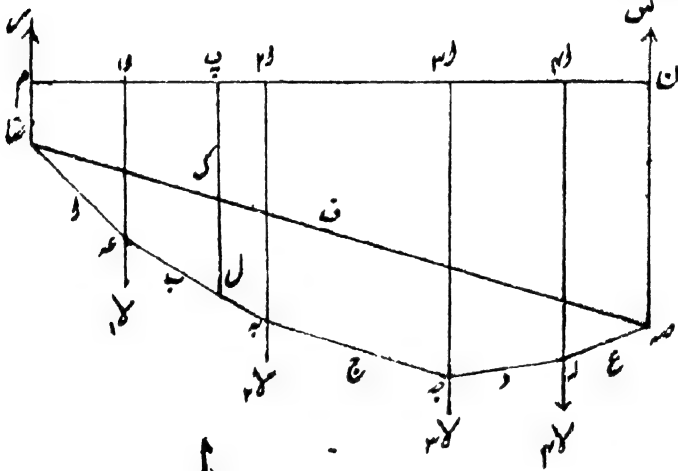
۲۳ — ۲ طول کی ایک یکساں سلاخ دو کھونٹیوں پر جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اور جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ج ہے متشاکلاً پڑی ہے۔ اگر  $2 > 2$  ج تو ثابت کرو کہ سلاخ کے ٹوٹنے کا بڑے سے بڑا میلان کھونٹی پر ہوگا اگر  $2 < (2 + 2)$  ج اور سلاخ کے وسطی نقطہ پر ہوگا اگر  $2 > (2 + 2)$  ج لیکن اگر  $2 < 2$  ج تو ٹوٹنے کا امکان بڑے سے بڑا کھونٹی پر ہوگا۔ اگر  $2 = (2 + 2)$  ج تو بتاؤ کہ کیا

واقع ہوگا؟

اگر  $۲ > ج$  تو ایک کھونٹی پر اور مرکز پر جھکاؤ کے معیار اثر مختلف العلامت ہوتے ہیں اور ان کی صرف مطلق قیمتوں کا مقابلہ کرنا چاہیئے۔

۲۴۔ ایک سلاخ جس کا طول ۲ ل ہے یکساں طور پر لدی ہوئی ہے اور وزن کی شدت سلاخ کے وسطی نصف حصہ پر سروں پر کے چوتھائی حصوں پر کی شدت کا دو چندان ہے اسے مرکز سے متبادی الفضل دو ایسی کھونٹیوں پر سہارا مقصود ہے کہ سلاخ کا جھکاؤ کا معیار اثر کم از کم ہو۔ ثابت کرو کہ ہر ایک کھونٹی مرکز سے  $\frac{۲}{۳}$  فاصلہ پر ہونی چاہیئے۔

۲۵۔ ایک شہتیر جو اپنے دو نوں سروں پر سہارا ہوا ہے بہت سے مجتمع وزنوں سے لد ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ وزنوں کا رسیمانی کثیر الاصلاخ شہتیر کے جھکاؤں کے معیار اثر دن کا نقشہ ہے۔







اس لئے پ کے گرد اُن کے معیار اثروں کا مجموعہ  
 = عہ ب کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ب کا معیار اثر پ کے گرد  
 معہ صہ صنا کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ت کا معیار اثر ب کے گرد  
 اب ل ب کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ب کا ایک جزو ترکیبی انتصابی ہے  
 جس کا پ کے گرد کوئی معیار اثر نہیں ہے اور دوسرا جزو ترکیبی انقی ہے جس کا پ کے  
 گرد معیار اثر  $\text{پ} \times \text{ل}$  ہے۔

اسی طرح صہ صنا کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ت کا معیار اثر پ کے  
 گرد  $\text{پ} \times \text{ک}$  ہے۔

اس لئے قوتوں کا، کلام، کلام، اس کا مجموعی معیار اثر ت کے گرد

$$= \text{م} \times \text{پ} - \text{ل} - \text{ک} = \text{م} \times \text{ک} - \text{ل}$$

یعنی پ کے گرد جھکاؤ کا معیار اثر مقطوعہ ک ل سے تعبیر ہوتا ہے اور مقدار میں اس  
 حاصل ضرب کے مساوی ہے جس کا ایک جزو مقطوعہ ہے اور دوسرا جزو قطب  
 و سے وزنوں کے خط کا فاصلہ ہے۔

اسی طرح سے کسی دوسری صورت پر بحث ہو سکتی ہے۔

یہ بات قابل غور ہے کہ یہ مسئلہ دراصل وہی ہے جو دفعہ ۱۱ میں متوازی  
 قوتوں کے لئے ثابت ہو چکا ہے۔

مشق۔ ایک شہتیر ۶۰ فٹ لمبا اپنے دونوں سروں پر سہارا ہوا ہے اس کے ان نقطوں پر  
 جتنے فاصلے ایک سرے سے بالترتیب ۱۲ فٹ، ۲۸ فٹ، اور ۴۸ فٹ ہیں بالترتیب  
 ۶/۵ اور ۳۰ ٹن وزن ٹک رہے ہیں اس کا ریسمانی کثیر الاضلاع بناؤ اور بتاؤ کہ جھکاؤ  
 کے معیار اثر کے لئے اسے کس پلانہ پر پڑھنا چاہیئے۔

۲۔ جھکاؤ کے معیار اثر کے لئے دوسرا ترکیبی عمل ذیل میں مندرج ہے۔

فرض کرو کہ م ن = ل، م د = ک، م ل = پ، م ل = ق، اور م د =

= قہ م ب، م ن پر عمود کھینچو جو م ن ل کو تعبیر کرے اور اس پر پ، پ، پ،



$$= \text{س} \times \text{ن} - \text{لا} \times \text{ف} - \text{لا} \times \text{ف} - \text{لا} \times \text{ف}$$

$$= \frac{\text{ن} \times \text{س}}{\text{م}} - \frac{\text{س} \times \text{ل}}{\text{م}} - \frac{\text{ف} \times \text{لا}}{\text{م}} - \frac{\text{ف} \times \text{لا}}{\text{م}} - \frac{\text{ف} \times \text{لا}}{\text{م}} - \frac{\text{ف} \times \text{لا}}{\text{م}}$$

پس ف پر کا جھکاؤ کا معیار اثر

$$= \frac{\text{ن} \times \text{س}}{\text{م}} - \frac{\text{س} \times \text{ل}}{\text{م}} - \frac{\text{ف} \times \text{لا}}{\text{م}} - \frac{\text{ف} \times \text{لا}}{\text{م}} - \frac{\text{ف} \times \text{لا}}{\text{م}} - \frac{\text{ف} \times \text{لا}}{\text{م}}$$

$$= \text{ف} \times \text{لا} - \text{لا} \times \text{ف} - \text{لا} \times \text{ف} - \text{لا} \times \text{ف}$$

$$= \text{ف} \times \text{لا}$$

اسی طرح سے شہتیر کے کسی اور نقطہ کے لئے۔

سم ۱۔ دفعہ ۱۳۱ سے یہ ظاہر ہے کہ وزنوں لا، لا، لا، لا کا حاصل معادل ہے ع کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ب معہ صدر کے ساتھ عمل کرنے والی قوت ع کے، یعنی وزنوں لا، لا، لا، لا کا حاصل ریشمانی کثیر الاضلاع کے اضلاع ب اور ع کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے۔ اسی طرح سے اضلاع کے کسی اور زوج کے لئے۔

پس ریشمانی کثیر الاضلاع کے کسی دو اضلاع ب اور ع کے نقطہ

تقاطع میں سے اُن وزنوں کا حاصل گزرتا ہے جو ب اور ع کے درمیان واقع ہیں۔

اب فرض کرو کہ شہتیر کو مسلسل طور پر لا دا گیا ہے اس لئے ریشمانی کثیر الاضلاع

مسلسل منحنی ہوگا اور اس کے نقاط ع، و پر کے دو مماس اضلاع ب

اور ع ہوں گے۔



# آکھواں باب

## مرکز ثقل

۳۴۔ مادہ کا ہر ایک ذرہ زمین کے مرکز کی طرف کھینچتا ہے اور وہ قوت جس سے زمین کسی ذرہ کو اپنی طرف کھینچتی ہے ذرہ کی کمیت کے تناسب ہوتی ہے۔ ہر ایک جسم کو ذرات کا ایک مجموعہ خیال کیا جاسکتا ہے۔ اگر جسم زمین کے مقابلہ میں چھوٹا ہو تو اس کے اجزاء کو زمین کے مرکز کے ساتھ ملانے والے خطوط تقریباً متوازی ہونگے، باب ہذا میں ہم ان کو عین متوازی تصور کریں گے۔

پس ایک استوار جسم کے ہر ایک ذرہ پر ایک قوت انتصاباً نیچے کی طرف عمل کرتی ہے جس کو اس کا وزن کہتے ہیں۔ یہ سب قوتیں متوازی قوتوں کو ترکیب دینے کے طریقے سے جو دفعہ ۳۳ میں بیان کیا گیا ہے ترکیب یا کرا ایک واحد قوت میں تحویل ہو جاتی ہیں جو بلحاظ مقدار کے سب انفرادی قوتوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے اور جسم کے ایک خاص نقطہ پر عمل کرتی ہے۔ اس نقطہ کو جسم کا مرکز ثقل کہتے ہیں۔

مرکز ثقل۔ تعریف۔ کسی جسم کا یا ذروں کے کسی ایسے نظام کا جو باہم استوار طور پر مربوط ہوں مرکز ثقل وہ نقطہ ہوتا ہے جس میں سے جسم کے وزن کا خط عمل ہمیشہ گزرتا ہے۔

۳۵۔ چونکہ متوازی قوتوں کے حامل کا خط عمل معلوم کرنے کا عمل صرف قوتوں کے نقاط عمل اور مقداروں پر موقوف ہوتا ہے اور قوتوں کی سمت پر موقوف نہیں

ہوتا اس لئے مرکز ثقل کا نقطہ دہی رہتا ہے خواہ ہم جسم کو کسی زاویہ میں سے دکھادیں کیونکہ موخر الذکر صورت میں بھی جسم کے حصوں کے وزن متوازی ہونگے۔ اگرچہ ان کی سمت جسم کے لحاظ دونوں صورتوں میں ایک ہی نہیں ہوگی۔

اس سے ہم دکھا سکتے ہیں کہ جسم کا صرف ایک ہی مرکز ثقل ہو سکتا ہے کیونکہ اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ اس کے دو مرکز ثقل  $S_1$  اور  $S_2$  ہیں، اب جسم کو اس طرح گھماؤ کہ  $S_1$  افقی ہو جائے۔ اس طرح سے ہمیں انتصابی قوتوں کا ایک ایسا نظام مل جائے گا جن کا حاصل  $S_1$  اور  $S_2$  دونوں میں سے گزرے گا۔ لیکن چونکہ حاصل قوت خود لازمی طور پر انتصابی ہونی چاہیئے اس لئے یہ قوت افقی خط  $S_1$  میں سے نہیں گزر سکتی۔

اس لئے ہر جسم کا صرف ایک ہی مرکز ثقل ہو سکتا ہے۔

۴۔ اگر جسم اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کے سب جزیی حصوں کے وزنوں کو تقریباً متوازی خیال کیا جاسکے تو جسم کا مرکز ثقل ہونا ضروری نہیں ہے۔

بہر حال جسم کا وہ نقطہ جو ہمیں دفعہ ۳ کے عمل سے حاصل ہوتا ہے بہت ضروری اور اہم خواص رکھتا ہے، اس کو جسم کا مرکز کیت یا مرکز جمود بھی کہتے ہیں۔ اگر جسم یکساں کثافت کا ہو تو اس کا مرکز کیت مرکز ہندسی یا اوسط مرکز پر منطبق ہوتا ہے۔ ۵۔ پتلی یکساں سلاح  $L$  ب۔ اس کا مرکز ثقل  $S$  صریحاً اس کا وسطی نقطہ  $S$  ہے کیونکہ  $S$  اور  $L$  کے درمیان ہر ایک ذرہ کے متناظر دوسری طرف  $S$  اور  $L$  کے درمیان  $S$  سے اُسی فاصلہ پر ایک مساوی ذرہ موجود ہے۔

ایک یکساں متوازی الاضلاع  $AB$  ج  $D$ ۔  $D$  کے متوازی

خط کھینچنے سے متوازی الاضلاع کو بہت سے پتلے ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔ اب چونکہ ہر ایک ٹکڑے کا مرکز ثقل اس کا وسطی نقطہ ہے اس لئے کل شکل کا وسطی نقطہ  $D$  اور  $B$  ج کے وسطی نقطوں کو ملانے والے خط پر واقع ہے۔ اسی استدلال سے مرکز ثقل  $AB$  اور ج  $D$  کے وسطی نقطوں کو ملانے والے خط پر بھی واقع ہے۔ اس لئے مرکز ثقل مطلوبہ دتروں کے تقاطع پر واقع ہے۔

یکساں مثلثی پیرا ا ب ج - فرض کرو کہ ب ج اور ج ا کے وسطی نقطے د اور ع ہیں - ب ج کے متوازی خط کھینچ کر شکل کو بہت سے پتلے ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ ان سب ٹکڑوں کے مرکز ثقل اور بناءً علیہ کل شکل کا مرکز ثقل ا د پر واقع ہے - اسی طرح سے یہ ب ج پر بھی واقع ہے - پس مطلوبہ مرکز ثقل ا د اور ب ج کے نقطہ وصل پر واقع ہے - متشابہ مثلثوں ث ا ب اور ث د ع سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{ث د}{ث ا} = \frac{د}{ب} \text{ اور اس لئے } ث د = \frac{۱}{۲} ث ا \text{، اس سے ث کا مقام}$$

متعین ہو جاتا ہے -

ظاہر ہے کہ اگر اکب اور ج پر مساوی وزن رکھے جائیں تو ان کا مرکز ثقل بھی یہی نقطہ ث ہوگا، کیونکہ ب اور ج پر دو مساوی وزن د ا د پر ایک وزن ۲ کے مساوی ہونے ہیں اور یہ وزن اور ا پر کا ایک وزن د دونوں مل کر ث پر کے ایک وزن ۳ کے معادل ہو جاتے ہیں (دیکھو دفعہ ۳۱) اس لئے کوئی یکساں مثلث جہاں تک اس کے وزن سے تعلق ہے تین ایسے وزنوں کے نظام کے معادل متصور ہو سکتا ہے جن میں سے ہر ایک مثلث مذکور کے وزن کا ایک تہائی ہو اور اس کے کوؤں پر رکھا جائے -

یکساں چار سطحی ا ب ج د - فرض کرو کہ رخوں ا ب ج اور د ا ب

کے مرکز ثقل شہ اور شہم ہیں - رخ ا ب ج کے متوازی بہت سی مستوی سطوح کھینچ کر بہت سے پتلے ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ ہر ایک ٹکڑے کا مرکز ثقل اور بناءً علیہ کل چار سطحی کا مرکز ثقل د شہ پر واقع ہوتا ہے - اسی طرح سے یہ ج شہ پر بھی واقع ہوتا ہے - پس مطلوبہ مرکز ثقل شہ ان خطوط کا نقطہ تقاطع ہے - اب متشابہ مثلثوں سے ظاہر ہے کہ اگر

ا ب کا وسطی نقطہ ع ہو تو





جو قاعدہ کے مرکز کو اس کے ساتھ ملاتا ہے اور قاعدہ سے اس کا فاصلہ اس خط کے طول کا ایک چوتھائی ہوتا ہے۔

**قائم مستدیر مخروط کی سطح۔** چونکہ مخروط کے راس کو اس کے مستدیر قاعدہ پر کے لائنہا قریب قریب کے نقطوں کے ساتھ ملانے سے اس کی سطح کو لا انتہا مثلثی پتروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے اور ان سب کے مرکز ثقل مخروط کے قاعدہ کے متوازی اس سطح مستوی میں واقع ہوتے ہیں جس کا فاصلہ قاعدہ سے قاعدہ اور راس کے فاصلہ کا ایک تہائی ہو اس لئے کل مخروط کا مرکز ثقل بھی اسی طرح اس مستوی میں واقع ہوگا لیکن تشاکل سے ظاہر ہے کہ مرکز ثقل مطلوبہ مخروط کے محور پر واقع ہے اس لئے یہ وہ نقطہ ہے جہاں مذکورہ بالا سطح مستوی محور سے ملتی ہے۔ پس مطلوبہ مرکز ثقل محور پر کا وہ نقطہ ہے جس کا فاصلہ قاعدہ سے مخروط کے ارتفاع کا ایک تہائی ہو۔

۱۳۸۔ مرکز ثقل معلوم کرنے کے لئے عام ضوابط۔ ذروں کا ایک نظام ہے جن کے وزن  $m, m', m'', \dots$  ہیں اور جن کے محدود ثابت محوروں  $OA, OB, OC, \dots$  کے لحاظ سے  $(m, OA), (m', OA'), (m'', OA''), \dots$  (لا، مان، ی) ہیں ان کے مرکز ثقل  $G$  کے محدود  $(G, OA), (G, OB), (G, OC), \dots$  (لا، مان، ی) حسب ذیل طور پر حاصل ہوتے ہیں۔

$$OG = \frac{m \cdot OA + m' \cdot OA' + m'' \cdot OA'' + \dots}{m + m' + m'' + \dots}$$

$$OG = \frac{m \cdot OA + m' \cdot OA' + m'' \cdot OA'' + \dots}{m + m' + m'' + \dots} \text{ اور } OG = \frac{m \cdot OB + m' \cdot OB' + m'' \cdot OB'' + \dots}{m + m' + m'' + \dots}$$

ان ضابطوں کو دفعہ ۳۴ میں ثابت کیا گیا ہے کیوں کہ ذروں کے وزن متوازی قوتوں کے نظام کی ایک خاص صورت ہیں۔

اگر سب ذرے ایک خط مستقیم پر واقع ہوں تو پہلے ضابطہ سے ثقل کا مقام معلوم ہو سکتا ہے۔

اگر سب ذرے ایک سطح مستوی میں واقع ہوں تو صرف پہلے دو ضابطوں کی ضرورت پڑتی ہے۔

۱۳۹۔ جسم کے دو حصوں کا مرکز ثقل معلوم ہے کل جسم کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ معلومہ مرکز ثقل ثقل اور ثقل ہیں اور دو حصوں کے وزن  $W_1$  اور  $W_2$  ہیں تب مطلوبہ نقطہ ثقل دفعہ ۱۳۸ کی رو سے ثقل ثقل کو اس طرح تقسیم کرتا ہے کہ

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\text{ثقل ثقل}}{\text{ثقل ثقل}}$$

نقطہ ثقل دفعہ ۱۳۸ کے استعمال سے بھی معلوم ہو سکتا ہے۔

مشق۔ ایک ہی قاعدہ  $AB$  پر اس کی مختلف آجانیوں پر دو مساوی الساقین مثلث

$ABC$  اور  $ABD$  بنائے گئے ہیں جن کے ارتفاع بالترتیب ۱۲ انچ اور

۶ انچ ہیں۔  $AB$  سے ذرا بعد الاضلاع  $AC$  اور  $BD$  کے مرکز ثقل کا فاصلہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ  $AC$  اور  $BD$  پر عمود ہے

اور  $AB$  سے  $AC$  پر ملتا ہے اور دونوں مثلثوں

$ABC$  اور  $ABD$  کے مرکز ثقل بالترتیب

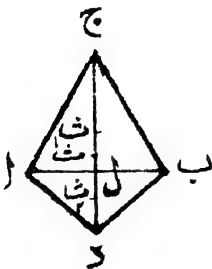
ثقل اور ثقل ہیں تب

$$AC \times \frac{1}{3} = BD \times \frac{1}{3}$$

$$AC \times 12 = BD \times 6 \Rightarrow 12 \times 12 = 6 \times BD \Rightarrow BD = 24$$

مثلثوں کے وزن ان کے رقبوں کے متناسب

ہوتے ہیں، اس لئے بالترتیب  $\frac{1}{3} \times 12$  اور  $\frac{1}{3} \times 6$  کے مساوی ہیں۔



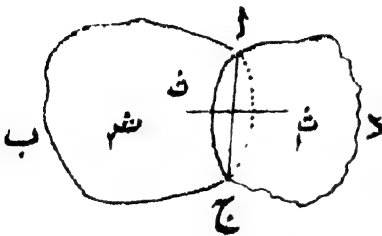
اگر کل شکل کا مرکز ثقل ہوتا

$$ج ث = \frac{\Delta ج اب \times ج ث + \Delta د اب \times ج ث}{\Delta ج اب + \Delta د اب} = \frac{۱۳ \times ۶ + ۸ \times ۱۲}{۶ + ۱۲}$$

اس لئے ل ث = ج ل - ج ث = ۲ انچ

اس شکل کو پتلے مقوے میں کاٹ کر اس نتیجہ کی تصدیق کر سکتے ہیں۔  
۱۴۰۔ کسی پورے جسم کا مرکز ثقل اور اس جسم کے ایک حصہ کا مرکز ثقل دونوں معلوم ہیں۔ باقی ماندہ حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ایک جسم ا ب ج د کا مرکز ثقل ب ث ہے اور حصہ ا د ج کا مرکز ثقل د ث ہے۔ نیز فرض کرو کہ کل جسم کا وزن و اور حصہ ا ب ج د کا وزن و ہے۔ پس و (و - و) حصہ ا ب ج کا وزن ہے۔  
فرض کرو کہ حصہ ا ب ج کا مرکز ثقل ب ث ہے چونکہ ب ث پر و اور د ث پر و کا مرکز ثقل ب ث ہے اس لئے ب ث لازمی طور پر خط ب ث د پر واقع ہوگا۔ اور



$$و \times ب ث = و \times د ث$$

اس لئے اگر

ب ث معلوم ہو جائے تو ہمیں

د ث کو د ث تک

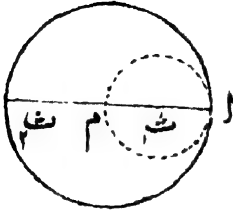
خارج کرنے سے ب ث ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$ب ث = \frac{و}{و - و} \times د ث = \frac{و}{و - و} \times ب ث$$

مطلوبہ نقطہ دفعہ ۱۳۸ کے ضابطہ سے بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

مشق۔ ایک مستطیل پر قوس ہے جس کا نصف قطر ہے اس میں سے ایک دائرہ اس طرح کا ٹانگیا ہے کہ دائرہ کا قطر قوس کا ایک نصف قطر ہے۔ باقی حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

چونکہ دائروں کے رقبے اُن کے نصف  
قطروں کے مربعوں کے متناسب ہوتے ہیں  
اس لئے مقطوعہ حصہ کل قرص کا ایک چوتھائی  
ہے اور باقی ماندہ حصہ کا تین چوتھائی ہے۔



$$\text{پس } م = \frac{1}{4} ر$$

$$\text{اس لئے } \frac{1}{4} م \times م \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} م \times م \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} م \times م \times \frac{1}{4}$$

$$\therefore م \times م \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} ر$$

تجربہ سے اس نتیجہ کی تصدیق ہو سکتی ہے۔

۱۴۱۔ اگر ایک استوار جسم تعادل میں ہو اور اس کا صرف ایک نقطہ ثابت ہو تو  
جسم مذکور کا مرکز ثقل ثابت نقطہ میں سے گزرنے والے انتصابی خط پر واقع ہوگا۔  
فرض کرو کہ جسم کا ثابت نقطہ وہ ہے اور اس کا مرکز ثقل ث ہے اب  
جسم پر عمل کرنے والی صرف دو قوتیں ہیں جن میں ایک قوت جسم کو سہارنے  
والے ثابت نقطہ میں سے گزرنے والا تعادل ہے اور دوسری قوت جسم کے  
مرکزی حصوں کے وزن ہیں جو جسم کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والی ایک واحد  
انتصابی قوت کے معادل ہیں۔

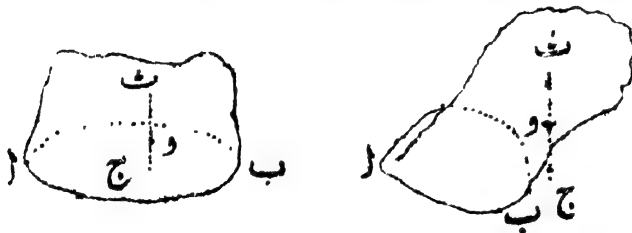


اب ظاہر ہے کہ جب دو قوتیں جسم کو تعادل میں رکھیں تو ضروری ہے کہ وہ

مساوی اور متقابل ہوں اور اُن کا خط عمل ایک ہی ہو، پس ثقل میں سے گزرنے والے انتصابی خط کو لازماً نقطہ و میں سے بھی گزرنا چاہیئے۔

اب دو صورتیں پیدا ہوتی ہیں پہلی وہ جس میں مرکز ثقل ثقل سے ہمارے کے مقام و سے نیچے ہو اور دوسری وہ جس میں نقطہ و کے اوپر ہو۔ پہلی صورت میں اگر جسم کو ڈرسا ہٹا دیا جائے تو یہ پھر خود بخود اپنے اصلی مقام کی طرف آنے کو رجوع ہوگا لیکن دوسری طرف اگر جسم کو ڈرسا ہٹا دیا جائے تو یہ تعادل کے ابتدائی محل میں واپس نہ آنے گا۔

۱۴۲۔ اگر ایک جسم کو افقی سطح مستوی پر اس طرح رکھا جائے کہ جسم کا مستوی قاعدہ سطح مذکور سے مس کرے اور اگر اس کے مرکز ثقل ثقل میں سے ایک انتصابی خط کھینچا جائے تو جسم کو ڈرا جائے گا اگر یہ انتصابی خط سطح مستوی سے جسم کے قاعدے کے اندر ملے اور گر جائیگا اگر یہ قاعدہ کے باہر ملے۔



جسم پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ یہ ہیں جسم کا وزن جو اس کے مرکز ثقل ثقل میں سے عمل کرتا ہے اور سطح مستوی کے تعادل جو جسم کے قاعدہ کے مختلف نقطوں پر عمل کرتے ہیں۔ تعادل سب انتصابی ہیں اور اس لئے ان کی ترکیب سے ہمیں ایک واحد انتصابی قوت حاصل ہوتی ہے جو قاعدہ کے کسی نقطہ پر عمل کرتی ہے۔ چونکہ دو یکساں متوازی قوتوں کا حاصل ہمیشہ ان قوتوں کے اندر کے کسی نقطہ پر عمل کرتا ہے اس لئے جسم کے قاعدے کے تمام تعاملوں کا حاصل قاعدے کے باہر کے کسی نقطہ میں سے نہیں گزر سکتا۔

اس لئے اگر جسم کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والا انتصابی خط سطح مستوی

سے قاعدہ کے باہر کے کسی نقطہ پر ملے تو یہ حاصل تعادل سے متعادل نہیں ہو سکتا اور اس لئے جسم کھڑا نہیں رہ سکتا بلکہ لازماً گر جائے گا۔ اگر جسم کا قاعدہ ایک ایسی شکل ہو جس کا ایک زاویہ متداخل زاویہ ہو جیسا کہ ساتھ کی شکل میں دکھایا گیا ہے تو اس صورت میں لفظ "قاعدہ" میں وہ رقبہ شریک ہو گا جو ہندسی قاعدہ کے گرد مضبوطی سے بندھے ہوئے تانگے کے اندر واقع ہے۔ پس اوپر کی شکل میں "قاعدہ" سے شکل ا ب ج ع ف ا کا رقبہ مراد ہے۔



مثلاً نقطہ ج جس پر حاصل تعادل

عمل کرتا ہے رقبہ ا ب کے اندر واقع ہو سکتا ہے مگر خط ا ب کے باہر واقع نہیں ہو سکتا۔ اگر نقطہ ج خط ا ب پر واقع ہو تو جسم گرے کے عین تریب ہو گا۔

## مثالیں

۱۔ ایک مثلث کا قاعدہ ثابت ہے اور اس کا راس ایک معلوم خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے ثابت کرو کہ مرکز ثقل بھی ایک خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے

۲۔ ایک مثلث کا قاعدہ ثابت ہے اور اس کا راسی زاویہ لمباظ مقدار کے معین ہے ثابت کرو کہ اس کا مرکز ثقل ایک خاص دائرہ کی قوس پر حرکت کرتا ہے۔

۳۔ ایک مثلث پر کسی جگہ ایک معلوم وزن رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ کل نظام کا مرکز ثقل ایک خاص مثلث کے اندر واقع ہوتا ہے۔

۴۔ ثابت کرو کہ تین یکساں سلاخوں سے بنے ہوئے مثلث کا مرکز ثقل اس مثلث کے اندر دنی دائرہ کا مرکز ہو گا جس کے راسی نقطے سلاخوں کے وسطی نقطے ہیں۔

۵۔ اگر تین قوتیں ایک نقطہ ن پر عمل کریں اور بالترتیب  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  اور  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  ج سے تعمیر ہوں تو ثابت کرو کہ حاصل  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  ج سے تعمیر ہو گا جہاں  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  ج کا مرکز ثقل ہے۔

۶۔ ایک ذرہ  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  ج... کی طرف ان قوتوں سے جولا  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  ج

مہ  $\times$  ن ب  $\times$  سہ  $\times$  ن ج ، ..... سے بغیر ہوتی ہیں کھینچ رہا ہے ثابت کرو کہ ان کا حاصل (لہ + سہ + سہ + ..... )  $\times$  ن ث سے بغیر ہوتا ہے جہاں ث مرکز ثقل ہے۔  
ہے ان وزنوں کا جو، ب، ج ..... پر رکھے جائیں اور بالترتیب لہ، سہ، سہ ..... کے تناسب ہوں۔

(یہ دفعہ ۲۵ کی تقبیری صورت ہے اور اس دفعہ کے نتائج کے متواتر استعمال سے ثابت ہو سکتی ہے۔)

۷۔ ایک منحرف پترے کا مرکز ثقل معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ا ب ج د ایک منحرف ہے جس کے اضلاع ا ب اور ج د متوازی ہیں اور بالترتیب ۲، ۱، ۲، ۱ ب کے مساوی ہیں۔

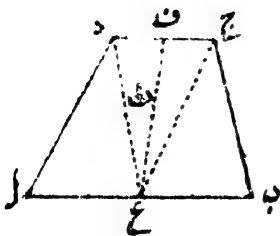
فرض کرو کہ ا ب اور ج د کے وسطی نقطے بالترتیب ع اور ف ہیں، ا ح اور ع ج کو ملاؤ مثلثوں ا ح ع، ح ع ج اور ب ع ج کے رقبے ان کے قاعدوں ا ح، ح ج اور ع ب کے تناسب ہیں یعنی ۱، ۲، ۲، ۱ کے تناسب ہیں۔

اب ہر ایک مثلث کی بجائے اس کے وزن کا ایک تہائی اس کے راسوں پر رکھو۔

اس طرح سے ہیں ج اور د پر  $\frac{1}{3}$  ب، ا کے، ا اور ب پر  $\frac{1}{3}$  کے اور ع پر  $\frac{1}{3}$  ب +  $\frac{1}{3}$  ا کے تناسب وزن حاصل ہوتے ہیں۔

۳ نیز ج اور د پر کے مساوی وزنوں کی بجائے ج کے وسطی نقطہ ف پر

$\frac{1}{3}$  ب +  $\frac{1}{3}$  ا کے تناسب وزن لے لو



اور ا ب پر کے مساوی وزنوں کی بجائے ا ب کے وسطی نقطہ ع پر  $\frac{1}{3}$  کے تناسب وزن رکھو اس طرح سے ہیں ف پر  $\frac{1}{3}$  ب +  $\frac{1}{3}$  ا کے اور ع پر  $\frac{1}{3}$  ب +  $\frac{1}{3}$  ا کے تناسب وزن حاصل ہوتے ہیں۔

پس مطلوبہ مرکز ثقل خط ع فنا پر ایسی جگہ ہے کہ

$$\frac{\text{ع ث ف}}{\text{ث ف}} = \frac{\text{ع پر کا وزن}}{\text{ع پر کا وزن}} = \frac{۱ + ۲ + ۳}{۱ + ۲ + ۳}$$

۸۔ ایک مستوی ذوار بجۃ الاصلاع پترے کے راسی نقطوں اور وتروں کے نقطہ تقاطع کا فاصلہ اسی سطح مستوی میں ایک خط و لاسے بالترتیب ل، ب، ج، د، اور ع ہے ثابت کرو کہ مرکز جمود کا فاصلہ اسی خط سے  $\frac{۱}{۳}$  (ل + ب + ج + د - ع) ہے۔ فرض کرو کہ راسی نقطہ ل، ب، ج، د ہیں اور قطروں کا تقاطع ع ہے تب

$$\frac{\Delta \text{ ل ج د}}{\Delta \text{ ل ج ب}} = \frac{\text{د سے ل ج پر جمود}}{\text{ب سے ل ج پر جمود}} = \frac{\text{د ع}}{\text{ع ب}} = \frac{\text{د - ع}}{\text{ع - ب}}$$

دفعہ ۱۳۷ و ۱۳۸ کی رو سے  $\Delta \text{ ل ج د}$  کے مرکز ثقل کا فاصلہ و لاسے  $\frac{۱ + ۲ + ۳}{۳}$  ہے اور  $\Delta \text{ ل ج ب}$  کا فاصلہ  $\frac{۱ + ۲ + ۳}{۳}$  ہے۔

اس لئے و لاسے مطلوبہ مرکز ثقل کا فاصلہ

$$= \frac{\Delta \text{ ل ج د} \times \frac{۱}{۳} (۱ + ۲ + ۳) + \Delta \text{ ل ج ب} \times \frac{۱}{۳} (۱ + ۲ + ۳)}{\Delta \text{ ل ج د} + \Delta \text{ ل ج ب}}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۳} (د - ع) (۱ + ۲ + ۳) + (ع - ب) (۱ + ۲ + ۳)}{(د - ع) + (ع - ب)} = \frac{۱}{۳} (۱ + ۲ + ۳ + د - ع)$$

۹۔ ایک مستوی ذوار بجۃ الاصلاع ل، ب، ج، د کے رقبہ کا مرکز ثقل معلوم کرنے کے لئے ذیل کا عمل ثابت کرو۔ فرض کرو کہ مثلثوں ل، ب، ج اور ل، ج، د کے مرکز ثقل اور م ہیں اور ل، م، ج سے ن پر ملتا ہے تب مرکز ثقل خط ل، م پر ایسے واقع ہوگا کہ م ث = ل ن

۱۰۔ ایک مثلثی رقبہ ل، ب، ج میں ب، ج کے متوازی ایک خط مستقیم کھینچنے سے اس کے رقبہ کا ن واں حصہ منقطع کر دیا گیا ہے ثابت کرو کہ باقی ماندہ حصہ کا مرکز ثقل ل، م سے گزرنے والے وسطی خط کو نسبت ن + لان - ۲ : ۲ (ن + لان + ۱) میں تقسیم



کرتا ہے۔

۱۱۔ کاغذ کے ایک مثلثی پترے کو دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والے خط پر تہ کیا گیا ہے اور اس طرح مثلث کے راس کو اس کے قاعدہ پر لایا گیا ہے ثابت کرو کہ مثلث کے قاعدہ سے اس محل میں کاغذ کے مرکز جمود کا فاصلہ ابتدائی حالت میں مثلثی پترے کے مرکز جمود کے فاصلہ کا تین چوتھائی ہے۔

۱۲۔ ایک یکساں سلخ درسیوں کے ذریعے جو اس کے سروں کے ساتھ بندھی ہیں اور دوسری طرف ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بندھی ہیں لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ رسیوں کے تناؤ ان کے طوؤں کے متناسب ہیں۔

ثابت کرو کہ اگر ایک مثلثی پترے کو اس کے تینوں کونوں کے ساتھ رسیاں لٹک کر ایک کھونٹی سے لٹکایا جائے تو بھی رسیوں کے تناؤ ان کے طوؤں کے متناسب ہوں گے۔

۱۳۔ چاند کی کمیت زمین کی کمیت کا ۱/۳۰ گنا ہے۔ اگر زمین کے نصف قطر کو ۳۹۰۰ میل مان لیا جائے اور زمین اور چاند کے مرکزدں کے درمیانی فاصلہ کو زمین کے نصف قطر کا ۶/۱۰ گنا فرض کیا جائے تو زمین اور چاند کے مرکز ثقل کا فاصلہ زمین کے مرکز سے معلوم کرو۔ (۳۰۰ میل تقریباً)

۱۴۔ بتاؤ کہ ایک مخروط کا راسی زاویہ کیا ہونا چاہیے کہ اس کی کل سطح (بشمول اس کے مستوی قاعدہ کے) کا مرکز ثقل اس کے حجم کے مرکز ثقل پر منطبق ہو (جب  $\frac{1}{3}$ )۔

۱۵۔ ایک ٹھوس قائم مستدیر مخروط کے قاعدہ کو اس طرح چھیلا گیا کہ مجوف حصہ اسی قاعدہ پر ایک قائم مخروط ہے بتاؤ کہ کتنا حصہ چھیلا جائے کہ باقی ماندہ حصہ کا مرکز ثقل مجوف حصہ کے راس پر منطبق ہو۔

(اندرونی مخروط کا ارتفاع = بیرونی مخروط کا ارتفاع)

۱۶۔ بتاؤ کہ ایک ٹھوس یکساں اسطوانہ سے ایک مخروط کس طرح کاٹا جائے جس کا قاعدہ اسطوانہ کے قاعدہ پر منطبق ہو اور باقی ماندہ مجسم کا مرکز ثقل مخروط کے راس پر منطبق ہو۔



ہوں اور ان کا مرکز نقل ث ہو، اور ق کوئی اور نقطہ ہو تو

$$م \times (ق + ن \times لب ق + ک \times ج ق + ..... +$$

$$= م \times (دش + ن \times لب دش + ک \times ج دش + ..... + (م + ن + ک + ..... + ق) دش$$

۲۳۔ ایک ٹھوس قائم مقطوع مخروط ایک کھردری اُبل سطح مستوی پر پڑا ہے۔ سطح اُبل کے میلان کو بتدیر بچ بڑایا جاتا ہے اگر مقطوع کی بڑی اور چھوٹی تراشوں کے نصف قطر بالترتیب سہا اور رہوں اور مقطوع کے حجم کا ارتفاع وہ ہو تو ثابت کرو کہ بالآخر مقطوع مجسم الٹ جائے گا یا پھسل جائے گا اگر رُز کی قدر

$$\leq \frac{۲۴ \times \frac{۲}{۳} + ۲س + ۲س + ۲س}{۲س + ۲س + ۲س}$$

۲۴۔ ایک قائم مخروط کا راسی زاویہ ۲۷ ہے اس کو ایک سطح مستوی سے جو اس کے محور کے ساتھ زاویہ ۱۰ بناتی ہے کاٹا گیا ہے اس مجسم کو ایک مکمل کھردری سطح اُبل پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور خط میلان اعظم پر واقع ہوتا ہے۔ اس محل میں یہ لٹنے کے عین قریب ہے۔ ثابت کرو کہ افق کے ساتھ سطح اُبل کے میلان کا سہا ان میں سے ایک قیمت رکھتا ہے

$$۲ جب ۲۷ عہ \pm جب ۲۷$$

$$جم ۲۷ عہ - جم ۲۷$$

۲۵۔ ایک پتلے اسطوانہ نما ظرف کے اندر جس کا وزن و، تراش س ہے اور جس کے مرکز نقل کا فاصلہ اس کے قاعدہ سے ب ہے کثافت ک کا مائع ڈالا گیا ہے۔ جب کل کے مرکز نقل کا ارتفاع کم سے کم ہو تو ثابت کرو کہ مائع کا وزن

$$۱۷ (و + ۲س ب ک) - و ہوگا -$$

۲۶۔ دفعہ ۱۳۸ کے ضوابط کی مدد سے معلومہ شکل کی کسی توس یا رقبہ یا مجسم کا مرکز نقل معلوم کیا جاسکتا ہے۔

کسی توس کا مرکز نقل۔ اگر ایک مستوی توس پر کوئی نقطہ (لا، ما، ہو

اور  $\bar{C}$  چھوٹا قوسی جزو  $\bar{C}$  جس کی کثافت فقط  $\bar{C}$  پر  $\bar{C}$  ہو اور اس لئے جس کا وزن  $\bar{C}$   $\bar{C}$  کے متناسب ہو تو مذکور بالا ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\bar{C} = \frac{(\bar{C} \times \bar{C})}{\bar{C}} = \bar{C}$$

جب کہ اس میں یکجہات کی انتہائیں قوس زیر بحث کے ایک، دوسرے سے دوسرے سے تک کی جائیں۔

$$\bar{C} = \frac{\bar{C}}{\bar{C}}$$

$$\bar{C} = \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{C}}{\bar{C}}\right)^2} \quad \text{اور} \quad \frac{\bar{C}}{\bar{C}} \quad \text{کی قیمتیں منحنی کی مساوات سے}$$

معلوم ہو سکتی ہیں۔

اگر قوس یکساں کثافت کی ہو جیسا کہ عام طور پر ہوتا ہے تو  $\bar{C}$  مستقل ہوگا اور  $\bar{C}$  اور  $\bar{C}$  نیچے سے کٹ جائے گا۔ اگر قوس کی کثافت متغیر ہو تو  $\bar{C}$  کی قیمت  $\bar{C}$  کی رقوم میں معلوم ہونی چاہیئے۔

اسی قسم کے ضوابط تین ایجاد کے منحنی پر صادق آتے ہیں لیکن اب

$$\bar{C} = \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{C}}{\bar{C}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{C}}{\bar{C}}\right)^2}$$

اگر قوس کی مساوات قطبی محدودوں میں معلوم ہو

یعنی اس کی مساوات  $\bar{C} = \bar{C} (r)$  ہو تو

$$\bar{C} = \bar{C} + \bar{C} + \bar{C}$$

اور ان ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{کے کرجم ط فرس}}{\text{کے ک فرس}} = \text{اور مآ} = \frac{\text{کے ک رجب ط فرس}}{\text{کے ک فرس}}$$

اسی قسم کے ضوابط تین ابعاد کے لئے بھی حاصل ہو سکتے ہیں۔  
۴۴۴- مشتق ۱- مکانی ۲= ۳ ولا کی اس قوس کا مرکز ثقل معلوم کرو جیساں اور اس سے انفی فاصلہ ۱۰۲ پر کے سین کے درمیان منقطع ہوتی ہے۔

$$\text{یہاں } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۱۲$$

$$\therefore \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} = \frac{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}$$

$$\therefore \frac{\text{کے ک لا فرس}}{\text{کے ک لا فرس}} = \frac{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}$$

$$\text{اور مآ} = \frac{\text{کے ک فرس} \times \text{مآ}}{\text{کے ک فرس}} = \frac{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}$$

$$\text{اب کے ک لا فرلا} = \frac{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}{\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}}$$

$$\left[ \frac{۱}{۲} \left( \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2} - \frac{۱}{۲} \left( \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{۱}{۲} \left[ \left( \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2} - \left( \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \right) \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2} \right]$$



$$= \frac{\text{ج لا جنر ج} - \text{ج}^2 \text{ جمر ج} + \text{ج}^2}{\text{ج جنر ج}} = \frac{\text{ج} - (1 - \text{ج})}{\text{س}}$$

$$\text{نیز آ} = \frac{\text{ک ا فرس}}{\text{ک فرس}} = \frac{\text{ک}^2 \text{ ج جمر ج} \text{ فرلا}}{\text{ک}^2 \text{ جمر ج} \text{ فرلا}}$$

$$= \frac{\text{ج}}{2} \times \frac{\text{ک}^2 (1 + \text{جمر ج}) \text{ فرلا}}{\text{ک}^2 \text{ جمر ج} \text{ فرلا}} = \frac{\text{ج} \frac{\text{ج}}{2} \text{ جنر ج} + 1}{2 \text{ جنر ج}}$$

$$= \frac{1 + \text{ج جنر ج} \frac{\text{ج}}{2} \text{ جمر ج}}{2 \text{ جنر ج}} = \frac{1}{2} + \frac{\text{ج}}{2\text{س}}$$

مثالیں

ذیل کی قوسوں کے مرکز ثقلوں کے مقام معلوم کرو۔

۱۔ خط تیرا = د (ط + جب ط)، ۱ = ا، ۱ - ا = ح (ط) کی وہ قوس جو مثبت راج میں ہے۔

$$[1 - \pi = \frac{2}{\text{س}}] \text{ ا، } \text{آ} = \frac{1}{3}$$

$$2. \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ دوقروں کے درمیان } [1 - \text{آ} = \text{آ} = \frac{1}{2}]$$

۳۔ مرغولہ = ا = ح (ط)، ۱ = د جب ط، ی = ب ط کی وہ قوس جو مساوی اور نقطہ ط = عہ کے درمیان ہے۔

$$[1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ جب عہ، } \text{آ} = \frac{1 - (1 - \frac{1}{2})}{2} \text{، ح} = \frac{1}{2} \text{ ب عہ}]$$

۴۔ اگر ایک مکمل مستدیر قوس کی کثافت قوس پر کے ایک ثابت نقطہ د سے فاصلہ کے مارج کے متاسب پیبلے تو ثابت کر دو کہ اس کا مرکز ثقل د میں سے گزرنے والے

قطر کو نسبت ۳:۱ میں تقسیم کرتا ہے۔

۵۔ ایک کاگ نکالنے کے پیچ کا طول نصف قطر اور گھائی معلوم ہیں اور پیچ کی چوڑی کے کسی نقطہ پر چوڑی کی موٹائی ب + ن سی کے مساوی ہے (جہاں سی اس نقطہ کا پیچ کے ایک سرے سے محور کے متوازی فاصلہ ہے) تار کے مرکز ثقل کا مقام معلوم کرو۔

۱۴۵۔ کسی مستوی رقبہ کا مرکز ثقل۔ کارٹیزی محذوٰں میں رقبہ کا جزو

مف لا مف ما ہوتا ہے اور اگر اس کی کثافت ک ہو تو اس جزو کا وزن ک × مف لا مف ما کے تناسب ہوگا۔ اس لئے اساسی ضابطہ ہو جائے ہیں

$$\frac{\text{ک} \times \text{مف لا مف ما}}{\text{ک} \times \text{مف لا مف ما}} = \frac{\text{ک} \times \text{مف لا مف ما}}{\text{ک} \times \text{مف لا مف ما}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{ک} \times \text{مف لا مف ما}}{\text{ک} \times \text{مف لا مف ما}}$$

جہاں انتہائیں اس طرح منتخب کی گئی ہیں کہ ان کے اندر زیر محور پورا رقبہ آجاتا ہے۔ اگر رقبہ یکساں کثافت کا ہو اور لا فاصلہ کا معیار بنی ہو تو جن نقطوں پر قطع کرتا ہے ان کے متین ما اور ما ہوں تو ہم رقبہ کے جزو کو (ما - ما) مف لا کے مساوی لے سکتے ہیں اور انتہائیں جبکہ مف لا بہت چھوٹا ہو تو اس جزو کے مرکز ثقل کے محذو لا اور  $\frac{\text{ما} + \text{ما}}{۲}$  ہوں گے۔

(۱۴۷) اب اساسی ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ک} \times (\text{ما} - \text{ما}) \times \text{مف لا}}{\text{ک} \times (\text{ما} - \text{ما}) \times \text{مف لا}} = \frac{\text{ک} \times (\text{ما} - \text{ما}) \times \text{مف لا}}{\text{ک} \times (\text{ما} - \text{ما}) \times \text{مف لا}}$$



$$\text{اور } \bar{A} = \frac{\sum (m - m) \text{ مف لا } \frac{m + m}{2}}{\sum (m - m) \text{ مف لا}} = \frac{1}{4} \times \frac{(a - a) \text{ فر لا}}{(a - m) \text{ فر لا}}$$

ما اور ماہ کی قیمتیں منحنی کی مساوات سے معلوم ہوتی ہیں اور لا کی انتہائیں ایسی  
لینی چاہئیں کہ سب رقبہ شامل ہو جائے۔

اگر منحنی قطبی محدودوں میں دیا ہوا ہو اور اس کی مساوات بلحاظ قطب د کے  
ر = ف (ط) ہو اور اگر ف اور ق ایسے نقطے ہوں جن کے سمتی زاوے ط  
اور ط + مف ط ہوں تو رقبہ کا قطبی جزو  $\frac{1}{2} \times \text{مف ط}$  ہوگا اور اس کا مرکز ثقل جبکہ  
مف ط بہت چھوٹا ہو وہ نقطہ ہوگا جس کے قطبی محدود  $\frac{1}{2} \times \text{ر اور ط}$  ہیں اور جس کے  
کارٹیزی محدود  $\frac{1}{2} \times \text{رجم ط اور } \frac{1}{2} \times \text{رجب ط}$  ہوں۔

$$\bar{A} = \frac{\frac{1}{2} \times \text{مف ط} \times \frac{1}{2} \times \text{رجم ط}}{\frac{1}{2} \times \text{مف ط}} = \frac{\frac{1}{2} \times \text{رجم ط فر ط}}{\frac{1}{2} \times \text{رجم ط فر ط}}$$

جہاں ر = ف (ط) نیز اسی طرح کی ایک مساوات آ کے لئے ہے جس سے قطاعی رقبہ  
ا و ب کا مرکز ثقل معلوم ہوتا ہے۔ ط کی انتہائیں (ا اور ب) کے سمتی زاوے  
ہونی چاہئیں۔

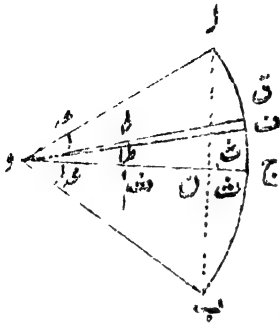
اگر یہ قطاعی رقبہ غیر کثافت یا موٹائی کا ہو تو ہمیں رقبہ کے جزو ر مف ط مف ر کو کثافت  
ک کا لینا چاہیئے اور تب قطاعی رقبہ ا و ب کے لئے

$$\bar{A} = \frac{\sum \text{مف ط} \times \text{مف ر ک} \times \text{رجم ط}}{\sum \text{مف ط} \times \text{مف ر ک} \times \text{ط}} = \frac{\sum \text{ک ر ک ر فر ط}}{\sum \text{ک ر ک ر فر ط}}$$

اور اسی طرح آ کے لئے ک کی قیمت ر اور ط کے تفاعل کے طور پر دی ہوئی  
ہوگی۔ ر کے لئے محکمہ کی انتہائیں صفر سے ف (ط) تک ہونی چاہئیں اور

ط کی انتہائیں ا و ب کے سمتی زاوے ہونی چاہئیں

۴۴۱۔ مشتق۔ ایک دائرہ کی قوس، قطاع اور قطعہ کا مرکز ثقل معلوم کرنا۔



فرض کرو کہ قوس ا ج ب کے  
مماسی دائرہ کے مرکز O پر زاویہ ۲۴۰° بنتا ہے  
اور ج قوس کا وسطی نقطہ ہے۔  
وجہ کو لا کا محور مانو، تب قوس

$$\bar{x} = \frac{\int x \, ds}{\int ds} = \frac{\int_0^{\theta} r \sin \phi \, d\phi}{\int_0^{\theta} r \, d\phi} = \frac{r \int_0^{\theta} \sin \phi \, d\phi}{r \int_0^{\theta} 1 \, d\phi} = \frac{r [-\cos \phi]_0^{\theta}}{r [\phi]_0^{\theta}} = \frac{r (1 - \cos \theta)}{\theta}$$

قطاع ا و ب کے لئے

$$\bar{x} = \frac{\int x \, ds}{\int ds} = \frac{\int_0^{\theta} r \sin \phi \, d\phi}{\int_0^{\theta} r \, d\phi} = \frac{r \int_0^{\theta} \sin \phi \, d\phi}{r \int_0^{\theta} 1 \, d\phi} = \frac{r (1 - \cos \theta)}{\theta}$$

فرض کرو کہ ش ث ثلث ا و ب کا مرکز ثقل ہے۔ اس لئے

$$\text{و ث ث} = \frac{2}{3} \text{ و ن} = \frac{2}{3} \text{ ا ج جم ع}$$

تب قطعہ ا ن ب ج کا وزن جو اس کے مرکز ثقل ش ث پر عمل کرتا ہے اور مثلث  
ا و ب کا وزن دو وزنوں ش ث کے گرد متوازن ہیں۔

$$\frac{2}{3} \text{ ا ج جم ع} = \text{و ث ث} \times \text{ا و ب} + [\text{قطاع ا و ب}] \times \text{ا و ب} \times \text{و ث ث}$$

$$\frac{1}{3} \text{ ا ج جم ع} \times \frac{2}{3} \text{ ا ج جم ع} + [\frac{1}{3} \text{ ا ج جم ع} \times \frac{2}{3} \text{ ا ج جم ع}] \times \text{و ث ث} = \frac{1}{3} \text{ ا ج جم ع} \times \frac{2}{3} \text{ ا ج جم ع}$$

$$\text{اس سے حاصل ہوتا ہے و ث ث} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \text{ ا ج جم ع} = \frac{2}{9} \text{ ا ج جم ع}$$



$$\bar{L} = \frac{1}{4} \times \left[ \pi \left( \frac{1}{4} - \text{جم } \pi \right) + \pi \left( \frac{1}{2} \text{ جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi \right) + \frac{5}{8} \pi \text{ جم } \pi - \frac{1}{8} \pi \text{ جم } \pi + \frac{1}{16} \pi \text{ جم } \pi \right]$$

$$\left[ \pi \left( \frac{1}{4} - \text{جم } \pi \right) + \pi \text{ جب } \pi - \frac{1}{8} \pi \text{ جب } \pi \right]$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{14 - 2\pi + 9}{\pi + 18} = \frac{\frac{9}{4} - \frac{3}{2} \times \pi}{\frac{3}{4} + \pi} \times \frac{1}{4} =$$

$$\bar{L} = \frac{\int \pi \left( \frac{1}{4} - \text{جم } \pi \right) + \pi \left( \frac{1}{2} \text{ جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi \right) + \frac{5}{8} \pi \text{ جم } \pi - \frac{1}{8} \pi \text{ جم } \pi + \frac{1}{16} \pi \text{ جم } \pi}{\int \pi \left( \frac{1}{4} - \text{جم } \pi \right) + \pi \text{ جب } \pi - \frac{1}{8} \pi \text{ جب } \pi} = \frac{\int \pi \left( \frac{1}{4} - \text{جم } \pi \right) + \pi \left( \frac{1}{2} \text{ جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi \right) + \frac{5}{8} \pi \text{ جم } \pi - \frac{1}{8} \pi \text{ جم } \pi + \frac{1}{16} \pi \text{ جم } \pi}{\int \pi \left( \frac{1}{4} - \text{جم } \pi \right) + \pi \text{ جب } \pi - \frac{1}{8} \pi \text{ جب } \pi}$$

$$\int \pi \left( \frac{1}{4} - \text{جم } \pi \right) + \pi \left( \frac{1}{2} \text{ جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi \right) + \frac{5}{8} \pi \text{ جم } \pi - \frac{1}{8} \pi \text{ جم } \pi + \frac{1}{16} \pi \text{ جم } \pi \left[ \text{فرط} \right] \times \frac{1}{4} =$$

$$\int \pi \left( \frac{1}{4} - \text{جم } \pi \right) + \pi \text{ جب } \pi - \frac{1}{8} \pi \text{ جب } \pi \left[ \text{فرط} \right]$$

$$\frac{\int \pi \left( \frac{1}{4} - \text{جم } \pi \right) + \pi \left( \frac{1}{2} \text{ جب } \pi - \frac{1}{4} \text{ جب } \pi \right) + \frac{5}{8} \pi \text{ جم } \pi - \frac{1}{8} \pi \text{ جم } \pi + \frac{1}{16} \pi \text{ جم } \pi}{\int \pi \left( \frac{1}{4} - \text{جم } \pi \right) + \pi \text{ جب } \pi - \frac{1}{8} \pi \text{ جب } \pi} \times \frac{1}{4} =$$

$$\frac{194}{4} =$$

مشق ۳۔ سنجی ر = ۱ جم ۳ ط کے اُس حلقہ کا مرکز ثقل معلوم کرو جس کے اندر ابتدائی خط ہے۔ ط کی وہ قیمتیں جن سے یہ حلقہ حاصل ہوتا ہے۔  $\frac{\pi}{4}$  سے  $\frac{\pi}{4}$  تک ہیں۔

$$\text{اس لئے } \bar{L} = \frac{\int \frac{1}{4} \pi \text{ فرط} \times \frac{2}{3} \text{ ر جم } \pi}{\int \frac{1}{4} \pi \text{ فرط}}$$

$$\frac{\int \frac{1}{4} \pi \text{ فرط} \times \frac{2}{3} \text{ ر جم } \pi}{\int \frac{1}{4} \pi \text{ فرط}} = \frac{\int \frac{1}{4} \pi \text{ فرط} \times \frac{2}{3} \text{ ر جم } \pi}{\int \frac{1}{4} \pi \text{ فرط}}$$





$$[ \frac{5}{2} = \bar{a} ]$$

۷۔ منحنی  $\bar{a}^2 = (1-1) = 0$  اور اس کے تقارب کے درمیان۔

$$[ \frac{15}{3} = \bar{a} ]$$

۸۔ منحنی  $\bar{a}^2 = (1+1) = 2$  اور  $(1-1) = 0$  کا ایک حلقہ۔

$$[ \frac{8-\pi^2}{\pi^2-2} \times \frac{1}{3} = \bar{a} ]$$

۹۔ خط منوبری  $r = 1 + (1 + \text{جم } \pi)$  ،  
۱۰۔  $r = 1 + \text{جم } \pi$  کا ایک حلقہ

$$[ \frac{1}{\pi} \times \frac{2\sqrt{128}}{10.5} = \bar{a} ]$$

۱۱۔ برنولی کے ائیرن  $r = 1 + \text{جم } \pi$  کا ایک حلقہ۔

$$[ \frac{2\sqrt{128}}{8} = \bar{a} ]$$

۱۲۔  $r = 1 + \text{جم } \pi$  کا ایک حلقہ۔

$$[ \frac{\pi}{2} = \bar{a} ]$$

۱۳۔  $(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n = 1$  کا وہ حصہ جو محوروں کے مثبت ربع میں ہے۔

$$[ \frac{\{ (\frac{1}{2})^n \}}{(\frac{1}{2})^n} = \bar{a} ]$$

ذیل کے منحنیوں کے درمیان جو رقبہ گھر جاتے ہیں ان کے مرکز کیت کے مقام معلوم کرو۔  
۱۴۔  $\bar{a}^2 = 1$  اور  $\bar{a}^2 = 2$  کا ایک حلقہ

$$[ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \bar{a} ]$$

۱۵۔  $\bar{a}^2 = 1$  اور  $\bar{a}^2 = 2$  کا ایک حلقہ

$$\left[ \frac{1}{8 - \pi^2} = \bar{A} = \frac{\bar{A}5}{\pi^2 - \pi^2 15} \right]$$

۶۔  $\bar{A} = \bar{A}^2 - \bar{A}^2 12$  اور  $\bar{A}^2 + \bar{A}^2 - \bar{A}^2 2$  ب ل ا۔ محور ل کے مثبت میں حصہ

$$\left[ \frac{\bar{A}^2 + \bar{A}^2 12 + \bar{A}^2 2}{\bar{A}^2 + \bar{A}^2} = \bar{A}^2, \frac{\bar{A}^2 + \bar{A}^2 12 + \bar{A}^2 2}{(\bar{A}^2 + \bar{A}^2) \pi} = \bar{A}^2 \right]$$

۷۔  $\bar{A}^2 = \bar{A}^2 12$  اور  $\bar{A}^2 = \bar{A}^2 12$

$$\left[ \frac{12}{\bar{A}^2} = \bar{A}^2, \frac{12}{\bar{A}^2} = \bar{A}^2 \right]$$

۸۔  $\bar{A}^2 = \bar{A}^2 12$  اور  $\bar{A}^2 = \bar{A}^2 12$  اور  $\bar{A}^2 = \bar{A}^2 12$

$$\left[ \frac{(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 12)(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 12)}{(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 12)(\bar{A}^2 - \bar{A}^2 12)} = \bar{A}^2 \right]$$

۱۹۔ ایک مستدیر پترے کے کسی نقطہ پر کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے اس کے محیط پر کے

ایک ثابت نقطہ سے اس نقطہ کے فاصلہ کی  $n$  ویں قوت ثابت ہو کہ پترے کا مرکز نقل و میں سے گزرنے والے قطر کو نسبت  $n + 2 : 2$  میں تقسیم کرتا ہے۔

۲۰۔ نصف قطر کا ایک مستدیر قرص ہے جس کے کسی نقطہ پر کثافت مرکز سے فاصلہ

کے متناسب ہوتی ہے اس میں سے ایک دائرہ کاٹ لیا گیا ہے جس کا قطر  $b$  ہے

اور جو قرص کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ قرص کے مرکز میں سے باقی حصہ

$$\text{کے مرکز نقل کا فاصلہ} = \frac{b^2}{\pi 15 - 10 - b^2}$$

۲۱۔ ایک مستدیر قرص ہے جس کے کسی نقطہ پر کثافت قرص کی سطح مستوی میں کسی

بیرونی نقطہ سے اس نقطہ کے فاصلہ کی چوتھی قوت کے بالعکس متناسب ہے۔

ثابت کرو کہ اس کا مرکز جو قرص کے محیط کے لحاظ سے نقطہ کا معکوس نقطہ ہے۔

۲۲۔ خط صنوبری  $r = (1 + \cos \theta)$  کے کسی نقطہ پر کثافت ایسے بدلتی ہے

جیسے نقطہ قرن سے نقطہ مذکور کے فاصلہ کی  $n$  ویں قوت۔ بتاؤ کہ مرکز نقل کا



فاصلہ قرن سے  $\frac{(۲+۷)(۵+۷)}{(۳+۷)(۴+۷)} \times ۱۰$  ہے۔

۲۳۔ ایک منحنی کی شکل ناقص کا ایک ربع (ا و ب) ہے اس کے کسی نقطہ پر اس کی موٹائی (ا و ب) اور (ب سے نقطہ مذکور کے فاصلوں کے حاصل ضرب کے تناسب ہے اس کا

$$\text{مرکز ثقل معلوم کرو۔} \left[ \frac{۱}{۱۵} = \frac{۲}{ب} = \frac{۷}{۴} \right]$$

۲۴۔ ایک پتر منحنی  $\left( \frac{۱۱}{۴} \right)^{\frac{۲}{۳}} + \left( \frac{۱}{ب} \right)^{\frac{۲}{۳}} = ۱$  کے ایک ربع کی شکل کا ہے۔ اس کے

مرکز ثقل کے محد و معلوم کرو جب کہ کسی نقطہ پر کثافت ک = م لا

$$\left[ \frac{۱۲۸}{۴۲۹} = \frac{۲}{ب} = \frac{۷}{۴} \right]$$

۲۵۔ ناقص کا ایک وتر اس میں سے متقل قہ کا ایک قطعہ کاٹ لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ قطعہ کے مرکز ثقل کا طریق ایک منشا بہ متشابه طور پر رکھا ہوا اور ہم مرکز قطع ناقص ہے۔

۲۶۔ ایک مکانی سے سادہ رقبہ کے جتنے قطعے کاٹے جا سکتے ہیں ان کے مرکز ثقلوں کا طریق ایک سادہ قطع مکانی ہوتا ہے۔

۲۷۔ اگر اٹیرن  $۲ = ۲$  جم ۲ ط کی کسی قوس فن ق کا مرکز ثقل ث ہے تو ثابت کرو کہ و ث زاویہ فن و ق کی تنصیف کرتا ہے جہاں و محدود کا قطب ہے۔

۲۸۔ ایک منحنی ایسا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے جو دو سمتی نیم قطر بھیجے جا سکتے ہیں اور ان قطروں کے اندر اس کا جو رقبہ منقطع ہوتا ہے اس کا مرکز ثقل ہمیشہ ان سمتی نیم قطروں کے درمیانی زاویہ کے خط نامہ صاف پر واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی کوئی دائرہ ہوگا یا برنولی کا اٹیرن ہوگا

$$\text{زاویہ ہ کی تمام قیوں کے لئے ہیں معلوم ہے کہ مس } \frac{۲}{۳} = \frac{\text{نیم فرس رجب ط}}{\text{نیم فرس رجم ط}}$$

$$\text{مس لئے اگر } \frac{\text{فرط}}{\text{فرس}} = \text{فن (ط) تو}$$

ل ف (ط) جب (ط) فرط = مس ۴ ف (ط) جم ط فرط

ب کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

ف (ب) جب ب = مس ۴ ف (ب) جم ب + ۱/۴ ق ۲ ف (ط) جم ط فرط

∴ جب ب ف (ب) = ل ف (ط) جم ط فرط  
پھر تفرق کرنے سے

جم ب ف (ب) + جب ب ف (ب) = ف (ب) جم ب  
اس لئے ف (ب) = . اور اس لئے ف (ب) = مستقل

$$\therefore \text{مس} \left( \frac{\text{فرط}}{\text{فرط}} \right) + \text{مس} = \text{مستقل} = \text{و}$$

جس سے ہمیں آسانی سے حاصل ہوتا ہے کہ ر یا مستقل ہے یا  $\text{و} = \text{جم} (ط + ج)$   
۲۹۔ ثابت کر دو کہ دائرہ ہی صرف ایک ایسا منحنی ہے جس میں منحنی اور ایک ثابت  
نقطہ سے کھینچے ہوئے دو نیم قطروں کے درمیانی رقبہ کا مرکز ثقل ہمیشہ ان سمتی نیم قطروں  
کے درمیانی زاویہ کے خط تنصیف پر واقع ہوتا ہے۔

۱۴۷۔ کسی گردشی سطح یا گردشی مجسم کا مرکز ثقل۔

فرض کر دو کہ منحنی ا ب محور ل کے گرد گردش کرتا ہے۔

محور ل سے فاصلوں لا اور لا + مع لا پر

معین ف ف م اور ق ن نکالو۔

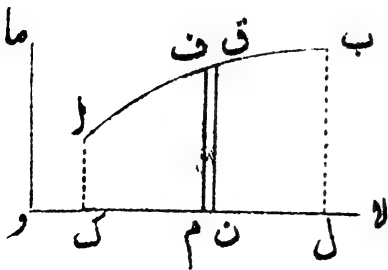
تب جزوی رقبہ ق ن م سے

جم نکون پاتا ہے اور اس کا رقبہ  $\pi \text{ لا مع لا}$

ہے اور اس کا مرکز ثقل و سے فاصلہ

لا پر ہے جبکہ مع لا بہت چھوٹا ہو۔

پس اگر مجسم یکساں کثافت کا ہو تو



$$\bar{\alpha} = \frac{\sum \pi \text{ ماف لا} \times \text{لا}}{\sum \pi \text{ ماف لا}} = \frac{\text{ک ماف لا فرلا}}{\text{ک ماف لا}}$$

جہاں مافی قیمت منحنی کی مسادات سے لا کی رقوم میں حاصل ہو سکتی ہے اور لا کی انتہائیں وک اور ول ہیں۔

ولا کے گرد قوس فاق (مف س) کی گردش سے جو سطح تکوین پائی ہے اس کا رقبہ  $\pi \text{ ماف س}$  ہے اس لئے سطح کے لئے

$$\bar{\alpha} = \frac{\sum \pi \text{ ماف س} \times \text{لا}}{\sum \pi \text{ ماف س}} = \frac{\text{ک ماف س فرس}}{\text{ک ماف س}}$$

اب  $\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} = \left[ 1 + \left( \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right]$  اور مافی قیمت منحنی کی مسادات سے معلوم

ہے، اس لئے تکمیل کا عمل ہو سکتا ہے۔

اگر کوئی منحنی کی مسادات قطبی محدودوں میں  $r = f(\theta)$  دی ہوئی ہو تو قطبی عنصر  $r$  مف  $r$  کو گردش دینے سے یہ نصف قطر رجب طہ کا ایک دائرہ مرسم کرتا ہے۔ اس لئے

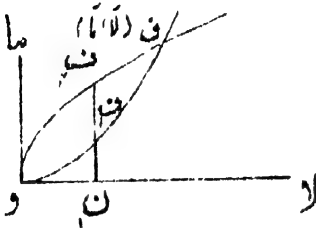
$$\text{حجم کا } \bar{\alpha} = \frac{\sum r \text{ مف طہ} \times r \text{ رجب طہ}}{\sum r \text{ مف طہ} \times r \text{ رجب طہ}} = \frac{\sum r^3 \text{ رجب طہ}}{\sum r^2 \text{ رجب طہ}}$$

ر کی انتہائیں صفر سے  $f(\theta)$  ہیں اور طہ کی انتہائیں زیر غور منحنی کے حصہ پر منحصر ہیں۔  
اسی طرح

$$\text{سطح کا } \bar{\alpha} = \frac{\sum \pi \text{ ماف س} \times r \text{ رجب طہ}}{\sum \pi \text{ ماف س} \times r \text{ رجب طہ}} = \frac{\sum r^2 \text{ رجب طہ}}{\sum r \text{ رجب طہ}}$$



مشق ۲۔ اس حجم کا مرکز ثقل معلوم کرو جو مکایفوں  $\lambda = \mu$  لایا اور  $\lambda = \mu$  ب م سے گھرے ہوئے رقبہ کو محور لاکے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔



سم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں سطحیوں کے نقطہ تقاطع ف کے محدد ہیں۔

$$\lambda = \mu \text{ و } \lambda = \mu^2, \text{ م } = \mu \text{ و } \lambda = \mu^2$$

$$\text{اگر } \lambda = \mu, \text{ ن, ف, م} \\ \text{م, ن, ف} = \mu, \text{ م, م, م, م, م, م}$$

$$\frac{\int_0^{\lambda} \int_0^{\mu} \mu \, d\mu \, d\lambda}{\int_0^{\lambda} \int_0^{\mu} d\mu \, d\lambda} = \frac{\int_0^{\lambda} \mu^2 \, d\lambda}{\int_0^{\lambda} \mu \, d\lambda} = \frac{\frac{\mu^3}{3} \Big|_0^{\lambda}}{\frac{\mu^2}{2} \Big|_0^{\lambda}} = \frac{\frac{\lambda^3}{3}}{\frac{\lambda^2}{2}} = \frac{2}{3} \lambda$$

$$\frac{\int_0^{\lambda} \int_0^{\mu} \mu^2 \, d\mu \, d\lambda}{\int_0^{\lambda} \int_0^{\mu} \mu \, d\mu \, d\lambda} = \frac{\int_0^{\lambda} \left[ \frac{\mu^3}{3} \right]_0^{\mu} \, d\lambda}{\int_0^{\lambda} \left[ \frac{\mu^2}{2} \right]_0^{\mu} \, d\lambda} = \frac{\int_0^{\lambda} \frac{\mu^3}{3} \, d\lambda}{\int_0^{\lambda} \frac{\mu^2}{2} \, d\lambda} = \frac{\frac{\mu^4}{12} \Big|_0^{\lambda}}{\frac{\mu^3}{6} \Big|_0^{\lambda}} = \frac{\frac{\lambda^4}{12}}{\frac{\lambda^3}{6}} = \frac{\lambda}{2}$$

### مثالیں

ذیل کے سطحیوں کی گردش سے جو سطحیں بنتی ہیں ان کے مرکز ثقل معلوم کرو۔  
۱۔ مکانی  $\lambda = \mu$  و  $\lambda = \mu^2$  ج سے کاٹ کر محور کے گرد گھمانے سے

$$\left[ \frac{\int_0^{\lambda} \int_0^{\mu} \mu^2 \, d\mu \, d\lambda}{\int_0^{\lambda} \int_0^{\mu} \mu \, d\mu \, d\lambda} \right] = \left[ \frac{\int_0^{\lambda} \left( \frac{\mu^3}{3} \right) \, d\lambda}{\int_0^{\lambda} \left( \frac{\mu^2}{2} \right) \, d\lambda} \right] = \left[ \frac{\frac{\mu^4}{12} \Big|_0^{\lambda}}{\frac{\mu^3}{6} \Big|_0^{\lambda}} \right] = \left[ \frac{\frac{\lambda^4}{12}}{\frac{\lambda^3}{6}} \right] = \left[ \frac{\lambda}{2} \right]$$

۲۔ خط تدریر  $\lambda = \mu$  و  $\lambda = \mu^2$  ج سے کاٹ کر محور کے گرد۔

$$\left[ \frac{8 - \pi 15}{\pi - \pi 3} \times \frac{42}{15} = \bar{a} \right]$$

۳۔ صنوبری  $r = 1$  (۱ + جم ط) کو اس کے محور کے گرد۔  $\left[ \frac{50}{4\pi} = \bar{a} \right]$

۴۔  $r = 2$  و جم ط کا ایک حلقہ خط ابتدائی کے گرد۔  $\left[ \frac{4}{4} = \bar{a} \right]$  (۲ + ۲)

ذیل کے منحنیوں کی گردش سے جو مجسم بنتے ہیں ان کے مجموعوں کے مرکز ثقل معلوم کرو۔  
۵۔ مکافی  $\pi = 2$  و لا کا وہ حصہ جو معین  $\pi = 3$  سے منقطع ہوتا ہے اور محور لا کے

گرد گھمانے سے۔  $\left[ \frac{52}{3} = \bar{a} \right]$

۶۔  $\pi = 4$  و لا کو محور لا کے گرد۔  $\left[ \frac{4}{4} \times \frac{\pi 3 + \pi}{\pi 2 + \pi} = \bar{a} \right]$

۷۔  $\pi = 4$  و لا  $\pi = 2$  کو محور لا کے گرد۔

$$\left[ \frac{\pi 3}{\pi 2} = \bar{a} \right]$$

۸۔ نصف قطر کے دائرہ کو خط عا س کے گرد دو قانوں میں سے گھمانے سے جو مجسم

$$\left[ \frac{45}{\pi 2} = \bar{a} \right]$$

۹۔ خط تدویر لا = ۱ (ط + جب ط) ۱، ۱، ۱ (۱ - جم ط) کو محور لا کے گرد گھمانے سے۔

$$\left[ \frac{4}{4} \times \frac{42 - \pi 43}{14 - \pi 9} = \bar{a} \right]$$

۱۰۔  $r = 1$  (۱ + جم ط) کو اس کے محور کے گرد۔  $\left[ \frac{4}{5} = \bar{a} \right]$

۱۱۔ ثابت کرو کہ کرہ کی ایک پھانک کا مرکز ثقل جس کا زاویہ  $\pi$  ہے اس کے محدد سے  
واجب  $\frac{\pi}{2}$  فاصلہ پر ہوتا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ نصف قطر کے ایک کرہ کے قطاع کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے  
 $\frac{\pi}{8}$  (۱ + جم ط) ہے جہاں  $\pi$  وہ زاویہ ہے جو قطاع کے کروی قاعدہ پر کے کسی

نقطہ میں سے گزرنے والا نصف قطر قطاع کے محور کے ساتھ بناتا ہے۔

۱۳۔ ایک کرہ کا نصف قطر  $\frac{1}{2}$  ہے اس کے کسی نقطہ پر کثافت مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کے تناسب ہے اگر اس میں ایک کرہ جس کا قطر اول الذکر کرہ کا نصف قطر ہو کاٹ لیا جائے تو ثابت کرو کہ باقی ماندہ مجسمہ مرکز ثقل مرکز سے  $\frac{1}{4}$  فاصلہ پر ہوگا۔  
 ۱۴۔ ایک کرہ کے کسی نقطہ پر کثافت سطح پر کے ایک ثابت نقطہ سے فاصلہ کے مربع کے بالعکس تناسب ہے۔ ثابت کرو کہ کرہ کا مرکز ثقل ثابت نقطہ میں سے گزرنے والے نصف قطر کی تنصیف کرتا ہے۔

۱۵۔ ایک نصف کرہ کی کثافت کسی نقطہ پر مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کی  $n$  دیں تو ت کے تناسب ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز ثقل اس نصف قطر کی نصف کرہ کی مستوی سطح پر عمود وار ہے نسبت  $n + 3 : n + 5$  میں تقسیم کرتا ہے۔

۱۶۔ اگر زمین کو نصف قطر  $\frac{1}{2}$  کا ایک کرہ فرض کیا جائے تو لاپلاس کے کلیہ کی مطابق  $k = \frac{1}{2} \frac{g}{R}$  جہاں  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  اور  $k$  فاصلہ لا پر کی کثافت ہے۔

ثابت کرو کہ نصف کرہ زمین کے مرکز ثقل کا فاصلہ مرکز سے

$$\frac{1}{2} (2 - \frac{1}{2}) \text{ جم } = 2 + \frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{2} = 2 \text{ ہے۔}$$

۱۷۔ نصف قطر  $\frac{1}{2}$  کے ایک دائرہ کو اس کی سطح مستوی میں ایک ایسے خط کے گرد جس کا فاصلہ اس دائرہ کے مرکز سے  $\frac{1}{2}$  ہے گھمانے سے ایک نامکمل حلقہ بنایا گیا ہے۔ اگر وہ زاویہ جس میں سے دائرہ گھومے  $2\pi$  ہو تو

$$\text{مجسمہ کا مرکز ثقل خط مذکور سے } \frac{1}{2} \frac{2\pi + \frac{1}{2}}{2\pi} \times \frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ہے}$$

۱۸۔ ایک یکساں مجسمہ ایسی سطح سے گھرا ہوا ہے جو خط تدویر کو قاعدہ کے گرد گھمانے سے بنتی ہے۔ محور گردش میں سے گزرنے والے مستوی سے اس مجسمہ کو دو حصوں میں

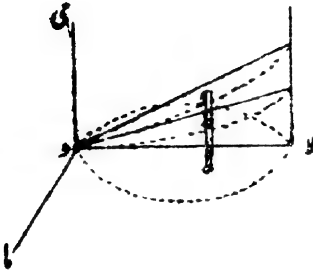
کاٹا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ مجسمہ کے ہر دو حصوں کا مرکز ثقل مستوی رخ سے  $\frac{1}{2}$  فاصلہ پر ہے







مشق ۲۔ اسطوانہ ۲ لا + ما = ۲ لا کو سطوح مستوی سی = مم لا اور سی = ن لا سے  
کامیابی سے جو حجم حاصل ہوتا ہے اس کا  
مرکز ثقل معلوم کر دو۔



اگر ہم سطح مستوی لا سے اسطوانہ  
کی تراش کا کوئی غنصر صغیر لا صغیر مایلین  
تو اس کے اوپر کا حجم صریحاً

صغیر لا × صغیر ما × (م - ن) لا کے  
مساوی ہے اور مستوی لا ما کے اوپر اس  
مرکز ثقل کی بلندی  $\frac{م + ن}{۲}$  لا ہے۔

اس لئے لا =  $\frac{\text{لا فرما فرما (م - ن) لا} \times \text{لا}}{\text{لا (فرما فرما (م - ن) لا)}}$  جہاں ما کی انتہائیں  $\sqrt{۲ لا - لا}$  سے

$\sqrt{۲ لا - لا}$  اور لا کی انتہائیں صفر سے و تک ہیں۔

اس لئے لا =  $\frac{\text{لا}^2 \text{ما} - \text{لا فرما}}{\text{لا}^2 \text{ما} - \text{لا فرما}}$  کی جب ذہن فرما  
اگر لا = ۱ جب ذہن تو

$\frac{۱}{۲} = \frac{\text{لا}^2 (\text{جب ذہن} - \text{جب ذہن فرما})}{\text{لا}^2 (\text{جب ذہن} - \text{جب ذہن فرما})}$

اسی طرح سی =  $\frac{\text{لا فرما فرما (م - ن) لا} \times \frac{م + ن}{۲}}{\text{لا فرما فرما (م - ن) لا}}$   $\frac{۱}{۲} = \frac{م + ن}{۲}$  لا =  $\frac{۱}{۲} (م + ن)$



$$\bar{L} = \frac{(1 + \frac{q}{p}) \text{ جا } (\frac{1}{p} + \frac{q}{p}) \text{ جا } (\frac{1}{p} + \frac{q}{p}) \text{ جا } (\frac{1}{p} + \frac{q}{p})}{\text{جا } (\frac{5}{p} + \frac{r+q+p}{p})}$$

$$= \frac{\text{جا } (\frac{1}{p} + \frac{q}{p}) \text{ جا } (\frac{5}{p} + \frac{r+q+p}{p})}{\text{جا } (\frac{1}{p} + \frac{q}{p}) \text{ جا } (\frac{5}{p} + \frac{r+q+p}{p})}$$

اگر  $q = r = 0$  تو  $\bar{L} = \frac{\text{جا } (\frac{1}{p}) \text{ جا } (\frac{5}{p})}{\text{جا } (\frac{1}{p}) \text{ جا } (\frac{5}{p})} = \frac{1}{5}$

جیسا کہ مشتق میں

$$\text{اگر } q = r = 1 \text{ تو } \bar{L} = \frac{\text{جا } (\frac{2}{p}) \text{ جا } (\frac{6}{p})}{\text{جا } (\frac{1}{p}) \text{ جا } (\frac{6}{p})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{14}{35} = \frac{\text{جا } (\frac{3}{p}) \text{ جا } (\frac{7}{p})}{\text{جا } (\frac{1}{p}) \text{ جا } (\frac{7}{p})}$$

$$\text{اگر } q = r = 2 \text{ تو } \bar{L} = \frac{\text{جا } (\frac{4}{p}) \text{ جا } (\frac{8}{p})}{\text{جا } (\frac{2}{p}) \text{ جا } (\frac{8}{p})} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

۵۔ اگر مجسم کی مسادات قطبی محدودوں میں دی ہوئی ہو اور کسی نقطہ ن کے محدود (ر، ط، ذ) ہوں جہاں  $ون = ر$ ،  $می ون = ط$ ، اور  $ذ$  وہ زاویہ ہو جو سطح مستوی می ون، می و لا کے ساتھ بنائی ہے تو

حجم کا عنصر  $مف ر \times ر مف ط \times ر جب ط مف ذ$  یعنی  $ر جب ط مف ر$  مف ذ ہے

ہو گا اس لئے

$$\bar{L} = \frac{\text{جا } ر جب ط مف ر \times ر مف ط \times ر جب ط مف ذ}{\text{جا } ر جب ط مف ر \times ر مف ط \times ر جب ط مف ذ}$$





$$۵ - \frac{۱}{ب} + \frac{۲}{ج} - \frac{۱۲}{ا} = ۰ ، ۱۲ = لا ، ۱۱ = ما ، ۱۰ = سی$$

$$\left[ \frac{ج ۳۲}{۳۱۵} ، \frac{ب ۳۲}{۳۱۵} ، \frac{ا ۳۲}{۳} \right]$$

$$۶ - \left( \frac{۱۲}{ا} \right) + \left( \frac{۲}{ب} \right) + \left( \frac{۲}{ج} \right) = \text{اکا وہ حصہ جو مثبت ثقل میں واقع ہے}$$

$$\left[ \frac{ج ۲۱}{۱۲۸} ، \frac{ب ۲۱}{۱۲۸} ، \frac{ا ۲۱}{۱۲۸} \right]$$

۷۔ ایک کرہ کا نصف قطر ہے اس میں سے قطر کا ایک مستدیر اسطوانہ اس طرح کاٹا گیا ہے کہ اسطوانہ کرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کے اندر والے کرہ کے حصہ کا مرکز ثقل کرہ کے مرکز سے  $\frac{۱۲}{۱۰-۳۱۵}$  فاصلہ پر ہے۔

۱۵۱۔ کسی کروی مثلث کا مرکز ثقل۔

فرض کرو کہ مثلث ا ب ج ہے اور کرہ کا مرکز وہ ہے

نیز فرض کرو کہ وج، ی کا محور ہے

اور ولا اور و ما دو عمودی محور ہیں جن میں

سے ولا مستوی ج و ا میں واقع ہے۔

فرض کرو کہ مثلث پر کوئی نقطہ ن

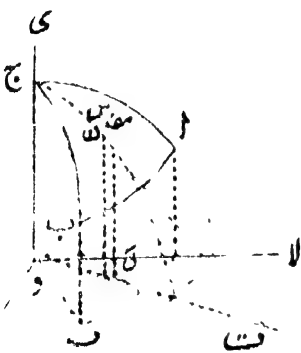
ہے اور دائرہ ج ن کا ن پر تماس

لا و ما مستوی سے مت پر ملتا ہے۔

ن ن اس مستوی پر مین کھینچو۔ ن پر

مثلث کا ایک چھوٹا عنصر مت نس لو اور

فرض کرو کہ اس کا ظل مستوی لا و ما پر مت صہ ہے۔



تب مت نس = جم ن ن = جب ن و ت =  $\frac{کی}{ر}$  جہاں ر مین

ہے ن کا اور مرکزہ کا نصف قطر ہے۔

$$\therefore \text{ی} \times \text{مف س} = \text{ر} \times \text{مف ص}$$

اس لئے اگر تہی مطلوبہ مرکز ثقل کا معین ہو تو

$$\frac{\text{ی} \times \text{مف س}}{\text{مف س}} = \frac{\text{ر} \times \text{مف ص}}{\text{مف س}} \quad (۱)$$

جہاں س مثلث کا رقبہ ہے اور ص سطح لاوما پر اس مثلث کے ظل کا رقبہ ہے۔

اب ص = رقبہ ا ج لب کا ظل مستوی لاوما پر

= رقبہ ا و لب کا ظل مستوی لاوما پر

$$= \frac{۱}{۲} \times (\text{زاویہ ا و ب}) \times \text{جم (اس زاویہ کا جو ا و ب اور لاوما کے درمیان ہے)}$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \text{ج} \times \text{ج ب (اس زاویہ کا جو ج اور ا و ب کے درمیان ہے)}$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \text{ج} \times \text{ج ب جہاں ج وہ قوس ہے جو ج سے لب پر عمودوار}$$

کھلی جائے۔

$$= \frac{۱}{۲} \times \text{ج} \times \text{ج ب جب ا}$$

نیز س = ر ج جہاں ذکر دی اضافہ ہے

$$\therefore \text{ی} = \frac{\text{ج} \times \text{ج ب جب ا}}{\text{و}}$$

اس سے وجہ پر مرکز ثقل کے ظل کا و سے فاصلہ معلوم ہوتا ہے اسی قسم کے ضابطوں سے و ا اور و ب پر ظلوں کے فاصلے معلوم ہوتے ہیں۔ اس لئے اس کا مقام معلوم ہو گیا۔

۱۵۲۔ دفعہ گزشتہ کا ربط (۱) یقیناً کرہ پر کے ہر ایک رقبہ پر صادق آتا ہے خواہ

وہ رقبہ مثلث ہو یا نہیں۔

اس لئے معلوم ہوا کہ اگر کرہ کی سطح پر کوئی رقبہ س ہو تو اس کے مرکز ثقل کا



فاصلہ سطح مستوی لا و ا سے جو کرہ کے مرکز میں سے گزرتی ہے مساوی ہوتا ہے  
اس حاصل ضرب کے جس کا ایک جزو کرہ کا نصف قطر ہے اور دوسرا جزو وہ نسبت  
ہے جو سطح لا و ا پر رقبہ اس کے ظل کو خود رقبہ اس سے ہے۔  
مشق - ثابت کرو کہ رقبہ کے مرکز نقل کا فاصلہ اس سطح مستوی سے جو مثلث  
کے ضلع ا ب اور کرہ کے مرکز میں سے گزرتی ہے

$$\frac{1}{4} \times (ج - ب \times ل - ا \times جم ب) \text{ ہے۔}$$

۳۵ پہلے پس کا مسئلہ۔ اگر کوئی مستوی رقبہ اپنے مستوی میں کسی محور کے گرد  
کسی زاویے میں سے گھومے تو (۱) جو حجم اس طرح سے تکوین پائے گا وہ رقبہ اور  
رقبہ کے مرکز نقل نے جو فاصلہ طے کیا ہے ان دونوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا  
اور (۲) جو سطح اس طرح مرتسم ہوگی اس کا رقبہ گھومنے والے رقبہ کے محیط اور جو  
فاصلہ محیط کے مرکز نقل نے طے کیا ہے ان دونوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا۔  
فرض کرو کہ منحنی کا رقبہ ا اور منحنی کا محیط اس ہے اور گھومنے کے محور سے  
جس کو لا کا محور مانا گیا ہے منحنی کے رقبہ کے مرکز نقل کا فاصلہ م ا اور منحنی کے محیط  
کے مرکز نقل کا فاصلہ م ا ہے۔

(۱) فرض کرو کہ رقبہ کا کوئی نقطہ ن ہے جس کا مدین م ا ہے تب اگر گھومنے

کا زاویہ ط ہو تو ن سے جو قوس

ہے اس کا طول = م ا ط

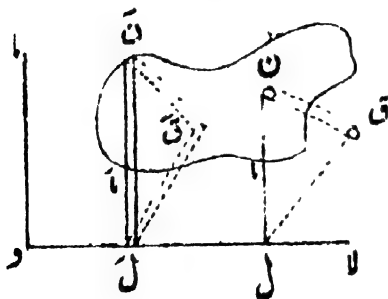
اس لئے رقبہ کے عنصر فرل

سے جو حجم مرتسم ہوتا ہے وہ مساوی

ہے م ا ط  $\times$  فرل کے۔

اس لئے کل حجم جو رقبہ مرتسم

کرتا ہے



$$= م ا ط \times فرل = ط ل \times (م ا \times فرل) = ط ل \times م ا (دفعہ ۴۵ کی رو سے) \\ = ط ل \times م ا ط$$

= منحنی کا قیہ  $\times$  اس قوس کا طول جو رقبہ کا مرکز نقل طے کرتا ہے۔

(۲) فرض کرو کہ منحنی کے محیط پر کوئی نقطہ  $N$  ہے جس کا معین  $M$  ہے۔ دوران گردش میں  $N$  جو منحنی مرتسم کرتا ہے اس کا طول =  $M\hat{A}$   
اس لئے  $N$  پر محیط کے عنصر  $MF$  میں سے جو سطح مرتسم ہوتی ہے وہ  
=  $M\hat{A} \times MF$

اس لئے محیط سے کل سطح جو مرتسم ہوتی ہے وہ

=  $\int (M\hat{A} \times MF) = \int M\hat{A} \times MF = \int M\hat{A} \times MF$  (دفعہ ۴۳ کی رو سے)

=  $M\hat{A} \times M\hat{A}$

= منحنی کا محیط  $\times$  اس قوس کا طول جو محیط کا مرکز نقل طے کرتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک ٹنگر چیلے کا حجم اور سطح معلوم کرو۔

ایک ٹنگر چیلے سے وہ سطح مراد ہوتی ہے جو کوئی دائرہ اپنی سطح میں ایک محور کے گرد گھومنے سے تشکیل کرتا ہے۔ اگر دائرہ کا نصف قطر  $a$  ہو اور اس کے مرکز کا فاصلہ گردش کے محور سے  $b$  ہو تو ایک مکمل گردش میں دائرہ کا مرکز جو فاصلہ مرتسم کرتا ہے وہ  $2\pi b$

اس لئے ٹنگر چیلے کا حجم  $= 2\pi a^2 \times 2\pi b = 4\pi^2 a^2 b$

اور اس کی سطح  $= 2\pi a \times 2\pi b = 4\pi^2 ab$

۲۔ ایک کرہ کا نصف قطر  $a$  ہے اس میں سے ایک ٹھوس قطاع کاٹ لیا گیا ہے جس کے قاعدہ کا محیط مستدیر ہے اور اس محیط کے قطر کے محاذی کرہ کے مرکز پر زاویہ  $2\alpha$  بنتا ہے ثابت کرو کہ قطاع کا حجم  $\frac{2}{3}\pi a^3 \times \sin^2 \alpha$  جب  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ہے اور اس کی منحنی سطح  $\pi a^2$  جب  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ہے

(دائرہ کے ایک قطاع کو اس کے ایک حائل نصف قطر کے گرد گھماؤ)

۳۔ پے پس کے مسئلہ کی مدد سے ایک قائم مخروط کے مقطوع کی سطح اور حجم اس کے

مستوی سروں کے نصف قطروں اور ارتفاع کی رقوم میں معلوم کرو۔  
۴۔ پے پس کے مسئلوں سے ایک نصف دائرہ کی قوس اور رقبہ کے مرکز ثقلوں کے مقام معلوم کرو۔

۵۔ ایک مثلث کا رقبہ ق ہے اور یہ اپنی سطح مستوی میں ایک خط کے گرد گھومتا ہے مثلث کے رأسوں سے اس خط پر عمود کھینچے گئے ہیں اور ان کے طول بالترتیب

ع، ع، ع ہیں۔ ثابت کرو کہ حجم  $\frac{\pi}{3} ق \times (ع + ع + ع)$  ہے۔

۶۔ صفحہ (۲۲۱) مثال (۱) اور صفحہ (۲۲۵) مشق ۲ کے نتیجوں کو استعمال کرنے سے اس جسم کا حجم اور سطح معلوم کرو جو ایک خط تدویر کو اس کے قاعدہ کے گرد مکمل گردش دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

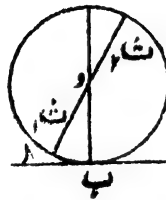
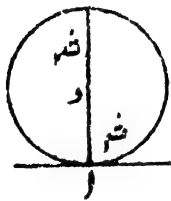
# نواں باب

## قائم اور غیر قائم تعادل

۴۵۱۔ ہم حصہ ۱۴ میں بتا چکے ہیں کہ اگر اُس دفعہ کی شکل (۱) کے جسم کو خفیف سا ہٹا دیا جائے تو وہ اسی محل تعادل میں واپس آنے کی کوشش کرتا ہے۔ اگر شکل (۲) کے جسم کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو وہ ابتدائی محل میں آنے کی کوشش نہیں کرے گا۔ بلکہ اس محل تعادل سے اور دور ہٹ جاتا ہے۔

پہلے جسم کے تعادل کو قائم تعادل اور دوسرے جسم کے تعادل کو غیر قائم تعادل کہتے ہیں۔

اب ایک وزنی کرہ پر غور کرو جو افقی مستوی پر رکھا ہوا ہے اور جس کا مرکز ثقل اُس کے مرکز پر منطبق نہیں ہے۔



فرض کرو کہ یہی شکل سے کردہ محل تعادل ظاہر کیا گیا ہے اور کہ اس کا مرکز ثقل یا تو کرہ کے مرکز سے نیچے نقطہ ثقل پر ہوگا یا اوپر نقطہ ثقل پر ہوگا۔  
نیز فرض کرو کہ دوسری شکل میں کرہ کا محل جبکہ وہ چھوٹے زاویہ میں سے گھوم جاتا ہے دکھایا گیا ہے۔

اب کرہ اور مستوی سطح کا نقطہ تماس تب ہوگا۔  
 سطح مستوی کا تعادل اب بھی کرہ کے مرکز میں سے گزرے گا۔  
 اگر جسم کا وزن شا میں سے عمل کرے تو ظاہر ہے کہ جسم اپنے ابتدائی محل توازن میں واپس آجائے گا اور جسم کی ابتدائی حالت قائم تعادل کی تھی۔  
 اگر وزن نقطہ شا میں سے عمل کرے تو جسم ہٹاؤ کے بعد اپنے ابتدائی محل توازن سے اور دور ہٹ جائیگا۔ اس لئے ابتداً جسم غیر قائم تعادل کی حالت میں تھا۔

اگر جسم کا مرکز ثقل وپر ہوتا تو دوسری شکل میں بھی جسم کا وزن سطح مستوی کے تعادل کے ساتھ متوازن ہوتا۔ اس لئے سنے محل میں بھی جسم تعادل میں رہتا ایسی صورت میں تعادل کو نقدی تعادل کہتے ہیں۔

۱۰۵۔ تعریف۔ کوئی جسم قائم تعادل میں اس وقت ہوتا ہے جبکہ محل تعادل میں سے تھوڑا سا ہٹانے کے بعد جسم پر عمل کرنے والی قوتیں جسم کو ابتدائی محل تعادل میں لانے کی طرف میلان رکھتی ہوں۔ یہ غیر قائم تعادل میں اس وقت کہلاتا ہے جبکہ خفیف سے ہٹاؤ کے بعد جسم پر عمل کرنے والی قوتیں جسم کو ابتدائی محل تعادل سے اور برے ہٹانے کا میلان رکھتی ہوں۔ یہ تعادل نقدی میں اس وقت کہلاتا ہے جبکہ ذرا سے ہٹاؤ کے بعد اس پر عمل کرنے والی قوتیں متوازن ہوں۔

عام طور پر ان اجسام کا تعادل جو اوپر سے بھاری ہوں یا جن کے پندے چھوٹے ہوں غیر قائم ہوتا ہے۔

پس نظری طور پر ممکن ہے کہ ایک پن افقی میز پر نوک کے بل تعادل حالت میں سیدھی کھڑی رہ سکے۔ لیکن عمل میں "قاعدۃ التنا" چھوٹا ہوگا کہ ذرا سے ہٹاؤ سے بھی اس کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والا انتصابی خط اس کے قاعدہ کے باہر سے گزرے گا اور پن گر جائے گی۔ اور یہی کیفیت بلڈیال کی چھٹری کی ہوتی ہے جبکہ اس کو ایک سرے کے بل میز پر انتصاباً رکھا جائے۔

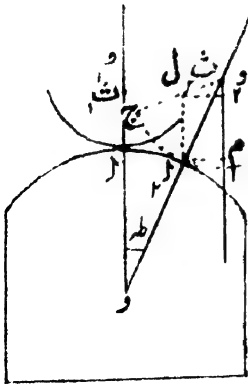
عام اصول یہ ہے کہ جسم قائم تعادل میں اس وقت ہوتا ہے جبکہ اس کا مرکز ثقل ان سب مقاموں سے جو یہ اختیار کر سکتا ہے زیر تر مقام میں ہو اس کی مستحالیں

دفعہ ما قبل کی صورت اور گھڑ پال کا رقصاں ہیں۔ گھڑ پال کا رقصاں ہٹاؤ کے بعد ہمیشہ اپنے ابتدائی محل سکون کی طرف آتا ہے۔

اب اس آدمی کی حالت پر غور کرو جو ایک کسے ہوئے رستے پر چل رہا ہو عام طور پر اس کے ہاتھ میں ایک بانس ہوتا۔ بنے جس کا ایک سرابست دڑنی ہوتا ہے وہ اسے اس طرح رکھتا ہے کہ اس کا اور بانس کا مرکز ثقل ہمیشہ پاؤں کے نیچے رہتا ہے۔ جب وہ ایک طرف کو گرنے لگتا ہے تو وہ بانس کے مقام کو اس طرح بدلتا ہے کہ اس کا اور بانس کا مرکز ثقل اس کے پاؤں کی دوسری جانب آجاتا ہے اور حاصل وزن پھر اس کو کھینچ کر سیدھے محل میں لے آتا ہے۔

اگر نظری طور پر جسم کے ایک سے زیادہ محل توازن ہوں تو وہ محل جس میں اس کا مرکز ثقل سب سے نیچے مقام پر ہو بالعموم تعادل قائم کا محل ہوگا اور وہ محل جس میں اس کا مرکز ثقل بلند ترین مقام پر ہو تعادل غیر قائم کا محل ہوگا۔

۱۵۶۔ ایک جسم دوسرے ثابت جسم پر حالت توازن میں ساکن ہے اور دونوں جسموں کے جو حصے ایک دوسرے سے مس کرتے ہیں وہ کرے ہیں جن کے نصف قطر بالترتیب  $r$  اور  $R$  ہیں اور وہ خط مستقیم جو  $r$  کے مرکزوں کو ملاتا ہے انقباضی ہے اگر اوپر کے جسم کو ذرا سا ہٹا دیا جائے تو معلوم کرو کہ تعادل قائم ہوگا یا غیر قائم اجسام اس قدر کھردرے ہیں کہ پھسلنا ممکن نہیں ہے۔



فرض کرو کہ نیچے جسم کی کوئی سطح کا مرکز  $O$  ہے اور اوپر کے جسم کا مرکز  $O'$  ہے۔

فرض کرو کہ اوپر کے جسم کو ہٹھا کر ذرا سا ہٹا دیا گیا ہے اب اوپر کے جسم کے مرکز ثقل کا نیا محل وہ ہوگا جہاں نقطہ تماس  $A$  مرکز ثقل کا نیا محل  $B$  اور  $C$  کا مقام  $J$  ہوگا۔ اس لئے  $J$  کا طول  $h$  ہوگا۔

لہل انتصاباً کھینچو جو وج سے لی پر ملے اور وہم انتصاباً کھینچو جو لہل  
میں سے گزرنے والے افقی خط سے ملے۔

فرض کرو کہ  $لہ و لہ = ط$  اور  $لہ و لہ = ج = ف$

اس لئے زاویہ ج لہ م = (ط + ف)

چونکہ جسم دوسرے محل میں لڑھک کر آیا ہے اس لئے

قوس لہ لہ = قوس ج لہ م، اس لئے

سراط = رف

جہاں سرا اور ر بالترتیب پخلی اور اد پر کی سطحوں کے نصف قطر ہیں۔

اب متبادل کا قائم یا غیر قائم ہونا اس بات پر منحصر ہے کہ ث م خط لہل کے بائیں  
طرف واقع ہے یا دائیں طرف واقع ہے

یعنی ث م کا فاصلہ وہم سے  $< یا > لہ م$

یعنی (ر-ھ) جب (ط + ف)  $< یا > ر جب ط$

یعنی (ر-ھ) جب  $(\frac{س+ر}{ر} ط)$   $< یا > ر جب ط$

یعنی زاویہ کی جیب کے پھیلاؤ کو زاویہ مذکور کی رفوم میں مندرج کرنے سے

(ر-ھ)  $(\frac{س+ر}{ر} ط - \frac{1}{م}) (\frac{س+ر}{ر} ط^2 + \dots)$

$< یا > ر [ط - \frac{ط^2}{م} + \dots]$  (۲)

یعنی (ر-ھ)  $(\frac{س+ر}{ر} ط - \frac{1}{م}) (\frac{س+ر}{ر} ط^3 + \dots)$   $< یا > ر [ط - \frac{ط^2}{م} + \dots]$

یعنی (ر-ھ) (ر+س)  $< یا > ر$

یعنی ر س  $< یا > ھ (س+ر)$

یعنی  $\frac{1}{ھ} < یا > \frac{1}{ر} + \frac{1}{س}$  (۳)

اس خاص صورت میں جبکہ  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{h}$  یعنی  $h = \frac{r}{2}$  تو ہمیں مساوات (۲) پر پھر غور کرنا چاہیئے لہذا تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا

اگر بالترتیب  $\frac{r}{r} - \left[ \frac{1}{r} - \left( \frac{1}{r} \right)^2 \right] - \left[ \frac{1}{r} - \left( \frac{1}{r} \right)^2 + \dots \right]$

$$< \text{یا} > r - \left( \frac{r}{r} \right) + \dots$$

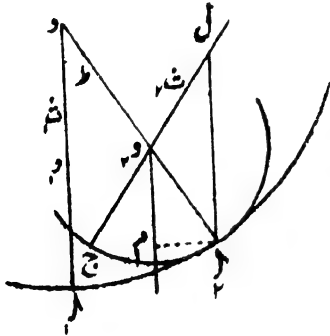
یعنی اگر بالترتیب  $-\frac{1}{r} + (r + r)^2 - r^2 + \dots$  کی بڑی قوتیں

$$< \text{یا} > -\frac{1}{r} + r^2 + \dots$$

یعنی اگر بالترتیب  $(r + r)^2 - r^2$  کی دوسری قوت وغیرہ  $< \text{یا} > r^2$  کی دوسری قوت وغیرہ سے

یعنی اگر  $(r + r)^2 < r^2$  جبکہ  $r$  کو لا انتہا چھوٹا بنایا جائے اس سے ظاہر ہے کہ اس صورت میں تعادل غیر قائم ہوگا۔ پس تعادل قائم صرف اسی صورت میں ہوگا جبکہ  $\frac{1}{h} < \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$  باقی تمام صورتوں میں یہ غیر قائم ہوگا۔

اگر نیچے کی سطح کا انحناء دوسری جانب ہو جیسے ذیل کی شکل دکھایا گیا ہے تو اس صورت میں زاویہ ج دہم = ذہ - طہ



$$= \frac{r - r}{r}$$

اور تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب  $شہ$ ، خط لہل کے بائیں طرف ہو یا دائیں طرف ہو۔

یعنی اگر بالترتیب  $د$ ،  $شہ$  جب  $(طہ - ذہ) > م$  لہ



یعنی اگر (ر-ھ) جب  $\frac{1}{r-h}$  ط  $\geq$  ر جب ط

یعنی اگر (ر-ھ)  $\left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \geq \left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \dots (۴)$

یعنی اگر (ر-ھ)  $\left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \geq \left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \dots$

یعنی اگر (ر-ھ)  $\frac{1}{r-h} \geq$  ر جبکہ ط کو لا انتہا چھوٹا بنا دیا جائے

یعنی اگر ھ  $\frac{1}{r-h} \geq$  یعنی اگر  $\frac{1}{r-h} \leq \frac{1}{r} - \frac{1}{r-h}$

انتہائی صورت میں جبکہ ھ =  $\frac{1}{r-h}$  تو مساوات (۴) میں ط کی اعلیٰ تر

قوتیں یعنی چاہئیں۔

اس صورت میں مساوات (۴) ذیل کی شکل اختیار کرتی ہے

$\frac{1}{r-h} \left[ \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right] \left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \geq \left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \dots$

یعنی اگر  $\frac{1}{r-h} \left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \geq \dots + \frac{1}{r} - \frac{1}{r-h} + \dots$

یعنی اگر  $\left( \frac{1}{r-h} - \frac{1}{r} \right) \geq 1 - \frac{1}{r-h}$  ط کی قوتیں

اس لئے جب زاویہ ط لا انتہا چھوٹا ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ تعادل قائم ہو گا یا غیر قائم

اگر بالترتیب (ر-سا)  $\geq$  ۲

یعنی اگر سا  $\leq$  ۲

اس صورت میں جبکہ سا = ۲ اور اس لئے ھ =  $\frac{1}{r-h}$  = ۲ ر تو

ف =  $\frac{1}{r-h} = ۲$  ط

اور  $\text{ث} = \text{جب (قہ - ط) = (ه - ر) جب (ف - ط) = ر جب ط = هم لہ ہمیشہ -}$

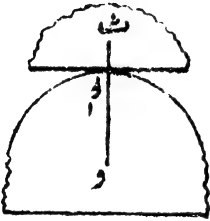
اس خاص صورت میں  $\text{ث}$  ہمیشہ  $\text{ل}$  پر منطبق ہوتا ہے اور اوپر کا جسم

ہمیشہ تعادل میں رہے گا خواہ اس کو کسی زاویہ میں سے گھمایا جائے کیونکہ ہر صورت میں اس کا مرکز ثقل نقطہ تماس کے انتہا یا اوپر ہوگا۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر اوپر کے جسم کی سطح تماس مستوی ہو جیسا کہ ذیل کی شکل میں، تو ر کی قیمت لا متناہی ہوگی۔ پس تعادل قائم ہوگا اگر

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{r_s} \text{ یعنی اگر } r > r_s$$

پس اگر اوپر کے جسم کے مرکز ثقل کا اس کی سطح مستوی سے فاصلہ نچلے جسم کے نصف قطر سے کم ہو تو تعادل قائم ہوگا ورنہ تعادل غیر قائم ہوگا۔



نتیجہ صریح ۲۔ اگر نیچے کا جسم مستوی ہو یعنی  $r_s$  لا متناہی ہو تو تعادل قائم ہوگا اگر

$$\frac{1}{h} < \frac{1}{r} \text{ یعنی اگر } h > r$$

اس لئے اگر کسی جسم کا پیندا کر دی ہو اور اس کو کسی میز پر رکھا جائے تو اس کا

تعادل قائم ہوگا بشرطیکہ نقطہ تماس سے اس کے مرکز ثقل کا فاصلہ کر دی سطح کے نصف قطر سے کم ہو۔

۱۵۷۔ سطحوں کے وہ حصے جو ایک دوسرے سے مس کرتے ہیں کر دی نہ ہوں بلکہ ایسی سطحیں ہوں جن کے انحنائے نصف قطر بالترتیب  $r_s$  اور  $r$  ہوں تو بھی اسی طرح سے معلوم ہو سکتا ہے کہ تعادل قائم ہوگا یا غیر قائم اگر بالترتیب

$$\frac{1}{h} \geq \frac{1}{r} + \frac{1}{r_s}$$



۴۔ ایک وزنی یکساں مکعب ایک کرہ کے بالاترین نقطہ پر ساکن ہے کرہ کا نصف قطر رہے۔ اگر کرہ اس قدر کھردرا ہو کہ مکعب پھسل نہ سکے اور اگر مکعب کا ہر ضلع  $\frac{1}{2}$  ہو تو ثابت کرو کہ مکعب گرنے کے بغیر ایک زاویہ قائمہ میں سے جھول سکتا ہے۔

۵۔ ایک مساوی الساقین مثلث کی شکل کا ایک پتھر ہے جس کا راسی زاویہ  $60^\circ$  ہے اس کو ایک کرہ پر جس کا نصف قطر ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کی سطح مستوی انتصابی ہے اس کے مساوی اضلاع میں سے ایک ضلع کرہ سے مس کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر مثلث کو اپنی سطح مستوی میں ذرا سا ہلادیا جائے تو تعادل قائم ہوگا اگر جب کم ہو  $\frac{1}{2}$  سے جہاں و ثبات کے مساوی اضلاع میں سے ایک کا طول ہے۔

۶۔ ایک ٹھوس متجانس نصف کرہ کا نصف قطر ہے۔ اس کے مستوی قاعدہ پر اُسی شے کا ایک قائم مخروط بنایا گیا ہے اس جسم کو نصف قطر کے ایک دوسرے ثابت کرہ کی مدد ب سطح پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ مخروط کا محور انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ ذرا سے ہٹاؤ کے لئے تعادل قائم رکھنا مقصود ہو تو مخروط کا ارتعاع زیادہ سے زیادہ

$$\frac{1}{4} \sqrt{r(3r+1)} (r-1) \quad [r-2] \text{ ہو سکتا ہے۔}$$

۷۔ ایک معلوم وزن کا ایک رسی کے ذریعے جو ثابت چرخ پر سے گزرتی ہے اور جس کا مقام معلوم ہے کسی چکئی سطح ہل پر ایک اور وزن کو سنبھالے ہوئے ہے۔ سطح مستوی پر و کے تعادل کا محل معلوم کرو۔ بتاؤ کہ یہ قائم ہے۔

۸۔ ایک کھردرا یکساں مستدیر قرص ہے جس کا نصف قطر  $r$  اور وزن  $w$  ہے یہ قرص ایک ایسے نقطہ کے گرد جس کا فاصلہ اس کے مرکز سے  $c$  ہے حرکت کر سکتا ہے۔ ایک رسی جو اس قدر کھردری ہے کہ پھسل نہیں سکتی اس کے محیط پر لٹک رہی ہے اور اس کے سرور سے اوزان  $W$  اور  $w$  بند ہے ہیں۔ تعادل کے محل معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ قائم ہیں یا غیر قائم۔

۹۔ ایک ٹھوس کرہ ایک اور ثابت کھردرے نصف کرہ کی پیالی کے اندر جس کا نصف قطر اس کے نصف قطر کا دو چند ہے ساکن پڑا ہے۔ ثابت کرو کہ کرہ کے بالاترین نقطہ پر خواہ کتنا ہی وزن رکھا جائے ہر حالت میں تعادل قائم ہوگا۔

۱۰۔ ایک پتلا نصف کروی پیالہ جس کا نصف قطر سب اور وزن دہ ہے ایک اور ثابت کردہ کے بالاترین نقطہ پر بحالت تعادل ساکن رہے ثابت کر۔ بعد نصف قطر دہ ہے اور یہ اس قدر کھردرا ہے کہ پیالہ پچھل نہیں سکتا پیالہ کے اندر ایک جھوٹا اور چمکتا کردہ پڑا ہے جس کو وزن دہ ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل قائم نہیں ہو سکتا تاہم اس صورت کے جب کہ

## د و ۱۱

۱۱۔ ایک کرد پانی کے ایک برتن کے اندر ہزد ڈوبا ہوا ہے ثابت کرو کہ قاعدہ کے کسی محدد حصہ کی چوڑی پر وہ بحالت قائم تعادل ساکن نہیں ہو سکتا۔

۱۲۔ تین مساوی ذرے ہیں جو ایک دوسرے کو ایسی قوتیں دیتے ہیں جو ان کے فاصلوں کے  $n$  ویں قوت کی متناسب ہیں۔ ان کو تین مساوی پیکلدار میون سے

مربوط کیا گیا ہے۔ تعادل کا محل معلوم کرنا ثابت کرو کہ یہ قائم ہو گا اگر  $n > \frac{5}{2}$ ۔

جہاں کسی رسی کا بغیر کھچاؤ کے طول بہت دور دیکھا جائے بعد اس کا طول ہے۔

۱۳۔ ایک ٹھوس ناقص بنا جس کے محوروں کے طولی ۲/۱۳۲، ۲/۱۳۲، ۲/۱۳۲ ہیں۔ ایک کھردری سطح پر اس طرح ساکن ہے کہ سطح کا محور انتصابی ہے۔

مرکز ثقل انتصابی محور پر پچھلے اس سے فاصلہ دہ ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل قائم

ہو گا اگر  $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$  اور  $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ۔

۱۴۔ ایک رسی کا محور ایک ثابت گزرنے والی مکانی بنا پر اس طرح ساکن ہے کہ اس کے قاعدہ کا مرکز مکانی کے راس پر ہے۔ محوروں میں سے کسی مکانی کے قطر خاص کے دو چند ہے۔ ثابت کرو کہ پہلے محور تک تعادل قائم ہو گا اگر  $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$  اور  $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ۔

۱۵۔ ایک وزنی جسم جس کی تراش خطہ ہے۔ یہ ایک کھردری انتہی سطح مستوی پر ساکن ہے اور اس کا مرکز ثقل نقطہ تماس پر کے سطح سے  $\frac{1}{2}$  کے فاصلہ پر ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل غیر قائم ہے۔

۱۶۔ گردش مکانی نما کے ایک ٹھوس مقطوع کی بلندی  $h$  اور  $d$  وتر خاص  $m$  ہے۔  
یہ ایک اور گردش مکانی نما پر اس طرح ساکن ہے کہ دونوں کے راس ایک دوسرے پر  
منطبق ہوتے ہیں۔ مؤخر الذکر مکانی نما کا وتر خاص  $m$  ب ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل قائم ہوگا

$$\text{اگر } h > \frac{m}{2} \text{ ب}$$

۱۷۔ ایک پتر خط تدویر کی شکل کا ہے جس کا کون دائرہ کا نصف قطر ہے۔ یہ ایک  
اور خط تدویر پر جس کا کون دائرہ کا نصف قطر ب ہے اس طرح ساکن ہے کہ  
دونوں کے راس ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔ اور دونوں کے محور انتہائی ہیں  
اگر اوپر کے خط تدویر کے مرکز ثقل کی بلندی اس کے راس کے اوپر  $h$  ہو تو ثابت کرو کہ  
تعادل قائم صرف اسی صورت میں ہوگا جبکہ  $h > \frac{m}{2} \text{ ب}$  ورنہ غیر قائم ہوگا۔

۱۸۔ ایک مکانی نما پیالہ جس کا وزن  $W$  ہے ایک افقی میز پر پڑا ہے۔ اس کے اندر کچھ  
پانی ہے جس کا وزن  $N$  ہے اگر پیالہ اور پانی کے مرکز ثقل کی بلندی  $h$  ہو تو ثابت کرو  
کہ تعادل قائم ہوگا اگر مکانی کا وتر خاص کے  $2(1+N)$  ہ۔

۱۵۸۔ فرض کرو کہ ہمارے پاس ایک جسم یا جسموں کا ایک نظام ہے جن پر سوائے  
ان کے وزنوں کے اور کوئی قوت عمل نہیں کر رہی ہے اور جو چکنی ثابت سطحوں  
کے تعامل سے یا دیگر قوتوں سے جو موہوم کام کی مساوات میں نہیں آتیں سہارے  
ہوئے ہیں۔ تب اگر جسموں کے وزن  $W_1, W_2, \dots$  ہوں اور کسی ثابت سطح مستوی  
کے اوپر ان کے مرکز ثقلوں کی بلندیاں  $y_1, y_2, \dots$  ہوں تو موہوم کام کی مساوات  
ہو جاتی ہے

$$- W_1 y_1 - W_2 y_2 - \dots = 0$$

اگر پورے نظام کا کل وزن  $W$  ہو اور اس کے مرکز ثقل کی بلندی  $y$  ہو تو  
موہوم کام کی مساوات ہوتی ہے  
-  $W y = 0$

لیکن مفہوم یہ ہے۔ اس بات کی ضرورت ہے کہ مرکز ثقل کی بلندی کی اعظم یا اقل قیمت ہو۔ اگر مرکز ثقل کی بلندی حقیقتاً بڑی سے بڑی ہے تو نظام کے کسی چھوٹے سے چھوٹے ہٹاؤ کے لئے مرکز ثقل نیچا ہو جائیگا۔ اب اگر اس قسم کے ہٹاؤ کے بعد نظام کو لمحہ بھر کے لئے ساکن کر کے چھوڑ دیا جائے تو ظاہر ہے کہ یہ اپنے ابتدائی محل تعادل کی طرف واپس نہیں آئے گا۔ کیونکہ یہ بات علم حرکت کے اس اصول کے خلاف ہے کہ اس قسم کے کسی نظام کی توانائی بالحرکت انجام شدہ کام کے مساوی ہوتی ہے۔ پس نظام اپنے محل تعادل کی طرف واپس نہیں جائے گا بلکہ اس سے دور ہٹ جائے گا۔ ایسی صورت میں تعادل کو غیر قائم تعادل کہتے ہیں۔

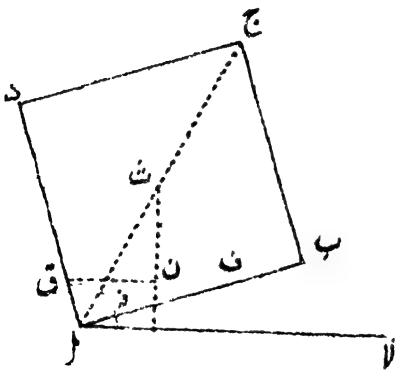
اگر مرکز ثقل کی بلندی حقیقتاً چھوٹی سے چھوٹی ہو تو کسی چھوٹے سے چھوٹے ہٹاؤ کے لئے مرکز ثقل کی بلندی بڑھ جائے گی۔ اس صورت میں اگر نظام کو ایک لمحہ کے لئے ساکن کر کے چھوڑ دیا جائے تو وہ اپنے ابتدائی محل تعادل کی طرف عود کر آئیگا۔ اس لئے اس صورت میں تعادل کو قائم تعادل کہتے ہیں۔

لہذا کسی جسم یا جسموں کے کسی نظام کا تعادل حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔ کسی ثابت سطح مستوی سے اوپر جسم کے مرکز ثقل کی بلندی کی کو کسی غیر تاج متغیر ط کے تفاعل کے طور پر بیان کر دو مساوات فرمائی۔  $\frac{W}{r} = \frac{W}{r^2}$  کو ط کے لئے حل کرو اور فرض کر دو کہ ط = عد، ہ، ج، د، ... اگر  $\frac{W}{r^2}$  کی قیمت میں ط = عد درج کرنے سے یہ مثبت ہو جائے یعنی حقیقتہً اقل ہو تو ط = عد سے قائم تعادل کا ایک محل حاصل ہوگا۔

اگر  $\frac{W}{r^2}$  کی قیمت میں ط = عد درج کرنے سے یہ قیمت منفی ہو جائے یعنی حقیقتہً اعظم ہو تو ط = عد سے غیر قائم تعادل کا ایک محل حاصل ہوگا۔

جیسے جیسے نظام حرکت کرے مختلف محل اختیار کرے اس کا مرکز ثقل کوئی منحنی مرتسم کرے گا اور ہم جانتے ہیں کہ اس منحنی کے اعظم اور اقل معین متبادلاً

واقع ہونگے اس لئے ظاہر ہے کہ غیر قائم اور قائم تعادل کے محل متبادل واقع ہوتے ہیں۔  
 ۱۵۹- مشق ۱- ایک مربع پتہ دو چکنی میچوں پر جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں  
 اس طرح ساکن ہے کہ اس کی سطح انتصابی ہے ثابت کرو کہ تعادل کا مرکز ایک محل ہے  
 تا وقتیکہ میچوں کا درمیانی فاصلہ مربع کے قطر کے ایک چوتھائی سے بڑا نہ ہو لیکن اگر  
 بڑا ہو تو تعادل کے تین محل ہو سکتے ہیں جن میں سے متشاکل محل قائم تعادل کا محل ہوگا  
 اور باقی دو محل غیر قائم تعادل کے۔



فرض کرو کہ ا ب ج ۵ مربع ہے

اور ف اور ق دو میچیں ہیں۔

فرض کرو کہ قطر ا ج = ۲ د اور

ا ج افقی خط ا ل کے ساتھ زاویہ ذ بناتا

ہے ف ق سے اوپر مرکز ثقل ث کی

بلندی ث ث ل (یعنی) جملہ ذیل سے

حاصل ہوتی ہے

یعنی = ا ث جب ذ - ا ف جب ذ (۵-۴)

= د جب ذ - ج جم ذ (۵-۴) جب ذ (۵-۴) اگر ف ق = ج

یعنی یعنی = د جب ذ + ج جم ذ - ۲ جم ذ - ۲ جم ذ - ۲ جم ذ (۱)

۲ جم ذ - ۲ جم ذ = د جب ذ - ج جب ذ ۲ جم ذ - ۲ جم ذ - ۲ جم ذ (۲)

۲ جم ذ - ۲ جم ذ = د جب ذ - ۲ جم ذ - ۲ جم ذ - ۲ جم ذ (۳)

اب چونکہ میچیں چکنی ہیں اس لئے موزون کام کی مساوات ہو جاتی ہے  
 د معنی = ۰ اس لئے (۲) کی رو سے تعادل کے محل مساوات ذیل سے معلوم ہوتے  
 ہیں

جم ذ (د - ۲ جم ذ) = ۰ (۴)



اس مساوات کے حل ہیں  $ف = ۹۰$  اور جب  $ف = \frac{۱}{۲} ج$

آخری مساوات کی اصلیں حقیقی صرف اسی صورت میں ہو سکتی ہیں جبکہ  $۲ ج < د$

یعنی جبکہ  $ف < \frac{۱}{۲} ج$

اب اس صورت پر غور کرو جبکہ  $۲ ج < د$

اب تعادل کے تین محل ہیں۔ پہلا وہ ہے جس میں  $۲ ج$  انتصابی ہے اور باقی دو محل وہ ہیں جن میں  $۲ ج$  خط انتصابی کے دونوں طرف خط افقی کے ساتھ زادیہ

جب  $۱ - \frac{۱}{۲} ج$  بناتا ہے۔

جب  $ف = ۹۰$  تو  $(۳)$  کی رو سے  $\frac{ف}{۲} = د - ۲ ج + ۱ ج$  اور یہ مثبت ہے۔

اس لئے  $۲ ج$  کی قیمت اقل ہے اور اس لئے تعادل قائم ہے۔

اگر جب  $ف = \frac{۱}{۲} ج$  تو  $\frac{ف}{۲} = د - ۲ ج + ۱ ج$  جب  $ف = \frac{۱}{۲} ج$  تو  $\frac{ف}{۲} = د - ۲ ج + ۱ ج$

اور یہ منفی ہے اس لئے اس صورت میں  $۲ ج$  اعظم ہے اور بناؤ علیہ تعادل غیر قائم ہے۔

اب وہ صورت لو جس میں  $۲ ج > د$ ۔

اس صورت میں تعادل کا صرف ایک محل ہے جو  $ف = ۹۰$  سے حاصل ہوتا ہے اور تب

$\frac{ف}{۲} = د - ۲ ج + ۱ ج =$  منفی

اس لئے  $۲ ج$  اعظم ہے اور تعادل غیر قائم ہے۔

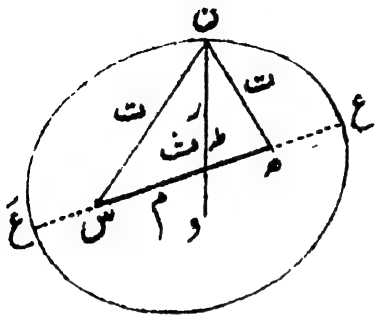
مشق ۲ - ایک سلاخ جس کا طول  $۲ ج$  ہے اور جس کا

مرکز ثقل  $۲ ج$  اس کے وسطی نقطہ سے فاصلہ  $د$  پر ہے سلاخ کے دونوں

سروں سے  $۲ ج$  قطعہ طول کی ایک رسی باندھ کر اس کو ایک چکنی میخ  $۲ ج$  پر

لٹکایا گیا ہے تعادل کا محل معلوم کرو اور دکھاؤ کہ وہ محل جو انتصابی نہیں ہے

غیر قائم ہے۔



چونکہ  $س + ن = ۵۵ = ۲ ج$  قطعاً  
اس لئے ضروری ہے کہ  $م$  بیچ اس ناقص پر  
کہیں نہ کہیں واقع ہو جس کے واسطے  $س$   
اور  $د$  ہیں اور جس کا نصف محور اعظم  
ج قطعاً ہے۔

نیز اس کا نصف محور اصغر

$$= ۲ ج - ۲ قطاع - ۲ م = ۲ ج - ۲ مس$$

پس ناقص کی مسادات ہے  $۲ ج - ۲ م = ۲ مس$  یا  $ث$  میں سے گزرنے  
والے قطبی محوروں کے لحاظ سے

$$ج - ۲ م = ۲ ج - ۲ م = ۲ مس \quad (۱)$$

اگر ہم  $ط$  کی وہ قیمت معلوم کر لیں جس کے لئے  $ر$  اعظم یا اقل ہے اور ناقص پر کے متناظر  
نقطہ  $ن$  کو  $م$  کا مقام تصور کریں اور  $ن$   $ث$  کو انتصابی بنائیں تو ہمیں تعادل کا  
ٹیسٹ حاصل معلوم ہو جائے گا۔

(۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$ج - ۲ م = ۲ ج - ۲ م = ۲ مس \quad (۱)$$

$$\text{اس لئے جم} = \frac{د جب - مس + م - (ج - د) مس}{ر جم}$$

$$\text{ر کی کم سے کم قیمت مرکباً} = \frac{د - مس}{ج - د} \quad (۱)$$

چونکہ اس صورت میں ر کی قیمت اقل ہے اس لئے سلاخ کا مرکز نقل  $م$  سے نیچے اپنی  
کم سے کم گہرائی پر ہے اور اس لئے خط افقی سے اوپر بڑی سے بڑی اونچائی پر ہے،  
لہذا تعادل غیر قائم ہے۔ تعادل کے بانی دو محل وہ ہیں جبکہ  $ن$   $ع$  یا  $ع$  پر منطبق

ہو۔ ان صورتوں میں صلاح صریحاً انتصابی ہوگی۔

اگر نشان اقل ہو تو ظاہر ہے کہ نشان ، ن پر کا عباد ہوگا۔ پس نقطہ ن کا مقام اس امر سے بھی معلوم ہو سکتا ہے کہ یہ وہ نقطہ ہے جس پر کا عباد محور اعظم پر کے ایک معلومہ نقطہ نشان میں سے گزرتا ہے۔

۱۶۰۔ دفعہ ۱۵۶ کے سوال کے قیام تعادل پر بھی اسی طرح باسانی غور کر سکتے ہیں کیونکہ اگر صورت اول میں د کے اند پر نشان کا ارتقاع ہی ہو تو

$$\text{ن} = (\text{س} + \text{ر}) \text{ جم ط} - (\text{ر} - \text{ھ}) \text{ جم } \frac{\text{س} + \text{ط}}{\text{ر}} \text{ ط} \quad (۱)$$

$$\text{فرقی} = (\text{س} + \text{ر}) \text{ جب ط} + (\text{ر} - \text{ھ}) \text{ جب } \frac{\text{س} + \text{ط}}{\text{ر}} \text{ ط} \quad (۲)$$

$$\text{فرقی} = (\text{س} + \text{ر}) \text{ جم ط} + (\text{ر} - \text{ھ}) \left( \frac{\text{س} + \text{ط}}{\text{ر}} \right) \text{ جم } \frac{\text{س} + \text{ط}}{\text{ر}} \text{ ط} \quad (۳)$$

ن کی ایک اعظم یا اقل قیمت صریحاً ط = سے حاصل ہوتی ہے۔ تب ہی کی متناظر قیمت چھوٹی سے چھوٹی یا بڑی سے بڑی ہوگی اور بناؤ ولید تعادل قائم یا غیر قائم

ہوگا اگر بالترتیب فرقی مثبت ہو یا منفی

یعنی اگر - (س + ر) + (ر - ھ) (س + ط) مثبت ہو یا منفی

یعنی اگر ھ  $\geq \frac{\text{س} + \text{ط}}{\text{ر}}$

اگر ھ اس قیمت کے مساوی ہو تو فرقی = ۰ جبکہ ط = ۰

اور احصائے تفرقات کے قواعد کی روش سے ہمیں بالاتر ترتیب کے تفرقی سروں پر غور کرنا چاہیئے۔

اس صورت میں

$$\text{فرقی} = (\text{س} + \text{ر}) - [\text{جم ط} + \text{جم} \left( \frac{\text{س} + \text{ط}}{\text{ر}} \right) \text{ ط}]$$

$$\text{نہ} \quad \frac{\text{فرط}^1}{\text{فرط}^2} = (\text{ر} + \text{س}) - \left[ \text{جب ط} - \left( \frac{\text{س} + \text{ر}}{\text{ر}} \right) \text{جب} \left( \frac{\text{س} + \text{ر}}{\text{ر}} \right) \text{ط} \right]$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{فرط}^1}{\text{فرط}^2} = (\text{ر} + \text{س}) - [\text{جم ط} - \left( \frac{\text{س} + \text{ر}}{\text{ر}} \right) \text{جم} \left( \frac{\text{س} + \text{ر}}{\text{ر}} \right) \text{ط}]$$

اگر ط = ۰ تو  $\frac{\text{فرط}^1}{\text{فرط}^2}$  صفر ہوگا اور  $\frac{\text{فرط}^1}{\text{فرط}^2}$  منفی ہوگا۔

اس لئے جی اعظم ہے اور تعادل غیر قائم ہے۔

دوسری صورت میں وکے نیچے نشان کی گہرائی جی ہو تو

$$\text{جی} = (\text{س} - \text{ر}) \text{جم ط} - (\text{ر} - \text{ھ}) \text{جم} \frac{\text{س} - \text{ر}}{\text{ر}} \text{ط}$$

اور تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب جی اعظم یا اقل ہو

یعنی اگر بالترتیب  $\frac{\text{فرط}^1}{\text{فرط}^2}$  منفی ہو یا مثبت ہو جبکہ ط = ۰۔

یعنی اگر بالترتیب حسب سابق  $\frac{\text{ر}}{\text{س} - \text{ر}} \geq \frac{\text{ر}}{\text{س}}$

اگر ھ اس قیمت کے مساوی ہو تو

$$\frac{\text{فرط}^1}{\text{فرط}^2} = (\text{س} - \text{ر}) [\text{جم ط} + \text{جم} \left( \frac{\text{س} - \text{ر}}{\text{ر}} \right) \text{ط}]$$

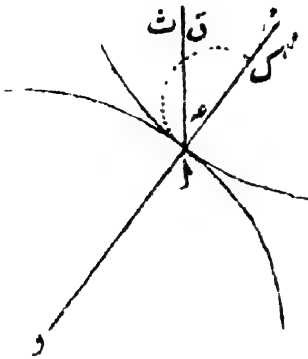
تب  $\frac{\text{فرط}^1}{\text{فرط}^2}$  صفر ہوگا جبکہ ط صفر ہو اور  $\frac{\text{فرط}^1}{\text{فرط}^2}$  منفی یا مثبت ہوگا اگر بالترتیب

$$1 - \left( \frac{\text{س} - \text{ر}}{\text{ر}} \right) \text{منفی یا مثبت ہو}$$

یعنی اگر  $\text{س} \leq \text{ر}$

اس لئے جی اعظم یا اقل ہوگا اور بناءً علیہ تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر  $\text{س} \leq \text{ر}$

۱۶۱۔ اگر دفعہ ۱۵۶ کے سوال میں جسم کے محل توازن میں مشترک عماد انتصبائی نہ ہو



تو اس صورت میں سوال پر ذیل کے طریقہ سے غور کر سکتے ہیں بشرطیکہ مٹاؤ ایسا ہو کہ مرکز ثقل دہا مشترک عماد میں سے گزرنے والے انتصابی سطح مستوی میں حرکت کرے۔

فرض کرو کہ نقطہ تماس لہ پر اوپر کے اور نیچے کے جسموں کے انحنائے نصف قطر بالترتیب مساوی رہیں۔ کیونکہ تعادل کا محل ہے اس لئے  $\theta$  انتہا بال کے اوپر ہوگا۔ فرض کرو کہ  $\theta = \theta$

اور  $\theta = \theta$

تو تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا۔ اگر اوپر کے جسم کو ذرا سا مٹانے پر جسم کا مرکز ثقل  $\theta$  بالترتیب اوپر یا نیچے کی طرف حرکت کرے یعنی اگر بالترتیب  $\theta$  کے طریق کی تعمیر اوپر کی طرف یا نیچے کی طرف ہو یعنی اگر بالترتیب  $\theta$  کے طریق کا مرکز انحنائے سے اوپر یا نیچے ہو۔

گردونیات کے انحنائے نظریہ کی رو سے  $\theta$  کے طریق کا نصف قطر انحنائے ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{\text{جسم ع}}{h} + \frac{\text{جسم ع}}{h}$$

$$\text{جس سے } r = \frac{h \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right)}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{\text{جسم ع}}{h}}$$

جہاں  $\theta$  سے ل کی طرف  $r$  کے ناپنے کو مثبت قرار دیا جائے اس لئے ہر مثبت ہو گا یا منفی جبکہ  $\theta$  کے طریق کا مرکز انحنائے سے نیچے ہو گا یا اوپر

یعنی اگر بالترتیب  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r} < \frac{\text{جسم ع}}{h}$  یا  $\frac{\text{جسم ع}}{h} > \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$

یعنی اگر بالترتیب  $h < \frac{r}{r+h}$  یا  $\frac{r}{r+h}$  جمعو

پس توازن قائم یا غیر قائم ہوگا جبکہ بالترتیب  $h < \frac{r}{r+h}$  یا  $\frac{r}{r+h}$  جمعو

اگر ہم  $\frac{r}{r+h}$  پر ایک اتنا ناپ لیں کہ  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r}$

اور اس لئے  $\frac{r}{r+h}$  اور اگر اس دائرہ سے جو ایک کو قطر مان کر کھینچا جائے قی پر ملے تو

اق = اک جمعو =  $\frac{r}{r+h}$  جمعو

پس تعادل قائم یا غیر قائم ہوگا اگر بالترتیب  $h < \frac{r}{r+h}$  یا  $\frac{r}{r+h}$  جمعو

یعنی اگر بالترتیب اک دائرہ کے اندر یا باہر واقع ہو اس دائرہ کو اس بنا پر قیام کا دائرہ کہتے ہیں۔

اگر اک اس دائرہ پر واقع ہو تو اس کا تعادل تقرب کے پہلے درجہ تک۔  
تقریبی ہوگا اس صورت میں اس کے طریق کا نصف قطر اٹھا لا کر ہی ہوگا اور اک  
اس کے طریق پر نقطہ العطف ہوگا اس دائرہ کو اس لئے اکثر اوقات انعطافوں کا  
دائرہ بھی کہتے ہیں۔

## مثالیں

۱۔ ایک وزنی کیساں صلاح اس طرح ساکن ہے کہ اس کا ایک سر ایک چکنی انتصابی دیوار کے ساتھ لگا ہوا ہے اور اس کے طول پر کا ایک اور نقطہ ایک چکنی میخ پر ساکن ہے۔ تعادل کا محل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ غیر قائم ہے۔

۲۔ دو مساوی یکساں سلاخوں کو ایک سرے پر مضبوطی سے جوڑ دیا گیا ہے اور ان کے درمیان زاویہ قائم ہے اور یہ نصف قطر کے ایک چکنے کرہ پر انتصابی سطح مستوی میں ساکن ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ تعادل قائم یا غیر قائم میں ہوگی اگر بالترتیب ہر ایک صلاح کا طول  $\frac{r}{r+h}$  ہے

۳۔ ایک شہتیر کے سرے دو چکنیائل سطوں پر جوانی کے ساتھ زادے عداورہ بناتی ہیں اور جن کا خط تقاطع الٹی ہے ساکن ہیں۔ لتادل کا محل معلوم کرو اور ثابت کرو کہ یہ غیر قائم ہے۔

۴۔ ایک یکساں وزنی سلاح لب قبضہ کے گرد انتصابی سطح مستوی میں آزادانہ حرکت کر سکتی ہے دوسرے سرے ب کو ایک وزن کے ذریعہ جو ل کے انتصاباوپر ایک چکنی چرخ ج پر سے گزرتا ہے سہارا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ لتادل کا وہ محل جس میں لب سمت انتصابی کے ساتھ کوئی میلان رکھتا ہو غیر قائم ہے۔

۵۔ ایک چکنی سلاح لب ہے جس کا وزن و ہے۔ اس کا ایک سرا ل ایک چکنی افقی سطح مستوی ل ج پر ساکن ہے اور دوسرا سرا ب ایک چکنی انتصابی دیولوب ج کے ساتھ کھکا ہوا ہے۔ سرے ل کے ساتھ ایک رسی بندھی ہوئی ہے جو ج پر ایک چکنی چرخ پر سے گزرتی ہوئی ایک وزن و کو سہارے ہوئے ہے۔ لب ل ج ایک انتصابی سطح مستوی میں ہیں۔ لتادل کا محل معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ غیر قائم ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۴ مشق ۲ کی سلاح کا لتادل قائم ہے۔

۷۔ چار یکساں سلاخیں ہیں جن میں سے ہر ایک کا طول ۲ ہے، ان کے سروں کو جوڑنے سے ایک معین بنایا گیا ہے اور اس معین کو دو چکنی میخوں پر جو ایک ہی افقی خط میں ہیں اور جن کا درمیانی فاصلہ ۱ ماہ ہے اس طرح لٹکا یا گیا ہے کہ میخیں مختلف سلاخوں سے مس کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ نظام لتادل میں ہوگا جبکہ معین مربع ہو لیکن یہ لتادل تمام ہٹاؤں کے لئے قائم نہیں ہے۔

۸۔ ایک مربع پترے کے ایک کونے کے ساتھ ایک رسی بندھی ہے جس کا طول مربع کے ایک ضلع کے مساوی ہے۔ رسی کے ایک سرے کو دیوار کے ایک نقطہ کے ساتھ باندھ کر پترے کو اس طرح متادل رکھا گیا ہے کہ اس کی سطح مستوی دیوار پر عمود وار ہے۔ لتادل کا محل معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ قائم ہے۔

۹۔ ایک یکساں مساوی الساقین پترا ل ب ج ہے یہ پترا دو چکنی میخوں پر جن کا درمیانی فاصلہ ج ہے اور جن کا خط وصل افقی ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کے ضلع ل ب اور ل ج میخوں سے مس کرتے ہیں۔ اگر لب ج پر عمود ل ۱ ۵ ۱ ھ





قائم تعادل کے محل ہونگے۔

۱۴۔ ایک یکساں سلاخ ایک چکنے گردشی مکانی نما کے اندر جس کا محور انتصابی اور اس نیچے کی طرف ہے متوازی الافق محل میں ساکن ہے۔ ثابت کر دو کہ اگر سلاخ ماسکے سے نیچے ہو تو انتصابی سطح مستوی میں سب ہٹاؤں کے لئے تعادل قائم ہوگا اور اگر اوپر ہو تو غیر قائم ہوگا۔

۱۵۔ ایک ٹھوس نصف کرہ ہے جو ایک سطح مستوی پر جو افق کے ساتھ زاویہ  $\theta$  جب قائم بناتی ہے ساکن ہے اور سطح مستوی اس قدر کھردری ہے کہ نصف کرہ پھسل نہیں سکتا۔ تعادل کا محل معلوم کرو اور ثابت کر دو کہ یہ قائم ہے۔

۱۶۔ ایک مکمل طور پر کھردرا کرہ ہے جس کا نصف قطر  $R$  ہے، اسے ایک مستوی رخ والا جسم مس کرتا ہے اور نقطہ تماس پر کاغذی خط انتصابی کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بناتا ہے۔ اگر مرکز ثقل نقطہ تماس سے انتصافاً اوپر  $h$  فاصلہ پر ہو تو ثابت کر دو کہ تعادل قائم ہوگا اگر  $h > R \sin \theta$  اور غیر قائم ہوگا اگر  $h < R \sin \theta$ ۔

۱۷۔ ثابت کر دو کہ اگر کسی قطع ناقص کے قطر کے ذریعہ اس کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے اور ایک نصف کو اس کی سختی سطح کے بل کسی افقی سطح مستوی پر رکھا جائے تو تعادل کا ایک محل قائم ہوگا اگر خروج مرکز  $\frac{2}{3\pi}$  سے کم ہو۔

۱۸۔ ایک ناقص اسٹیزا کو ایک مائل مستوی پر جو افق کے ساتھ رگڑ کے زاویہ  $\theta$  سے کم زاویہ بناتی ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور متوازی الافق ہے۔ ثابت کر دو کہ اسطوانہ ساکن نہیں رہ سکتا اگر سطح مائل کا میلان جب  $(\frac{2}{3} - \frac{\theta}{\pi})$  سے کم ہو اور اگر میلان جب  $(\frac{2}{3} - \frac{\theta}{\pi})$  سے زیادہ ہوگا۔

۱۹۔ ایک ناقصی قرص جس کے نصف محور  $a$  اور  $b$  ہیں ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح پھسلتا ہے کہ ہمیشہ وہ چکنی سلاخوں  $OA$  اور  $OB$  سے مس کرتا ہے جو اسی سطح مستوی میں علی القوائم واقع ہیں۔ ثابت کر دو کہ قائم تعادل کے محلوں میں ناقص کا

محور اعظم ایک نہ ایک سائخ کے متوازی ہوگا اور غیر قائم تعادل کے محل میں یہ ون کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے جہاں جب طہ =  $\frac{\text{واجب ع} - \text{ب جمع ع}}{\text{واجب ع}}$  جہاں ع خط ون کا میلان ہے سمت انتصابی کے ساتھ۔

۲۰۔ نیم غوروں اور ب کا ایک چکنا نقصی اسطوانہ دو مستوی سطحوں کے درمیان پھسلتا ہے جن میں ہر ایک سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ ع بناتی ہے۔

اگر مس ع،  $\frac{\text{واجب ع}}{\text{ب}}$  اور  $\frac{\text{واجب ع}}{\text{ب}}$  کے درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ قائم تعادل کے محل میں اسطوانہ کا محور اعظم خط انتصابی کے ساتھ زاویہ

$$\text{مس} = \frac{\text{واجب ع} - \text{ب جمع ع}}{\text{واجب ع} - \text{ب جمع ع}} \text{ بناتا ہے}$$

میز جبکہ مس ع ان حدود کے اندر واقع نہ ہو تو قائم اور غیر قائم تعادل کے محل معلوم کرو۔





میں ہیں اس لئے ان سے دی ہوئی قوتوں کے نظام پر کوئی اثر نہیں پڑتا اب قوتیں  
 مے جون مے اور ل مے کے ساتھ عمل کرتی ہیں ایک جفت بناتی ہیں  
 جس کا معیار اثر مے  $\times$  م ل یعنی م  $\times$  م ہے اور جو اس سطح مستوی میں  
 جو ولا پر عمود وار ہے ولا کے گرد مثبت سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے وہ  
 اُس جفت کے معادل ہیں جس کا محور ولا ہے اور جو مثبت ہے۔

ل، ق، اور و مے کے ساتھ عمل کرنے والی قوتیں مے ایک جفت بناتی  
 ہیں جس کا معیار اثر مے  $\times$  ول یعنی م ل ہے اور جو ولا پر عمود وار  
 سطح مستوی میں و م کے گرد منفی سمت میں عمل کرتی ہے۔  
 اس لئے ن پر عمل کرنے والی قوت مے ان کے معادل ہے  
 و پر ایک قوت مے جو و م کے ساتھ عمل کرتی ہے  
 ولا کے گرد معیار اثر م ل کا ایک جفت

و م کے گرد معیار اثر - ل مے کا ایک جفت  
 اسی طرح سے ن پر عمل کرنے والی قوت لا معادل ہے ان کے  
 و پر ولا کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت لا  
 و م کے گرد معیار اثر + م ل کا ایک جفت  
 و م کے گرد معیار اثر - م ل کا ایک جفت  
 اسی طرح ن پر عمل کرنے والی قوت م ل معادل ہے ان کے  
 و پر و م کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت م ل  
 و م کے گرد معیار اثر + م ل کا ایک جفت  
 ولا کے گرد معیار اثر - م ل کا ایک جفت

اس لئے ن پر عمل کرنے والی تین ترکیبی قوتیں لا، ما، مے ان کے معادل ہیں  
قوتیں لا، ما، مے جو بالترتیب ولا، واء، وی کے ساتھ عمل کرتی ہیں  
ولا کے گرد ایک جنت با مے۔ ی، ما

وما کے گرد ایک جنت ی، لا۔ لا، مے

وی کے گرد ایک جنت لا، ما۔ ما، لا

اسی طرح سے ہم کسی اور نقطہ (لا، ما، مے) پر عمل کرنے والی قوت کو جس کے  
اجزائے ترکیبی لا، ما، مے میں خطوط ولا، واء، وی کے ساتھ عمل کرنے  
والی قوتوں اور انکے گرد جنتوں کے معادل ثابت کر سکتے ہیں۔  
اس لئے بالآخر قوتوں کا کل نظام معادل ہے ان کے

ولا کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت = لا + لا، + ..... = (لا،) لا

وما ..... = ..... = ما + ما، + ..... = (ما،) ما

وی ..... = ..... = مے + مے، + ..... = (مے،) مے

ولا کے گرد ایک جنت = (ما، مے۔ ی، ما) لا = ل

وما کے گرد ایک جنت = (ی، لا۔ لا، مے) ما = م

وی کے گرد ایک جنت = (لا، ما۔ ما، لا) مے = ن

اوپر کی تین قوتیں معادل ہیں ایک ایسی واحد قوت م کے جو میں سے عمل کرتی

ہے اور جس کی مقدار سنا = لا + ما + مے سے حاصل ہوتی ہے اور جس کے  
خط عمل کی سمتی جیوب التمام

لا، ما، مے میں [دفعہ ۲۶]

دفعہ ۲۶ کی رو سے تین ترکیبی جنت مبادل ہیں ایک واحد جنت (ش) کے  
جو ایسا ہے کہ  $ش = ل + م + ن$  اور جس کا محور وہ خط مستقیم ہے جس کی سمتی  
جیوب التمام  $\frac{ل}{ش}$ ،  $\frac{م}{ش}$ ،  $\frac{ن}{ش}$  ہیں۔

اس طرح قوتوں کا نظام معلومہ ایک اختیار ہی طور پر منتخب کئے ہوئے نقطہ و  
میں سے گزرنے والی ایک واحد قوت اور ایک ایسے جنت میں تحویل ہو گیا جس کا  
محور و میں سے گزرتا ہے۔

۱۶۳۔ ایک قوت اور ایک جنت کے اس اجتماع کو اصطلاح میں ترکیب (Dyname)  
کہتے ہیں اور مقداریں لا، ما، مے اور ل، م، ن اس کے اجزائے  
ترکیبی کہلاتی ہیں۔

محوروں کے ساتھ جو قوتیں عمل کرتی ہیں اور محوروں کے گرد جو جنت عمل  
کرتے ہیں ان کو اختصاراً نظام (لا، ما، مے، ل، م، ن) سے موسوم کیا  
جاسکتا ہے۔

۱۶۴۔ کسی خط کے گرد قوت کے معیار اثر کی عام ترین  
کسی خط کے گرد قوت ف کا معیار اثر اس طرح معلوم کیا جاتا ہے قوت  
ف کو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کرو جن میں سے ایک جزو قوت دئے ہوئے خط  
کے متوازی ہو اور دوسرا اس پر عمود وار ہو، تب اس حاصل ضرب کو جس  
کو اس کے خطِ عمل اور خط معلومہ کے درمیان چھوٹے سے چھوٹے فاصلہ کے ساتھ  
ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے معلومہ خط کے گرد قوت ف کا معیار اثر کہتے ہیں۔  
مثلاً دفعہ ۱۶۲ کی شکل میں محور لا کے گرد معلومہ قوت ف کا معیار اثر جزو ترکیبی

ما، مے + مے اور اس کے خطِ عمل اور لا کے درمیان جو چھوٹے سے چھوٹا  
فاصلہ ہے ان کے حاصل ضرب کے مساوی ہے اور اس لئے ل کے گرد

جزد ترکیبی  $1\text{ ما}^2 + 2\text{ مے}^2$  کے معیار اثر کے مساوی ہے جو دفعہ ۳۸ کی رو سے  
 $1\text{ ل}^2$  کے گرد دو اجزائے ترکیبی  $\text{ما}$  اور  $2\text{ مے}$  کے معیار اثروں کے مجموعہ کے  
 مساوی ہے اور یہ مجموعہ  $\text{ما} = 1$  -  $\text{مے}$   $\text{ما}$  کے مساوی ہے۔

۱۶۵۔ ایک استوار جسم کے تعادل کی عام شرائط۔

ایک قوت  $\text{سرا}$  اور جفت  $\text{ش}$  دونوں ملکر تعادل پیدا نہیں کر سکتے۔ کیونکہ  
 جفت  $\text{ش}$  کی بجائے ہم ایسی دو مساوی اور غیر مواز قوتیں لے سکتے ہیں  
 جن میں سے ایک قوت اس نقطہ  $\text{و}$  میں سے گزرے جہاں قوت  $\text{سرا}$  جفت کے  
 مستوی سے ملتی ہے۔ یہ قوت اور قوت  $\text{سرا}$  ملکر ایک واحد قوت میں ترکیب  
 پاسکتے ہیں جو  $\text{و}$  میں سے گزرتی ہے اور جفت کی دوسری قوت سے نہیں ملتی  
 اور اس لئے تعادل پیدا نہیں کر سکتی۔

اس لئے تعادل صرف اسی صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ قوت  $\text{سرا}$  اور جفت  
 دونوں جداگانہ معدوم ہوں۔

لیکن دفعہ ۱۶۲ کی رو سے  $\text{ش} = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{مے}^2$

اور  $\text{ش}^2 = \text{ل}^2 + \text{م}^2 + \text{ن}^2$

اس لئے تعادل کے لئے ضروری ہے کہ

$\text{لا} = 0$ ،  $\text{ما} = 0$  اور  $\text{مے} = 0$ ۔

$\text{ل} = 0$ ،  $\text{م} = 0$  اور  $\text{ن} = 0$ ۔

یعنی محدودوں کے کسی تین محوروں کے متوازی قوتوں کے کسی نظام کے

تحلیلی حصوں کے مجموعے جداگانہ معدوم ہوں اور نیز انہی تین محوروں کے گرد قوتوں  
 کے معیار اثروں کے مجموعے بھی جداگانہ صفر ہوں۔

## مثالیں

۱۔ ایک کعب کا مرکز ثابت ہے اور اس کا کنارہ ۲۵ ہے، اس کے دو متصل رخوں کے اُن بن زاویوں کے ساتھ جو ایک دوسرے سے نہیں ملتے دو مساوی قوتیں مساوی عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اس جفت کا معیار اثر جو کعب کو ساکن رکھ سکتا ہے قوتوں کی سمتوں کے لحاظ سے  $\frac{1}{2} \times 25$  یا  $\frac{1}{2} \times 25$  ہوگا۔

۲۔ چھ قوتیں جن میں سے ہر ایک  $\frac{1}{2} \times 25$  کے مساوی ہے ایک ہی ترتیب میں ایک کعب کے اُن کناروں کے ساتھ عمل کرتی ہیں جو ایک معلوم وتر سے نہیں ملتے۔ ثابت کرو کہ اُن کا حاصل ایک جفت ہے جس کا معیار اثر  $\frac{1}{2} \times 25$  ہے، جہاں ایک کعب کے کنارہ کا طول ہے۔

۳۔ ایک کعب کے مرکز کو کنارے  $\frac{1}{2} \times 25$ ،  $\frac{1}{2} \times 25$ ،  $\frac{1}{2} \times 25$  اور  $\frac{1}{2} \times 25$  کے ساتھ جگہ اس کے وتر ہیں۔  $\frac{1}{2} \times 25$ ،  $\frac{1}{2} \times 25$  اور  $\frac{1}{2} \times 25$  کے ساتھ قوتیں  $\frac{1}{2} \times 25$ ،  $\frac{1}{2} \times 25$ ،  $\frac{1}{2} \times 25$  عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ قوتیں و ہر ایک واحد قوت  $\frac{1}{2} \times 25$  کے معادل ہیں جس کے خط عمل کی سمتی جیوب التمام  $\frac{1}{2} \times 25$  کے متناسب ہیں مع ایک جفت کے جس کا معیار اثر  $\frac{1}{2} \times 25$  ہے اور جس کی سمتی جیوب التمام متناسب ہیں  $\frac{1}{2} \times 25$  کے۔

۴۔ ایک چار سطحی کے راسوں میں سے مقابل کے رخوں پر عمود وار اور ان کے متناسب قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ توازن میں ہونگی اگر یہ سب کی سب اندر کی طرف یا باہر کی طرف عمل کریں۔

۵۔ کسی مستقیم الاضلاع مجسمہ شکل کے ہر ایک رخ میں ایک ایسا جفت عمل کرتا ہے جس کا محور باہر کی طرف کھینچا گیا ہے اور جو اس رخ کے رقبہ کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ یہ باہم توازن میں ہیں۔

۶۔ ایک یک چادری زاہد نما کے ایک ہی نظام کے چار کونوں کے ساتھ چار قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ان کی مقداریں ایسی ہیں کہ اگر ان کو ان خطوط عمل کے متوازی



ایک نقطہ پر منتقل کر دیا جائے تو یہ متبادل ہوتی ہیں۔ ثابت کرو کہ کمونوں کے ساتھ عمل کرنے کی صورت میں بھی وہ باہم متبادل ہونگی۔

[ایک چادری زائد  $\frac{1}{14}$  +  $\frac{1}{14}$  -  $\frac{1}{14}$  =  $\frac{1}{14}$  کے کسی کمون کی مساوات ہے

$$\frac{14 - \text{اجم ط}}{14 - \text{جب ط}} = \frac{14 - \text{ب جب ط}}{14 - \text{ب جم ط}} = \frac{14 - \text{ج}}{14 - \text{ج}}$$

۱۶۶۔ مقید اجسام۔ مقید جسم سے ایسا جسم مراد ہے جس کے ایک یا دو نقطے

ثابت کر دئے گئے ہوں۔ مثلاً اگر ایک سلاخ دیوار کے ساتھ ایک گولہ خانہ قبضہ کے ذریعہ جوڑ دی جائے تو اس کا ایک نقطہ ثابت سمجھا جائے گا اور سلاخ مقید کہلائیگی۔

اگر ایک استوار جسم کے دو نقطے ۱ اور ۲ ثابت کر دئے گئے ہوں تو خط ۱ ب پر کے سب نقطے ثابت ہو گئے اور جسم کی حرکت کے لئے صرف محور ۱ ب کے گرد گھومنے کا طریقہ باقی رہ جائے گا۔ مثلاً ایک دروازہ جس کو چوکھٹ کے ساتھ دو قبضوں کے ذریعے حاصل کر دیا گیا ہو قبضوں میں سے گزرنے والے خط کے گرد گھوم سکتا ہے

اگر کوئی جسم ایسا ہو جس کے تین نقطے ثابت کر دئے گئے ہوں اور یہ تینوں نقطے ایک ہی خط میں واقع نہ ہوں تو صرف یہ جسم ناقابل حرکت ہوگا۔

۱۶۷۔ ایک استوار جسم کا ایک نقطہ ثابت ہے۔ اس کے تعادل کی شہادت معلوم کرو۔

ثابت نقطہ کو سہاء و مانوا اور اس میں سے گزرنے والے تین علی القوائم خطوط کو محور فرض کرو۔ نیز فرض کرو کہ جسم پر عمل کرنے والی بیرونی قوتیں حسب دفعہ ۱۶۲ مقید نقطہ پر عمل کرنے والی قوت کے علاوہ محوروں کے متوازی اجزائے ترکیبی لا، ما، مے میں اور ان محوروں کے گرد ترکیبی جنٹوں ل، م، ن میں تحلیل ہو جاتی ہیں۔

فرض کرو کہ جسم کو متبادل رکھنے کے لئے وہ جو قوت عمل کرتی ہے اس کے

اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما اور مے ہیں تب حسب دفعہ ۱۶۵  
تبادل کے لئے

$$(۱) \quad لا + لا = ۰, \quad ما + ما = ۰, \quad مے + مے = ۰$$

$$(۲) \quad ل = ۰, \quad م = ۰, \quad ن = ۰$$

مساواتوں (۱) سے دہرے تعامل کے اجزاء بیرونی قوتوں کے رقوم میں معلوم ہوتے ہیں۔

مساواتوں (۲) سے تبادل کی شرائط معلوم ہوتی ہیں یعنی یہ ثابت نقطہ و میں سے گزرنے والے تین علی القوائم خطوط کے گرد بیرونی قوتوں کے معیار اثر دں کے مجموعے جداگانہ صفر ہونے چاہئیں۔

اگر سب بیرونی قوتیں ایک ہی سطح مستوی میں عمل کریں جو و میں گزرتی ہو تو اوپر کی شرائط اس سادہ تر شرط میں تحویل ہو جاتی ہیں کہ و کے گرد معیار اثر دں کا مجموعہ صفر ہونا چاہیے۔

۱۶۸۔ ایک استوار جسم کے دو نقطے ل اور ب ثابت ہیں اور اس لئے جسم محور ل ب کے گرد گھوم سکتا ہے۔ تبادل کی شرائط معلوم کرو۔

خط ل ب کو ی کا محور بناؤ اور اس پر کے کسی نقطہ کو مبدأ فرض کرو۔

فرض کرو کہ  $و = ل$ ،  $م = ی$ ،  $ن = ب$ ،

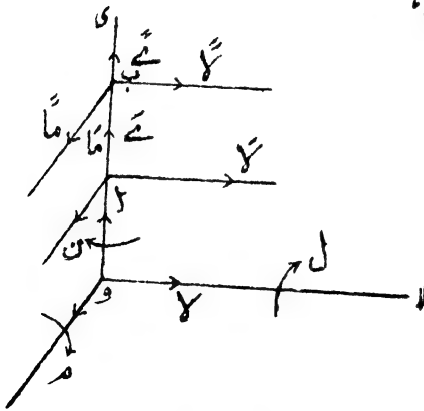
نیز فرض کرو کہ مقید کرنے والی قوتوں کے اجزائے ترکیبی ل اور ب پر

لا، ما، مے اور لا، ما اور

مے ہیں۔

نیز فرض کرو کہ مقید کرنے والی قوتوں کے علاوہ جسم پر عمل کرنے والی

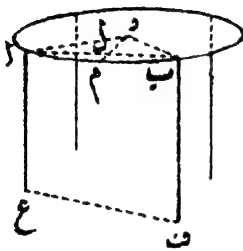
بیرونی قوتیں حسب دفعہ ۱۶۲ حسب ذیل قوتوں اور جفتوں میں تحویل ہو جاتے ہیں





کہ جسم ایک دروازہ ہے جو حسب معمول در سہاروں ل اور ب پر کھتا ہوا ہے اگر ل پر کی کھونٹی کو اپنے اصلی مقام سے ذرا اڑسچا کر دیا جائے تو دروازہ کا کل بوجھ اس کھونٹی پر آ پڑے گا۔ اگر برعکس اس کے اسے اپنے اصلی مقام سے ذرا نیچے کر دیا جائے تو دروازہ کا کل بوجھ ب پر آ پڑیگا۔ اس لئے جب جو کھٹ کی کھونٹیوں کا درمیانی فاصلہ دروازہ کے چہلوں کے درمیانی فاصلہ کے عین برابر ہو تو ہمیں لازماً یہی توقع کرنی چاہیئے کہ وزن کی تقسیم ناقابل یقین ہے۔

۷۔ ا۔ مشق ۱۔ ایک مستدیر یکساں میز کا وزن ۸۰ پونڈ ہے۔ یہ چار پایوں پر جو اس کے کنارہ کے گرد متساوی لگے ہوئے ہیں سہارا ہوا ہے



فرض کرو کہ میز کا مرکز و ہے اور ل ع اور ب ف اس کی دو ٹانگیں ہیں اگر وزن کنارہ کے اُس حصہ سے لکایا جائے جو ل اور ب کے درمیان ہے تو میز اگر گھوم سکتی ہے تو نقاط ع اور ف کو ملائے والے خط کے گرد گھومیگی نیز یہ گھومنے کے عین قریب اُس وقت ہوگی جب کہ خط ع ف کے گرد میز کے وزن کا معیار اثر لکائے ہوئے وزن کے معیار اثر کے ٹھیک مساوی ہو۔

اب لکائے ہوئے وزن کا معیار اثر صریحاً زیادہ سے زیادہ اُس وقت ہوگا جبکہ اسے قوس ا ب کے وسطی نقطہ م پر رکھا جائے۔

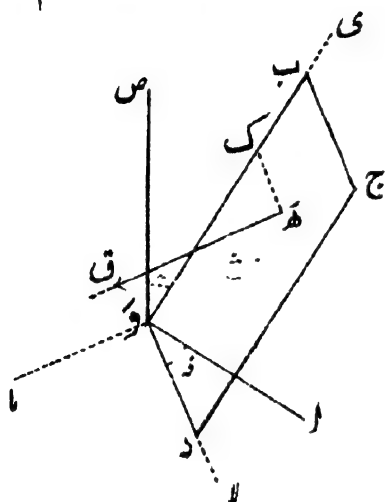
فرض کرو کہ د م، ل ب سے ل پر ملتا ہے اور مطلوبہ وزن لا ہے۔  
خ ف کے گرد معیار اثر لینے سے

$$لا \times ل م = ۸۰ \times ول$$

$$\therefore لا (۱ - \frac{۱}{۲۸}) \times ول = ۸۰ \times \frac{۱}{۲۸} \times ول \text{ یعنی لا} = ۱۹۳ \frac{۱}{۲۸} \text{ پونڈ وزن}$$

مشق ۲۔ ایک دروازہ جس کا وزن و ہے اس طرح ٹک رہا ہے کہ اس کے قبضوں کو ملائے والا خط سمت انصافی سے زاویہ ط بنتا ہے۔ قبضوں کا درمیانی فاصلہ

۲ھ ہے۔ دروازہ کو قبضوں میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی سے زاویہ فیرقا قائم رکھنے کے لئے ایسی قوت  $Q$  درکار ہوتی ہے جو دروازہ کے عمود دار ہے اور قوت کا خط عمل قبضوں کے خط اور دروازہ کے پچھلے کنارہ سے بالترتیب  $b$  اور  $c$  کے فاصلہ پر ہے۔ قوت  $Q$  کی مقدار اور قبضوں پر کے تعامل جہاں تک یہ معلوم ہو سکتے ہیں محسوب کرو۔



وزن و کوب اور واکے متوازی تھیل کرنے سے اجزائے تخلیلی۔ وجم ط  
اور وجم ط حاصل ہوتے ہیں۔ اس لئے وکے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی  
وجم ط جم ف ۱۔ وجم ط جم ف ۲۔ وجم ط ہیں اور نقطہ شف پر عمل کرتے ہیں  
جس کے محد (۱، ۲) ہیں جہاں ۲ دروازہ کی چوڑائی ہے اور تبیعے بلحاظ شف کے  
مشاکل ہیں۔

سہارنے والی قوت ق جو ہر عمل کرتی ہے اُس کے اجزائے ترکیبی محوروں کے متوازی ، ق ، ہیں اور یہ نقطہ (بم ، ۰) پر عمل کرتی ہے۔  
اس لئے دفعہ ۱۶۲ کی رو سے

$$\lambda = \sum (\lambda_i) = \text{وجب ط حجم ف}$$

ما =  $\sum$  (ما) = - وجب طجب ف + ق

$$ے = \text{ج} (ے) = - \text{و جم ط}$$

$$ل = \text{ج} (لے - ی ما) = \text{و ه جب ط جب ف} - \text{ج ق}$$

$$\text{مر} = \text{ج} (ی لا - لا ے) = \text{و ه جب ط جم ذ} + \text{ل و جم ف}$$

$$\text{ن} = \text{ج} (لا ما - لا لا) = - \text{و ل جب ط جب ذ} + \text{ب ق}$$

نیز دفعہ ۶۸ کی ترقیم کی رو سے ی = ۰ اور ی = ۲ ھ

اس لئے لا، ما، ئے قبضہ و پر ترکیبی تعادل ہیں اور لا، ما، ئے قبضہ

ب پر ترکیبی تعادل ہیں۔

$$\text{اس لئے دفعہ ۶۸ کی مساوات (۶) کی رو سے ق} = \text{و} \times \frac{۱}{۱۱} \text{ جب ط جب ذ}$$

مساواتوں (۱) اور (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا} = \frac{۲}{۱۱} \left[ \frac{۱}{۱۱} \text{ جم ط} - \text{جب ط جب ف} \right] \text{ اور لا} = - \frac{۲}{۱۱} \left[ \frac{۱}{۱۱} \text{ جم ط} + \text{جب ط جب ف} \right]$$

مساواتوں (۲) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ما} = \frac{۲}{۱۱} \left[ \frac{۱}{۱۱} \text{ ج ق} + \frac{۱}{۱۱} \text{ ب} \right] \text{ جب ط جب ذ} = \frac{۲}{۱۱} \left[ \frac{۱}{۱۱} \text{ ج ق} + \frac{۱}{۱۱} \text{ ب} \right] \text{ جب ط جب ذ}$$

نیز (۳) سے حاصل ہوتا ہے ئے + ئے = و جم ط

## مثالیں

۱۔ ایک مربع میز کے چار پائے ہیں جو بالترتیب اس کے اضلاع کے وسطی نقطوں پر لگے ہوئے ہیں۔ بناؤ کہ اس کے ایک کونے پر زیادہ سے زیادہ کس قدر وزن رکھا جاسکتا ہے تاکہ میز نہ اٹے۔

۲۔ ایک گول میز کی تین متساوی الفضل ٹانگیں ہیں جو اس کے کنارہ پر لگی ہیں۔ ایک آدمی

اس کی ایک ٹانگ کے مقابل اس کے کنارہ پر بیٹھتا ہے جس سے میز الٹ کر کنارہ اور دو ٹانگوں کے بل گرتا ہے پھر وہ اس کے بالاترین نقطہ پر بیٹھتا ہے اور میز عین اوپر اٹھ آتا ہے۔ ثابت کرو کہ میز کا نصف قطر ٹانگ کے طول کا  $\frac{1}{2}$  گنا ہے۔

۳۔ ایک دروازہ جس کا وزن  $W$  ہے ایک محور  $L$  ب کے گرد جو سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بنا رہا ہے گھوم سکتا ہے دروازہ کو اس محل میں رکھنا منظور ہے جو  $L$  ب میں گزرنے والی انتصابی سطح مستوی کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بنائے۔ ثابت کرو کہ اس کے لئے قوت  $W$  جب  $\theta$  جب  $\theta$  بہ درکار ہوگی یہاں  $L$  دروازہ کے مرکز ثقل کا قاصد ہے۔

۴۔ ایک مستطیل دروازہ جب معمول دو ایسے قبضوں پر سہارا ہوا ہے جن کو ملانے والا خط سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بناتا ہے ثابت کرو کہ محل توازن سے دروازہ کو زاویہ  $\theta$  میں سے گھمانے میں  $W$  جب  $\theta$  (۱- جرم) کام کرنا پڑتا ہے جہاں  $W$  دروازہ کا وزن ہے اور  $L$  اس کی چوڑائی ہے۔

۵۔ ایک مستطیل چار ٹانگوں پر متوازی الافاق محل میں سہارا ہوا ہے۔ ٹانگیں اس کے کونوں پر ہیں۔ اس کے ایک معلومہ نقطہ پر معلومہ وزن رکھ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک ٹانگ پر کا دباؤ ناقابل تعین ہے نیز وزن کو ایک خاص مقام پر رکھنے سے اس دباؤ کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں معلوم کرو۔

۶۔ ایک استوار مستطیل کے چار کونوں پر چار ٹانگیں ہیں یہ تھوڑا سا دب سکتی ہیں۔ اور ہر ٹانگ کا پچکاوٹ اس پر رکھے دباؤ کے تناسب ہے۔ اگر میز کا مرکز ثقل اس متوازی الاضلاع کے اندر واقع ہو جو ان کے وسطی نقطوں کو ملانے سے بنتا ہے تو ہر ٹانگ پر کا دباؤ معلوم کرو۔ اگر مرکز ثقل اس متوازی الاضلاع کے اندر واقع نہ ہو تو ثابت کرو کہ سیر دراصل صرف تین ٹانگوں پر کھڑا ہے۔

[چونکہ میز کا قطر سیدھا رہتا ہے اس لئے مقابل کی ٹانگوں کے ہر ایک زوج کا اوسط دباؤ اس گہرائی کے مساوی ہے جس میں سے میز کا مرکز حرکت کرتا ہے اس لئے مقابل کے کونوں کے ہر زوج پر کے دباؤ مساوی ہیں]

۱۷۔ اگر کوئی جسم تین قوتوں کے زیر عمل متعادل ہو تو وہ قوتیں ایک ہی

مستوی سطح میں ہونگی۔

نقص کرو کہ تین قوتیں ف، ق، سہا ہیں اور ف اور ق کے خطوط اعلیٰ پر کوئی دو نقطے ف، ق ہیں۔

چونکہ قوتیں متبادل ہیں اس لئے مجموعی طور پر ان کا کوئی اثر جسم کو خطف ق کے گرد گھمانے کا نہیں ہے لیکن قوتیں ف اور ق اس خط سے ملتی ہیں اس لئے منفرد ان میں سے کسی کا کوئی اثر جسم کو خطف ق کے گرد گھمانے کا نہیں ہے اس لئے قوت سر کا بھی کوئی اثر جسم کو خطف ف کے گرد گھمانے کا نہیں ہے۔ اس لئے خطف ق لازماً قوت سر سے ملے گا۔

اسی طرح اگر قام، قام ... کوئی

اور لفظی کے خط عمل پر لئے جائیں تو خطوط

فہم قی، فہم قی، .... مرا سے ملینگے

لاس فٹے قوت سے اس سطح مستوی میں واقع ہوگی جو ف اور ق کے خطِ عمل میں سے گزرتی ہے یعنی ق اور سہ کے خطوطِ عمل اس سطح مستوی میں واقع ہونگے جو ف اور سہ سے گزرتی ہے۔

لیکن ف، ق و ف کے خط عمل پر کا کوئی نقطہ ہے اس لئے مذکورہ بالا سطح مستوی ف کے خط عمل پر کے ہر ایک نقطہ میں سے گزرتی ہے یعنی ف کے خط عمل میں سے گزرتی ہے۔

نتیجہ صریح۔ دفعہ ۵۴ کے نتیجے سے ظاہر ہے کہ تین قوتیں یا ایک نقطہ میں سے گزرنے والی

۱۷۲۔ اگر کوئی جسم چار قوتوں کے زیرِ عمل متبادل ہو تو ثابت کر دو کہ اُن کے خطِ عمل ایک ہی زاویہ بنا کے اکٹون ہیں۔

فرض کرو کہ ان چار قوتوں کے خط عمل ف، ق، س، ہ ہیں، ف کے خط عمل پر کے کسی نقطہ سے ایک خط لکھیں جو ف اور س دونوں سے ملے۔ چونکہ



چاروں قوتیں متعادل ہیں اس لئے  $ل$  کے گرد ان کے معیار اثروں کا مجموعہ معدوم ہونا چاہیئے۔ اس لئے  $س$  لازماً  $ل$  سے ملیگی۔  $ف$  پر کے کسی اور دو نقطوں سے شروع کرنے سے ہمیں دو اور خطوط  $م$  اور  $ن$  حاصل ہو سکتے ہیں جو  $ف$ ،  $ق$ ،  $س$  سے ملتے ہیں۔

اب تین غیر متقاطع خط  $ل$ ،  $م$ ،  $ن$  ایک ایک چادری زائد نما کی تعین کرتے ہیں اور اس کے ایک ہی نظام کے کون ہیں۔ خطوط  $ف$ ،  $ق$ ،  $س$ ،  $س$ ،  $ج$ ،  $ل$ ،  $م$  ان سے ملتے ہیں وہ اس زائد کے کون ہیں جو دوسرے نظام کے رکن ہیں۔ یہ بات قابل غور ہے کہ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ان چار قوتوں میں سے کوئی سی دو قوتیں بھی ایسی نہیں جو باہم متوازی ہوں یا ایک نقطہ پر ملیں کیونکہ اگر ایسا ہوتا تو ان کی ترکیب سے ہیں ایک واحد قوت حاصل ہوتی اور ہمارے پاس صرف تین ہی قوتیں رہ جاتیں اور اس صورت پر دفعہ ما قبل میں بحث ہو چکی ہے۔

۳۷- اگر ایک جسم پر عمل کرنے والی پانچ قوتیں متعادل ہیں ہوں تو ان کو دو خطوط مستقیم سے کاٹ سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ان قوتوں کے خط عمل  $ف$ ،  $ق$ ،  $س$ ،  $س$  اور  $ط$  ہیں۔  $ف$ ،  $ق$ ،  $س$  میں سے ایک ایک چادری زائد نما کھینچو اور فرض کرو کہ  $س$  اسے نقاط  $ل$  اور  $ب$  پر ملتا ہے۔

$ل$  میں سے زائد نما کا ایک کون گزرتا ہے جو  $ف$ ،  $ق$ ،  $س$  کے نظام کے مخالفت نظام کا رکن ہے اور بناؤ علیہ  $ف$ ،  $ق$ ،  $س$  سے ملتا ہے۔ چونکہ یہ کون  $ف$ ،  $ق$ ،  $س$ ،  $س$  سے ملتا ہے اس لئے ان کے معیار اثروں کا مجموعہ اس کے گرو صفر ہے۔

لیکن تمام نظام کے لئے اس کے گرد معیار اثر لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کے گرد  $ف$ ،  $ق$ ،  $س$ ،  $س$ ،  $ط$  کے معیار اثروں کا مجموعہ صفر ہے اس لئے  $ط$  کا معیار اثر اس کے گرد صفر ہے یعنی یہ  $ط$  سے بھی ملتا ہے۔

اسی طرح  $ب$  میں سے بھی ایک کون گزرتا ہے جو پانچوں قوتوں سے ملتا ہے۔ یہ بات قابل غور ہے کہ یہ خطوط مستقیم حقیقی، منطقی یا خیالی ہونگے اگر وہ



مرس × ول = وجب عم × وٹ جب هول ..... (۱)  
نیز اُس خط کے گرد جو ولی پر عمود وار ہے اور ستوی سطح هول میں واقع ہے  
معیار اخذ لینے سے

مرس × ول = وجب عم × وٹ ..... (۲)

جب هول = مرم عم =  $\frac{\text{مرک}}{\text{ه}}$

نیز هل = وه مس هول = مرک  $\frac{\text{ه} - \text{ک}}{\text{مرک} - \text{ه}}$

اور اُس دیوار کا طول جس پر سلاح بحالت لتادل ساکن رہ سکتی ہے هل کا دو چند ہے۔  
**تیسرا ثبوت** - یہ سوال دفعہ ۱۷۱ کے استمال سے بھی آسانی حل ہو سکتا ہے۔  
سلاح تین قوتوں کے زیر عمل متادل ہے۔ اس لئے یہ تین قوتیں یعنی سلاح کا وزن،  
نقطہ و پر کا تفاعل اور ل پر حاصل تفاعل متراکز ہونی چاہئیں۔ اس لئے ل پر کا تفاعل  
انقضائی سطح ستوی ولن میں واقع ہونا چاہئے۔

اب ل پر کے عمادی تفاعل کی سمت ل ف عمود ہے ول اور هل  
دونوں پر یعنی یہ ستوی وه ل پر عمود ہے لہذا یہ ستوی وه ک میں وه پر  
عمود ہے۔ پس اس کے سستی جیو پ التمام یہ ہیں

(۳) (جب عم، جم عم) ..... (۳)

جہاں وک، وم اور ک ه کا متوازی خط محدودناپنے کے محور ہیں۔  
ل پر رگڑ کی سمت ل ف ستوی سطح ول ه میں ول پر عمود وار ہے۔

پس حاصل تفاعل جو ہم دیکھ چکے ہیں کہ ستوی ولن میں لازماً واقع ہے بالضرور  
علی القوائم ہوگا ل ف پر جو ستوی ولن کا عماد ہے اور جس کے سمتی جیو پ التمام ہیں

(جب ف، جم ف) ..... (۴)

جہاں ف زاویہ ک ول ہے



$$= ۲ \pi \text{ لا} \times \frac{\text{مف لا}}{\text{جب ع}} \times \text{م م س لا} = \text{لا} \times \frac{۲ \text{ م م و}}{(\text{لا} - \text{ب}) \text{ جب ع}}$$

اس لئے مطلوبہ جفت کا معیار اثر

$$= \frac{۲ \text{ م م و}}{(\text{لا} - \text{ب}) \text{ جب ع}} \times \text{لا فر لا} = \frac{۲ \text{ م م و}}{۳ \text{ جب ع}} \times \frac{\text{لا} - \text{ب}}{\text{لا} - \text{ب}} \times \frac{۲ \text{ م م و}}{۳} \times \frac{\text{لا} + \text{ب}}{\text{ب}} \times \text{م م ع}$$

## مثالیں

۱۔ دو چکنی مستوی سطحیں جن میں سے ہر ایک سمت انصافی کے ساتھ زاویہ بناتی ہے ایک افقی خط پر قطع کرتی ہیں۔ ایک یکساں سلاح جس کا وزن و اور طول ۲ ہے متوازی الافق محصل میں ان سطوح مستوی کے اندر اس طرح رکھی جوتی ہے کہ یہ خط تقاطع کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کو قائم رکھنے کے لئے جو افقی جفت درکار ہوگا وہ و اجم ط م م ع ہے۔

۲۔ ایک یکساں سیدھی سلاح کا طول ۲ ج ہے، اس کو متوازی الافق محل میں ایک کھر درے کر کے اندر جس کا نصف قطر ۱ ہے اتنی بلندی پر رکھا گیا ہے جتنا کہ ممکن ہے۔ ثابت کرو کہ وہ خط جو سلاح کے وسطی نقطہ کو کرہ کے مرکز سے ملتا ہے

$$\text{خفا انصافی کے ساتھ زاویہ پیرا} = \frac{\text{م م و}}{\text{لا} - \text{ب}} \text{ ج ۲}$$

۳۔ ایک یکساں سلاح جس کا وزن و ہے اپنے ایک سرے پر ایک قبضہ کے گرد آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ اس کا دوسرا سر ایک کھر درے میں انصافی دیوار پر ساکن ہے اور سلاح محل تعادل میں سمت انصافی کے ساتھ زاویہ ع بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ سلاح ایک دائرہ

کی قوس پر جس کے مقابل مرکز پر زاویہ ۲ مسل [م م س ع] بناتا ہے کسی مقام پر ساکن رہ سکتی ہے۔ نیز بتاؤ کہ ہر دو انتہائی محلوں میں دیوار پر کا دباؤ ۱/۲ و [م م ع + م م و] ۱/۲ ہوگا جہاں م م و رگڑ کی قدر ہے۔

۴۔ ایک پتلی یکساں سلاخ اُب جس کا طول ۱۲ ہے اُل محل میں اس طرح ساکن رہے کہ اس کا ایک سر اُل ایک افقی کھر درے میز پر اور دوسرا ب ایک کھر درے انتصابی دیوار پر ساکن رہے۔ میز اور دیوار کی رگڑ کی قدیں بالترتیب مم اور مم ہیں اور سلاخ کا پایہ دیوار سے ک فاصلہ پر ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ پچھلے سرے پر پھسلنے کے عین قریب ہوگی اگر وہ انتصابی سطح مستوی جس پر یہ واقع ہے دیوار کے ساتھ زاویہ ط بنائے جہاں ط ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$ک مم (مم جب ط - جم ط) = ک - ۲ مم (مم مم) \times جب ط - ک$$

اور اس وقت اوپر کے سرے پر جو ماسی تعامل ہے اس کا میلان افق کے ساتھ قطا (مم مم ط) ہوگا۔

[۱۶ پرکا حاصل تعامل جو انتصابی خط کے ساتھ زاویہ لہ بناتا ہے اور ب پرکا حاصل تعامل جو انتصابی خط کے ساتھ زاویہ فہ بناتا ہے دونوں کو ایک ایسے نقطہ د پر ملنا چاہیئے جو مرکز نقل ثقل کے انتصاباً اوپر ہے۔ اس لئے اگر ب ل میز پر عمود ہو اور ل اب = عمود فہ ۵ کی رو سے

$$۲ مم عم = مم لہ - مم فہ = مم$$

چونکہ سب قوتیں مستوی اب دل میں عمل کرتی ہیں اس لئے سرال سمت ل لیں پھسلنے کے عین قریب ہوگا۔

نقطہ ب پر دیوار کا جو عماد ہے اس پر ب د کا نقل لینے سے

$$جب فہ جب ط = جم لم = \frac{۱}{۱۱ + مم}$$

میزک = ۲ و جب ط جم عم، اس سے پہلا جواب حاصل ہوتا ہے

نیز اگر ب پرکا تعامل مسا ہو اور دہاں رگڑ کی قوت نہ ہو سمت افقی کے ساتھ زاویہ سا بنائے تو چونکہ ہم دیکھ چکے ہیں کہ حاصل مستوی سطح اب لی میں واقع ہوگا، اس لئے اس مستوی پر عمود وار سمت میں تحلیل کرے۔ یہ مم مم مم جم سا جب ط = جم ط [

۵۔ ایک نصف کرہ جس کی سطح کھردری ہے اور جس کا مرکز و ہے اس طرح ثابت ہے کہ اس کا قاعدہ افقی سطح مستوی میں ہے۔ ایک سیدھی یکساں سلاخ کا ایک سر ا قاعدہ کی سطح مستوی کے ایک نقطہ سے آزادانہ وصل کر دیا گیا ہے اور دوسرا سر نصف کرہ کی سطح کے ایک نقطہ پر اس طرح ساکن ہے کہ سلاخ پھسلنے کے عین قریب ہے۔ ثابت کرو کہ سلاخ اور و میں سے گزرنے والی سطح مستوی و میں سے گزرنے والی انتہائی سطح مستوی سے زاویہ مساوی (مجموعہ قمر) بناتی ہے جہاں مرکز کی قدر ہے، عد زاویہ و میں ہے اور ب زاویہ و میں ہے۔

۶۔ ایک وزنی مستدیر اسطوانہ اپنے مستوی سرے کے بل ایک کھردرے افقی میز پر بڑا ہے اگر اس کا وزن و ہو اور عمادی دباؤ کو قاعدہ پر مساوی طور پر تقسیم شدہ فرض کیا جائے تو ثابت کرو کہ اس جنت کا معیار اثر جو اس کو محور کے گرد عین مرکز کے گھومنے کا ہے وہاں مرکز کی قدر ہے اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ہے۔

۷۔ ایک قائم مستدیر مخروط کا وزن و اور راسی زاویہ ۲۰۰ ہے اس کو ایک افقی میز کے مستدیر سوراخ کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے۔ اگر گڑ کی قدر و ہو اور سوراخ کا نصف قطر ۱۰ ہو تو ثابت کرو کہ کم سے کم جنت کا معیار اثر جو مخروط کو ہلا سکتا ہے وہ و ب قمر ہے۔

۸۔ مخروط مضلع کی شکل کا ایک چکنا ڈاٹ ایک مساوی الاضلاع مثلث کی شکل کے سوراخ کے اندر متساوی پھنسا یا گیا ہے۔ سوراخ کا ضلع ۱ ہے اور سبکی سطح متوازی الافق ہے ثابت کرو کہ ڈاٹ کو اس سوراخ کے اندر اس طرح رکھنے کے لئے کہ اس کا محور انتہائی رہے اور سوراخ کی سطح مستوی اس میں سے مساوی ضلع ۱ والا مثلث منقطع کرے ایک

جنت درکار ہوگا جس کا معیار اثر وہ  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$  ہوگا جہاں و ڈاٹ کا وزن ہے اور ہ اس محل میں اس کے راس کی گہرائی ہے۔

(فرض کرو کہ ڈاٹ سوراخ کے اضلاع دبج، ج د، د ب سے لفظاً دب، ج پر مس کرتا ہے۔ تب آسانی سے

$$\frac{(\frac{21}{2} - \frac{2}{3} \text{ج} ۲) ۳}{\text{ج} ۲} + ۱ = \text{ج} ۲ \left[ \frac{\frac{21}{2} - \frac{2}{3} \text{ج} ۲}{۳} + ۱ \right] \frac{1}{۲} = \text{ج} ۲$$

اس لئے اگر مساوی الا متلاء مثلث آسباج کا مرکز و ہوتو

جب ۱ = جب ۱ = جب [رج ب + ۱۰] =  $\frac{۱}{۲}$

نیز چونکہ تشاکیل سے مخروط مفلح کا راس ی، و سے انتصاباً نیچے ہے اس لئے

سمت انتصابی کے ساتھ اس کا میلان ع مساوات میں ع =  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  =  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  سے حاصل ہوتا ہے

نیز اگر ج ۱، افقی سطح مستوی میں ج ۱ پر کے عمود اور انتصابی خط کو حوالہ کے محور تسلیم کے جائیں تو ج ۱ کی سمتی جیب التمام ہیں (۱، ۰، ۰) اور کنارہ کے سمتی جیب التمام ہیں (۰، ۰، ۱)۔ جب عمود ج ۱، ج ۲، ج ۳ (یعنی یہ متناسب ہیں) (۱، ۰، ۰) (۰، ۱، ۰) (۰، ۰، ۱) کے

نمیز اگر حج پر کے حاصل تعامل سر کی سمت خطا منقبا بی کے ساتھ زاویہ سہ بنا کے تو

چونکہ سچ (پر عہد ہے) اس لئے اس کی سمتی جویب التمام ہونگی (، جب سہ، جسم سہ) ،

نیز چونکہ یہ کنارہ پر بھی عمود ہے

۲: جب سہ (-۱) + حجم سہ (۲۷) = - یعنی سہ سہ =  $\frac{۲۷}{۳}$

حاصل تعامل کا افقی جزو ترکیبی ہے

= سراجب سے =  $\frac{2}{3}$  مس سے =  $\frac{3252}{13}$  و (کیونکہ تین مساوی تقاضوں کے انتصابی

جزد ترکیبی و کو مستوازن کرتے ہیں)

نیز مساکیت پر غور ہے، اس لئے مطلوبہ جنت کا معیار اثر

۱، ب، ج پر تین اجزائے ترکیبی سے ملے معیار اثر و کے گرد

$$= 3, 3, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \text{ جملة } = \text{ جواب مطلوب}$$



۹- ایک یکساں مثلثی میز  $\Delta$  ب ج کی  $\Delta$  ب ج پر تین مساوی ٹانگیں ہیں جو ایک کھدوری افقی سطح مستوی پر ساکن ہیں۔ چھوٹے سے چھوٹا جفت معلوم کرو جو میز کو ہلا سکے گا۔ (فرض کرو کہ میز ایک انتصابی محور کے گرد جوافقی سطح مستوی سے دپہلتا ہے گھومنے کے مین قریب ہے۔ تب  $\Delta$  ب ج پر کی رگڑیں  $\Delta$  و ب،  $\Delta$  ج پر عمود وار ہیں اور ایک ہی رخ میں ہیں اور چونکہ ہر ایک ٹانگ پر کا و باء صریحاً  $\frac{1}{3}$  ہے اس لئے ان رگڑوں میں سے ہر ایک  $\frac{1}{3}$  مہ و کے مساوی ہے جہاں میز کا وزن  $W$  ہے۔

اگر یہ رگڑیں ایک مثلث  $\Delta$  ب ج بنائیں تو چونکہ یہ صرف ایک جفت کے ہی مساوی ہیں اس لئے حاصل قوت کو صفر ہونا چاہیئے اور ہر ایک رگڑ باقی دو رگڑوں کی سمتوں کے درمیانی زاویہ کی جیب کے مساوی ہونی چاہیئے۔ اس لئے زاوئے  $\Delta$ ،  $\Delta$  ب ج مساوی ہونے چاہئیں یعنی زاوئے  $\Delta$  و ب،  $\Delta$  ب ج،  $\Delta$  ج و  $\Delta$  مساوی ہونے چاہئیں۔ اس لئے نقطہ  $\Delta$  لازماً مثلث کے اندر ایسی جگہ پر ہوگا کہ

$$\Delta \text{ ب ج} = \Delta \text{ ج و} = \Delta \text{ و ب} = 120^\circ$$

پس ہمیشہ موجود ہوگا بشرطیکہ مثلث کا کوئی زاویہ  $120^\circ$  سے بڑا نہ ہو اور ب ج، ج و ب پر  $120^\circ$  کی قوسوں کا نقطہ تقاطع ہوگا۔

تب میز کو حرکت دینے کے لئے جو جفت درکار ہوگا اس کا معیار اثر

$$= \frac{W}{3} [\Delta \text{ و ب} + \Delta \text{ ب ج} + \Delta \text{ ج و}]$$

مکن ہے کہ میز  $\Delta$  کے گرد گھومنا شروع کرے۔ اگر ایسا ہو تو ب ج اور ج پر کی رگڑوں میں

سے ہر ایک  $\frac{W}{3}$  ہے جو  $\Delta$  ب ج پر عمود وار ہیں اس لئے ان کا حاصل  $\frac{W}{3}$  مہ و

و جم  $\frac{1}{3}$  ہے اس مائل اور  $\Delta$  پر کی رگڑ کا حاصل صفر نہیں ہو سکتا اگر  $\frac{W}{3}$  مہ و جم  $\frac{1}{3}$  مہ و

یعنی  $\Delta > 120^\circ$ ۔ پس میز  $\Delta$  کے گرد اسی صورت میں گھوم سکتا ہے جبکہ  $\Delta \leq 120^\circ$  اور

اس صورت میں مطلوبہ جنت =  $\frac{1}{2}$  سو [اب + ج]

۱۷۵۔ سوپرہوم کا کام کا اصول۔ فرض کرو کہ قوتوں ق، ق، ق، ق، ... کا کوئی نظام ایک جسم کے معلومہ نقاط پر عمل کرتا ہے۔ جسم کو تھوڑا سا ہٹاؤ جو اس کی ہڈی مشرانک کے مطابق ہو، اب اگر قوت ق کے نقطہ عمل کا ہٹاؤ اس کے خط عمل کی سمت میں مع ق، ہو اور اسی طرح باقی قوتوں کے نقاط عمل کے ہٹاؤ بالترتیب ان کی سمتوں میں مع ق،، مع ق،، ... ہوں تو اگر قوتیں متعادل ہوں تو

$$ق_1 مع ق_1 + ق_2 مع ق_2 + \dots = \dots \dots (1)$$

جہاں دوسرے رتبہ کی مجموعی مقداروں کو نظر انداز کر دیا گیا ہے  
برعکس اس کے اگر

$$ق_1 مع ق_1 + ق_2 مع ق_2 + ق_3 مع ق_3 + \dots = \dots$$

تو قوتیں متعادل میں ہونگی۔

ہم دفعہ ۹۶ میں بنا چکے ہیں کہ کسی ہٹاؤ میں ایک قوت کا کام اس کے اجزاء ترکیبی کے کام کے مساوی ہوتا ہے۔

اس لئے اگر لا، ما، مے محوروں کے متوازی ق کے اجزاء

ترکیبی ہوں اور مع ق کے اجزاء ترکیبی انہی محوروں کے متوازی مع لا، مع ما، مع مے ہوں تو

$$ق_1 \times مع ق_1 = لا_1 مع لا_1 + ما_1 مع ما_1 + مے_1 مع مے_1$$

اسی طرح سے باقی قوتوں کے لئے

پس ربط (۱) معادل ہے

(لا مفع لا + ما مفع ما + مفع ی) + (لا مفع لا + ما مفع ما + مفع ی) + ... = ۰

یعنی لا مفع لا + لا مفع ما + مفع ی = ۰

ہم یہ تسلیم کرینگے کہ کسی استوار جسم کو ایک محل سے دوسرے محل میں لے جانے کے لئے دو قسم کی حرکتوں کی ضرورت ہوتی ہے ایک ایسی حرکت جس سے جسم کا کوئی نقطہ کسی دوسرے مقام پر لے جایا جائے اور دوسری دھنی حرکت جو وہیں سے گزرنے والے کسی محور کے گرد لی جائے۔

اس گردش کو حوالے کے محوروں کے گرد تین ترکیبی گردشوں میں تحلیل کیا جاسکتا ہے۔ ہم فرض کریں گے کہ اگر یہ ترکیبی گردشیں چھوٹی ہیں تو انہیں کسی ترتیب میں لیا جاسکتا ہے۔

[ان مفروضوں کے ثبوت کے لئے طالب علم کو چاہیے کہ مصنف کی کتاب

Dynamics of a particle and of Rigid Bodies

کے صفحات ۲۱۵ تا ۲۱۸ کا مطالعہ کرے]

اب اس امر پر غور کرو کہ جسم کو محوروں کے گرد بالترتیب چھوٹے زاویوں

طہ، طہ، طہ میں سے گھمانے سے

اس کے کسی نقطہ کے محدودوں پر کیا

اثر پڑتا ہے

اسے ایک محور ولا پر عمود اور

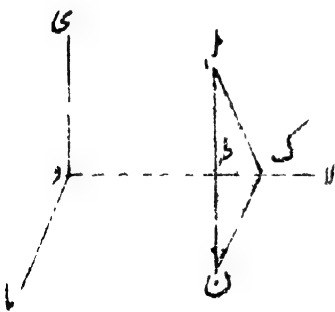
ان مستوی لا ولا پر عمود نکالو۔ فرض

کر دو زاویہ ک ن = طہ

ا کا محدود = ک ن = ک ل × جم طہ

ولا کے گرد گردش دینے سے یہ ک ل × جم (طہ + طہ) ہو جائے گا

پس محدود کی تبدیلی



= ک ل، [جم (ط + ط) - جم ط] = ک ل، (- ط جب ط)  
اگر ط اٹھا چھوٹا زاویہ ہو کہ اس کے مربعوں کو نظر انداز کیا جاسکے تو  
= - ط × ی

اسی طرح ی محد کی تبدیلی = ک ل، [جب (ط + ط) - جب ط]

= ک ل، [جم ط × ط،] = ط × ی  
اسی طرح سے دکھایا جاسکتا ہے کہ و ما کے گرد زاویہ ط میں سے گھمانے سے  
ی محد میں تبدیلی - ط ل، اور لا محد میں تبدیلی ط ی واقع ہوگی۔

نیز وی کے گرد زاویہ ط میں سے گھمانے سے لا محد میں تبدیلی - ط ی، اور ما محد میں تبدیلی  
ط ل، واقع ہوگی۔ پس چھوٹی مقداروں کے مربعوں کو نظر انداز کرنے سے ہم  
دیکھتے ہیں کہ محوروں کے گرد تین گردشوں سے ل، کے محدودوں میں جو تبدیلیاں  
واقع ہونگی وہ حسب ذیل ہیں

و لا کے متوازی ( ی، ط - ما، ط)

و ما کے متوازی ( لا، ط - ی، ط)

اور دی کے متوازی ( ما، ط - لا، ط)

اگر ان گردشوں کے علاوہ جسم کو محوروں کے متوازی چھوٹے حنطی فاصلوں  
و، ب، ج میں سے حرکت دی جائے تو ظاہر ہے کہ پہلے درجے کی چھوٹی  
مقداروں تک

مف ل، = و + ط ی، - ط ما،

مف ما، = ب + ط ل، - ط ی،

$$\text{مف ی} = \text{ج} + \text{ط م} - \text{ط م لا}$$

پس اس خفیض ہٹاؤ میں نقطہ لاپر عمل کرنے والی قوت کا مہوم کام

$$\text{ق} \times \text{مف ق} = \text{لا} \times \text{مف لا} + \text{ما} \times \text{مف ما} + \text{مے} \times \text{مف مے}$$

$$= \text{لا} + \text{ب} \times \text{ما} + \text{ج} \times \text{مے} + \text{ط} \times (\text{ما} - \text{مے}) + \text{ط} \times (\text{لا} - \text{مے}) \\ + \text{ط م} \times (\text{ما} - \text{لا})$$

اب چونکہ لا، ب، ج، ط، ط م، تمام ذروں کے ہٹاؤں کے لئے وہی ہیں اس لئے کل قوتوں کا مجموعی مہوم کام

$$= \text{لا} + \text{ب} \times \text{ما} + \text{ج} \times \text{مے} + \text{ط م} \times (\text{ما} - \text{مے})$$

$$+ \text{ط م} \times (\text{لا} - \text{مے}) + \text{ط م} \times (\text{ما} - \text{لا})$$

$$= \text{لا} + \text{ب} \times \text{ما} + \text{ج} \times \text{مے} + \text{ط م ل} + \text{ط م م} + \text{ط م ن} \dots (۲)$$

دفعہ ۱۶۵ کی رو سے ظاہر ہے کہ اگر قوتوں کا یہ نظام تعادل میں ہو تو اس جملگی ہر رقم صفر ہوتی ہے، اس لئے

$$\text{ق} \times \text{مف ق} + \text{ق} \times \text{مف ق} + \text{ق} \times \text{مف ق} + \dots = 0$$

$$= \text{کل نظام کا مہوم کام} = 0$$

۱۶۶۔ برعکس اس کے اگر کل ہٹاؤں کے لئے نظام کا مہوم کام صفر ہو تو قوتیں متعادل ہونگی۔ محور لا کے متوازی ایسا سادہ ہٹاؤ منتخب کریں کہ

$$1. \text{ا} \times \text{ب} = \text{ج} = \text{ط م} = \text{ط م} = 0 \quad \text{اب دفعہ ماقبل کے}$$

$$\text{نتیجہ (۲) سے حاصل ہوتا ہے} \quad \text{لا} = 0, \text{ اسی طرح} \quad \text{ما} = 0$$

اور  $\chi = 0$ ۔  
اب ایک ایسا ہٹاؤ منتخب کرو جو صرف محور لا کے گرد گردش پر مشتمل ہو

یعنی  $1 = b = c = p = m = 0$  اور  $p = 0$  صفر نہ ہو

تب (۲) سے  $\chi = (m - m) = 0$ ۔  
یعنی کل قوتوں کا معیار اثر محور لا کے گرد صفر ہوگا یعنی  $L = 0$ ۔

اسی طرح  $m = 0$  اور  $n = 0$ ، پس اگر موہوم کام کی مساوات پوری ہوتی ہو

تو دفعہ ۱۶۵ کی تعادل کی تمام شرائط پوری ہوتی ہیں اور قوتیں تعادل میں ہونگی۔  
 $m = 1$  - مشق - ایک منتظم چار سطحی چھ ہلکی سلاخوں سے بنا ہوا ہے جن میں سے ہر ایک کا طول ۱ ہے۔ یہ ایک چکنی افقی سطح مستوی پر ساکن ہے۔ ایک حلقہ جس کا وزن ۱ و اور نصف قطر  $b$  ہے مائل سلاخوں پر سہارا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ افقی کناروں میں

سے کسی ایک پر کا دباؤ  $\frac{2}{3} \left[ \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \right]$  ہے۔

نظام کو ایک ایسا ہٹاؤ دو کہ تین مائل سلاخوں کا طول نہ بدے اور اس انتصاباً نیچے اترے۔ جب مائل کنارے سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بنائیں تو فرض کرو کہ ان اضلاع کا طول جو افقی مستوی سے مس کرتے ہیں لا ہے، تب

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 1 \text{ جب } \theta = 0 \text{ اور اس لئے } 1 = 1 \text{ جب } \theta = 0$$

اگر حلقہ کی بلندی سطح مستوی کے اوپر  $h$  ہو تو

$$m = 1 \text{ جب } \theta = 0 \text{ جب } \theta = 0$$

اگر مطلوبہ دباؤ  $t$  ہو جسے تناؤ کی صورت میں مثبت شمار کیا جائے تو موہوم کام کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$t = m - m = 0$$

$$\therefore \frac{\text{ست}}{\text{د}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} = \frac{\text{وجب ط} - \text{جب ط}}{\text{وجب ط} - \text{جم ط}}$$

اب تعادل کے محل میں لا = د اور اس لئے جب ط =  $\frac{1}{37}$

$$\therefore \frac{\text{ت}}{\text{د}} = \frac{\text{ست} - \frac{1}{37}}{\text{ست} - \frac{1}{37}} = \frac{1}{\left[ \frac{1}{37} \times \text{ست} - \frac{1}{37} \right]}$$

## مثالیں

۱۔ ایک منظم آٹھ سطحی شکل بارہ مسادی سلاخوں کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے بنائی گئی ہے۔ ہر ایک سلاح کا وزن وہ ہے۔ اس کو ایک راس سے لٹکا دیا گیا ہے / ثابت کرو کہ ہر ایک افقی سلاح پر دباؤ  $\frac{3}{4}$  د ہے۔

۲۔ ایک تپائی تین مسادی یکساں سلاخوں کے ایک ایک سرے کو ایک جگہ آزادانہ جوڑنے سے بنائی گئی ہے ہر ایک سلاح کا وزن وہ ہے سلاخوں کے وسطی نقطوں کو رسیوں کے ذریعہ جن میں سے ہر ایک کا طول ب ہے لایا گیا ہے تب تپائی کو ایک چکینے افقی میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ ہر پایہ کا آزاد سر ایئر سے من کرتا ہے۔ مشترک نقطہ ہر ایک وزن د آویزاں کیا گیا ہے۔ اگر ہر ایک سلاح کا طول د ہو تو

ثابت کرو کہ ہر ایک رسی کا تناؤ  $\frac{2}{3} (د + د)$  ہے۔

۳۔ بارہ مسادی یکساں سلاخوں کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے ایک منظم آٹھ سطحی شکل بنائی گئی ہے جسے ایک کونہ پر لٹکا دیا گیا ہے۔ اس راس کو مقابل کے راس کے ساتھ ایک رسی کے ذریعہ جس کا اصلی طول سلاخوں کے طول کے مساوی ہے ملا کر آٹھ سطحی کو سہارا دیا گیا ہے۔ رسی چکینے اور کل سلاخوں کا مجموعی وزن اس کے طول کو دو چند کر سکتا ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کے محل میں ہر ایک سلاخیں سمت انتصالی کے ساتھ زاویہ  $\frac{\pi}{3}$  بناتی ہیں۔

۴۔ بارہ بے وزن سلاخوں کے سروں کو آزادانہ جوڑنے سے ایک متوازی السطوح بنایا گیا ہے جو مقابل کے راسوں کو ملائے دئے پکھڑا رسیوں کے زیر عمل متعادل ہے۔ ثابت کرو کہ رسیوں کے تناؤ اور سلاخوں کے متعادل اُن کے طولوں کے تناسب ہیں۔  
اگر  $t, t, t, t, t, t$ ۔  $t, t, t, t, t, t$  کے تناؤ ہوں جن کے طول  $l, l, l, l, l, l$ ،  $l, l, l, l, l, l$  ہوں تو مہموم کام کی مسادات سے حاصل ہوتا ہے

$$t \text{ مفعول} + t \text{ مفعول} + t \text{ مفعول} + t \text{ مفعول} + t \text{ مفعول} + t \text{ مفعول} = 6$$

لیکن یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ  $l + l + l + l + l + l = 6$  سلاخوں کے طولوں کے مربودوں کے مجموعہ کا چارگنا۔ اس لئے

$$l \text{ مفعول} + l \text{ مفعول} + l \text{ مفعول} + l \text{ مفعول} + l \text{ مفعول} + l \text{ مفعول} = 6$$

چونکہ یہ مساواتیں مفعول، مفعول، مفعول، مفعول، مفعول اور مفعول کی سب قیمتوں کے لئے درست ہیں اس لئے

$$\frac{t}{l} = \frac{t}{l} = \frac{t}{l} = \frac{t}{l}$$

سوال کے باقی حصہ کا جواب کسی کو نہ پر عمل کرنے والی قوتوں پر غور کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔  
۵۔ ایک مخروطی خیمہ لافندہ مسادی مساوی المساقین مثلثی اجزائے بنا ہوا ہے۔ اس کے راس کو قبضہ سے دھل کر کے اسے ایک چکنی سطح پر رکھا گیا ہے اور اس محل میں کہیں کو ایک وزنی گول حلقہ کی مدد سے جو اس کے گرد گزرتا ہے متعادل رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{تبادل کے لئے مخروط کا نصف راسی زاویہ جب } \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right) \text{ ہے جہاں } \frac{3}{2} \text{ و } \frac{1}{2}$$

بالترتیب مخروط اور حلقہ کے وزن ہیں، رعلقہ کا نصف قطر ہے اور وہ مخروط کا مائل ضلع ہے۔  
۶۔ تین ذرے جن میں سے ہر ایک کا وزن  $W$  ہے ایک ایسے چکنے کرہ کی بیرونی سطح چس کی نصف قطر ہے تبادل میں ہیں۔ ذروں کو مساوی طول  $l$  کی رسیاں باہم ملتی کی ہوئی ہیں اور یہ کرہ کی سطح پر متساوی ساکن ہیں۔ مہموم کام کے اصول کی مدد سے



ثابت کرو کہ ہر رسی کا تناؤ  $\left\{ \frac{\text{جب عم جب } \frac{1}{2}}{\text{جب } \frac{3}{2} \text{ عم } \frac{3}{2}} \right\}$  ہے جہاں عم وہ زاویہ ہے جس کا قوسی ناپ  $\frac{1}{2}$  ہے۔

۷۔ ایک وزنی لچکدار رسی کا قدرتی طول ۲ ۳ ۱ ہے۔ اس کے سروں کو بانڈھ کر اسے چکنے مخروط کے گرد جس کا محور انتصالی ہے اور جس کا نصف راسی زاویہ عم ہے ڈالا گیا ہے۔ اگر رسی کا وزن و اور پچک کی قدر لہ ہو تو ثابت کرو کہ یہ جس دائرہ کی شکل میں متعادل ہوگی اس کا نصف قطر  $(1 + \frac{2}{3\pi})$  مم عم ہے۔

۸۔ ایک چکنے گردشی مکانی نما کو اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ اس کا راس اوپر کی طرف ہے اور محور انتصالی ہے۔ اس پر ایک وزنی لچکدار رسی ڈالی گئی ہے جس کا طول بغیر کھنچاؤ کے ۲ ۳ ج ہے۔ جب رسی تعادل میں ہو تو ثابت کرو کہ اس کی شکل جس دائرہ کی ہوگی اس کا نصف قطر  $\frac{2\pi}{3} \frac{1}{\text{ج} - 1}$  ہوگا جہاں و رسی کا وزن ہے، لہ اس کی پچک کی قدر ہے اور  $\pi$  کون مکانی کا وتر خاص ہے۔

۹۔ دو مساوی ذروں کو دو معلومہ بے وزن رسیوں کے ذریعہ ملایا گیا ہے ان ذروں کو ایک چکنے مخروط کے گرد جس کا محور انتصالی ہے اور راس اوپر کی طرف ہے طلقہ کی طرح ڈالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر رسی کا تناؤ  $\frac{2}{3}$  مم عم ہوگا جہاں و ہر ذرہ کا وزن ہے اور  $\pi$  مخروط کا راسی زاویہ ہے۔

۱۰۔ فرض کرو کہ کسی متحرک ذرہ کے طریق کے کسی نقطہ (لا، ما، ی) پر ذرہ پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ لا، ما، ی ہیں۔ تب اگر دلفہ ۹۶ کے مطابق اس کے محددوں میں بالترتیب مف لا، مف ما، مف ی کی تبدیلی واقع ہو تو قوتوں کا کام

$$= \text{لا مف لا} + \text{ما مف ما} + \text{ی مف ی}$$

جب ذرہ مذکور کسی معیاری محل (لا، ما، ی) سے حرکت کر کے محل (لا، ما، ی)

میں آئے تو فرق کا مجموعی کام جو ذرا بڑا ہو = ان کاموں کا مجموعہ۔ یہ جو چھوٹے چھوٹے ابتدائی ہٹاؤں میں ہوا ہے۔

$$J = \int (L_A + L_B + L_C) dt$$

اس پر انجام دیتی ہیں۔

مثلاً جب ذرہ نقطہ (لا، ما، ی) پر ہو تو  
(لا، ما، ی)

تو انی بالقوہ =  $\int$  (لا فلا + ما فرما + ی فری)  
(لا، ما، ی)

= قہ - فہ

۱۸۰۔ کسی نظام کے محدود۔ ایک جسم دو ابعاد میں آزادانہ حرکت کر سکتا ہے۔

اس کے مقام کا تین ہو سکتا ہے اگر اس پر کسی مخصوص نقطہ کے محدود معلوم ہوں  
اور نیز یہ معلوم ہو کہ کوئی خط جو بلحاظ جسم کے ثابت ہے محور لا کے ساتھ کیا زاویہ  
بناتا ہے۔

ان تین مقداروں لا، ما، ی کو جسم کے محدود کہہ سکتے ہیں اور جسم کے کسی  
دوسرے نقطہ کے محدود ان محدود کی رقوم میں معلوم ہو سکتے ہیں۔ تین ابعاد میں  
ہم کسی جسم کے مقام کو پورے طور پر متعین کر سکیں گے اگر ہم اس جسم کے تین  
معلومہ نقطوں کے محدود معلوم ہوں۔ لیکن ان تین نقطوں کے لا محدود میں  
تین رشتے ہوتے ہیں جو اس بات کو ظاہر کرتے ہیں کہ ان نقطوں کو ملانے والے  
تین خطوط کا طول غیر متغیر ہے۔

پس ان دو محدود میں سے کوئی سے تین محدود باقی محدود کی رقوم میں بیان  
ہو سکتے ہیں۔ اور اس لئے باقی ماند چھ محدود جسم کے مقام کو فضائیں متعین کرتے  
ہیں۔ ان چھ مقدار کو جسم کے محدود کہہ سکتے ہیں۔

اس واقعہ کو یوں بھی دیکھ سکتے ہیں کہ کسی جسم کا مقام جو فضائیں آزادانہ حرکت  
کر سکتا ہو متعین ہو جائے گا اگر ہم اس کے کسی نقطہ کے تین محدود معلوم  
ہوں اور نیز محوروں کے لحاظ سے اس کے دو خطوط ا ب اور ج د کے محل

معلوم ہوں ان خطوں کے سمتی جو ب، التمام (ل، م، ن) اور (ل، م، ن) تین متعلق

سے مربوط ہیں  $ل^۱ + م^۱ + ن^۱ = ۱$  اور  $ل^۲ + م^۲ + ن^۲ = ۱$  اور

$ل^۱ + م^۱ + ن^۱ + م^۲ + ن^۲ =$  حجم طہ جہاں طہ ان خطوط کا درمیانی زاویہ ہے جو متعین ہے۔ اس لئے یہ چھ سمتیہ جویب الہام بالآخر تین غیر تابع مقداروں میں تقوّل ہو جاتی ہیں۔

پس حسب سابق کسی جسم کے تمام کونفضا میں متعین کرنے کے لئے چھ مقداریں ضروری اور کافی ہوتی ہیں۔ ان مقداروں کو جسم کے محدود کہتے ہیں لہذا کوئی غیر تابع مقداریں جن کے معلوم ہونے سے جسم کا مقام متعین ہو جائے جسم کے محدود کہلاتے ہیں۔

۱۸۱۔ کسی جسم کے کام کا تفاعل۔ اگر کسی جسم کے نقطہ (لا، با، ی) پر عمل کرنے والی

قوتوں کے اجزائے ترکیبی لا، ما، مے ہوں اور اسی طرح باقی ذروں کے لئے بھی تو جسم کے خفیف سے ہٹاؤ کے لئے قوتیں جسم پر جو کام کرتی ہیں وہ

$= (لا، مے + لا، مے + لا، مے) + (لا، مے + لا، مے + لا، مے) + \dots$

پس  $مفک = ۳ (مے + لا، مے + مے + لا، مے) \dots (۱)$

فرض کرو کہ جسم کے غیر تابع محدود سہ، ذ، ضہ ہیں، پس جسم کے ہر ایک نقطہ کے محدود اور اس پر عمل کرنے والی قوتیں سہ، ذ، ضہ کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں، تب (۱) کو اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$مفک = سافرسہ + فافرفہ + صافرضہ + \dots$

اگر جسم کسی خاص محل (سہ، ذ، ضہ) سے حرکت کرے کسی دوسرے محل (سہ، ذ، ضہ) میں آجائے تو جملہ کام

$= (سہ، ذ، ضہ) (سافرسہ + فافرفہ + صافرضہ + \dots)$   
(سہ، ذ، ضہ)

اگر حسب سابق تقادیر مسا، فاء ضنا... کسی مقدار قہ کے جزوی تفرقی سر ہوں  
بلحاظ سہ، فہ، ضہ... تو حاصل ہوتا ہے ک = قہ - قہ

اگر کسی مقام پر توانائی بالقوہ ھ حسب سابق اس کام کے مساوی تسلیم کیا جائے  
جو جسم مقام سہ، فہ، ضہ... سے کسی معیاری محل تک آنے میں انجام دیتا ہے تو  
ھ = قہ - قہ

۱۸۲۔ نظام کے تعادل کا محل۔ جسم کے تعادل کا محل مہموم کام کے اصول  
سے کام معنک کو ہر مہموم ہٹاؤ کے لئے صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے  
بالفاظ دیگر ہم نظام کا وہ محل معلوم کرتے ہیں جس کے لئے ک بڑے سے بڑا یا چھوٹے  
سے چھوٹا یا ساکن ہو۔

چونکہ مقداریں سہ، فہ، ضہ غیر تابع ہیں اس لئے ہم مقداروں مسا، فاء ضنا  
کو (جو بلحاظ سہ، فہ، ضہ کے ک کے جزوی تفرقی سر ہیں) صفر کے مساوی رکھنے سے  
تعادل کا محل معلوم کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ تعادل کا ایک محل جو اس طرح معلوم ہوتا ہے ایسا ہے جس کے لئے  
ک بڑے سے بڑا ہے۔ اب اگر جسم کو ذرا سا ہٹا کر قریب کے محل میں لایا جائے  
اور وہ ایک لمحہ کے لئے ساکن ہو جائے تو ظاہر ہے کہ (علم حرکت کے اس اصول کے  
مطابق کہ پیدا شدہ توانائی بالحرکت کئے ہوئے کام کے مساوی ہوتی ہے) جسم کو  
اس طرح حرکت کرنا چاہیئے کہ قوتیں جو کام کریں وہ مثبت ہو یعنی اس طرح  
حرکت کرے کہ کام ک میں اضافہ واقع ہو اور اس لئے اسے تعادل کے محل  
میں واپس آنا چاہیئے۔ پس یہ محل قائم تعادل کا محل ہے۔

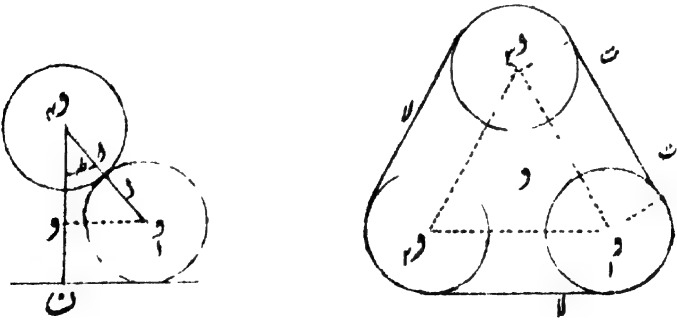
اسی طرح سے اگر تعادل کے کسی محل کے لئے ک کی قیمت چھوٹی سے  
چھوٹی ہو تو جسم خفیف سے ہٹاؤ کے بعد اس طرح حرکت کرے گا کہ کام میں اضافہ واقع  
ہو۔ اس لئے یہ تعادل کے محل سے اور بھی پرے ہٹ جائے گا یعنی یہ محل غیر قائم  
تعادل کا محل ہوگا۔

بالآخر اگر حقیقی طور پر چھوٹے سے چھوٹا ہو اور بڑے سے بڑا ہو یعنی اگر یہ بعض ہٹاؤں کے لئے بڑے سے بڑا اور بعض کے لئے چھوٹے سے چھوٹا ہو تو تعادل بھی اس کے مطابق بعض ہٹاؤں کے لئے قائم اور بعض کے لئے غیر قائم ہوگا۔ پس یہ محل بھی بہ نسبت مجموعی قائم توازن کا محل نہیں ہوگا۔

خلاصہ یہ ہے کہ اگر کسی جسم یا جسموں کے کسی نظام کے لئے کام کا تعادل رک بنایا جائے اور اسے غیر تابع محدودوں سے آزاد، منہ.... کی رقوم میں بیان کیا جائے تو تعادل کے محل وہ محل ہونگے جن کے لئے ک بڑے سے بڑا، چھوٹے سے چھوٹا یا ساکن ہو اور ان محلوں میں قائم تعادل کے محل وہی ہونگے جن کے لئے ک کی تناظر قیمتیں حقیقی طور پر بڑی سے بڑی ہوں۔

چونکہ  $مف = ہ = -$  مف ک اس لئے اگر ہم کام کی بجائے توانائی بالقوہ کو لیں تو نتائج بالابالکل الٹ جائیں گے۔ یعنی وہی محل قائم تعادل کے محل ہونگے جن کے لئے توانائی بالقوہ کی تناظر قیمتیں حقیقی طور پر کم سے کم ہوں۔

۱۸۳ - مشتق - تین سادی کرے ایک چھنے میز پر پڑے ہیں اور ایک چکنی بچکداری کے ذریعہ جو ان کے مرکزدں کی سطح مستوی میں ہے اس طرح تعادل میں ہیں کہ یہ ایک دوسرے سے مس کرتے ہیں اور رسی تنی ہوئی نہیں ہے۔ ایک اور چوٹھا کرہ ان کے اوپر رکھ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر تعادل کے محل میں اوپر کے کرہ کے مرکز



کو نیچے کے کسی کرہ کے مرکز کے ساتھ ملانے والا خط سمت استھالی سے زاویہ بنائے تو

متشکل مٹاؤں کے لئے تعادل قائم ہوگا اگر جب ط  $\frac{1}{3}$

فرض کر کہ اوپر کے کرہ کے مرکز کو نیچے کے کرہ کے مرکز کے ساتھ ملانے والا خط سمت  
انتخابی کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے جبکہ نیچے کے کرہ کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ  
لا ہے  
اس لئے

$$\frac{لا}{۳۱۲} = \frac{\frac{۲}{۳} \text{ لاجب } ۹۰}{۱۲} = \frac{۱۲}{۱۲} = \text{جب ط}$$

اگر چاک کی قدر لہ ہو اور رسی کا تناؤ ت ہو تو

$$ت = ل = \frac{(۱۲\pi + ۱۹) - ۱۲\pi + ۱۳}{۱۲\pi + ۱۹} \times \frac{۱۲}{۱(۳ + \pi)۲} = \frac{(۱۲ - ل)}{۱(۳ + \pi)۲}$$

اگر وہ ایک کرہ کا وزن ہو تو کسی متشکل مٹاؤ کے لئے کام کا تعادل

$$\text{مفک} = - \text{و مف} (۱۲ + ۱) \text{ حجم ط} - ۳ \text{ ت مف ل}$$

$$\frac{\text{فرک}}{\text{فرط}} = \frac{۱۲ \times \text{و} - \text{و} \times \text{جب ط}}{۳ + \pi} = \frac{۱۸ \text{ لاس لہ}}{۳ + \pi} [\text{لاس جب ط} - ۱] \text{ حجم ط}$$

$$\frac{\text{فرک}}{\text{فرط}} = \frac{۱۲ \times \text{و} - \text{و} \times \text{حجم ط}}{۳ + \pi} = \frac{۱۸ \text{ لاس لہ}}{۳ + \pi} [\text{لاس (حجم ط} - \text{جب ط} + \text{جب ط}]$$

$$\text{تعادل کا محصل} = \frac{\text{فرک}}{\text{فرط}} = - \text{و} \text{ سے حاصل ہوتا ہے یعنی}$$

$$\text{و جب ط} = \frac{۱۸ \text{ لاس لہ}}{۳ + \pi} [\text{لاس جب ط حجم ط} - \text{حجم ط}]$$

طہ کی اس قیمت کے لئے

$$\frac{\text{فرک}}{\text{فرط}} = \frac{۱۸ \text{ لاس لہ}}{۳ + \pi} [\text{لاس جب ط حجم ط} - \text{حجم ط}] - \text{لاس (حجم ط} - \text{جب ط} + \text{جب ط}]$$

$$= \frac{18 \times 10^3 \times 10^3}{3 + \pi} \times \frac{1}{10^3} \times \frac{1}{10^3} = 1$$

اگر جب ط >  $\frac{1}{10^3}$  تو  $\frac{1}{10^3}$  منفی ہوگا اور ک کی متناظر قیمت بڑی سے بڑی ہوگی اور تعادل قائم ہوگا۔

## مثالیں

۱۔ ایک ٹھوس چپٹے کرہ کے محور کے ایک سرے پر اس کے وزن کا ن گنا وزن رکھ دیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ یہ ایک چکنی افقی سطح مستوی پر کن مختلف محلوں میں متبادل رہ سکتا ہے اور ان میں سے کون سا محل قائم تعادل کا محل ہے، فیز ثابت کرو کہ اگر  $\frac{n}{n+1} > \frac{n}{n+1}$  تو تعادل کے صرف دو محل ممکن ہیں۔

۲۔ محوری انتصاباً اوپر کی طرف ہے اور مبداء ہے، ایک یکساں مربع تختہ (ب ج د جس کا وزن و اور ضلع ۲ ہے) محور ا ب کے گرد جو ثابت ہے اور جس کی سمتیہ جیب التمام (جب ط ۱، جم ط) میں آزادانہ گھوم سکتا ہے۔ ایک بے وزن رسی جو تختہ کے کونے ج کے ساتھ بندھی ہے نقطہ (۰، ۱، ۲) پر ایک ثابت چکنے حلقہ میں سے گزرتی ہے اور اس کے دوسرے سرے کے ساتھ وزن و بندھا ہے۔ ثابت کرو کہ تختہ تعادل میں ہوگا جبکہ زاویہ ذ جو تختہ سطح لای کے ساتھ بنا ہے مساوات

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

کو پورا کرے۔ تعادل کے مقام پر بحث کرو۔

۳۔ ایک چکنی ٹھوس مستطیلہ محزط جس کا ارتفاع ۵ اور راسی زاویہ ۲ عم ہے ایک افقی مستطیلہ سوراخ کے اندر جس کا نصف قطر ۱ ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے، ثابت کرو کہ اگر  $16 < 3 \times 5$  جب ۲ عم تو تعادل قائم ہوگا۔ اور تعادل کے باقی دو محلوں میں غیر قائم ہوگا، نیز اگر  $16 > 3 \times 5$  جب ۲ عم تو تعادل غیر قائم ہوگا اور تعادل



کا کل صرف ایک ہوگا جس میں محور انتہابی ہے۔

اگر ایک وزن و کو اس پر لٹکا دیا جائے اور مخروط کا وزن و ہو تو ثابت کر دو کہ

متناظر شرط تعادل ہوگی  $16 (9 + 9) < 30$  جب  $2$  ع

م۔ ایک یکساں قائم مستدیر مخروط کا ارتفاع  $h$  اور راسی زاویہ  $2$  ع ہے۔ یہ دو متوازی اور متوازی الافق سلاخوں کے اندر جن کا فاصلہ  $d$  ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے اور اس کا محور انتہابی ہے ثابت کر دو کہ ان زاویہائی ہٹاؤں کے لئے جن میں محور سلاخوں کے متوازی انتہابی مستوی میں حرکت کرے تعادل قائم

ہوگا اگر  $h > \frac{16}{3} d$  ق م  $2$  ع

۵۔ ایک قائم مخروط کا راسی زاویہ قائم ہے۔ اسے ایک افقی میز پر مربع سوراخ کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے اور یہ مربع کے اضلاع کو مس کرتا ہے۔ ثابت کر دو کہ اگر مخروط کی بلندی  $h$ ، مربع کے ضلع  $a$  کے دو چہند سے زیادہ ہو تو تعادل کا ایک ترجیحاً محل ممکن ہے جس میں مخروط کا محور افق کے ساتھ

زاویہ جب  $\frac{16}{3} \frac{a}{h} < 1$  بنائے۔ نیز ثابت کر دو کہ یہ محل قائم تعادل کا محل ہوگا۔

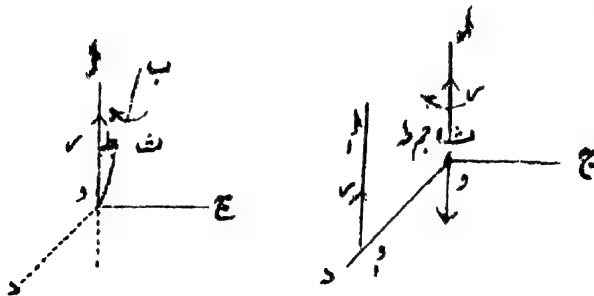
# گیارہواں باب

تین ابعاد میں قوتیں (سلسل)

پائسن سو کا مرکزی محور۔ اسطوانہ نما اور صفری خطوط ..

۸۴۔ اگر قوتوں کا کوئی نظام ایک استوار جسم پر عمل کر رہا ہو تو ثابت کر دو کہ اسے ایک واحد قوت اور ایک ایسے جفت میں تحلیل کیا جاسکتا ہے جس کا محور قوت کے خط عمل کے متوازی ہو۔

دفعہ ۱۶۲ میں بتایا جا چکا ہے کہ قوتوں کے کسی نظام کو کسی اختیاری نقطہ و پر عمل کرنے والی ایک قوت میں اور ایک ایسے جفت میں تحلیل کیا جاسکتا ہے جس کا معیار اثر و میں سے گزرنے والے محور کے گردش ہو

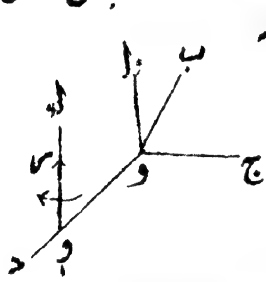


فرض کر دو کہ س کی سمت و ا ہے اور د ب جنت ث کا محور ہے، اور

اوب = ط، مستوی سطح اوب میں ول پر وج عمود نکالو اور مستوی اوج کے علی القوام خط ود دیکھیں۔

دفعہ ۲۹ کی رو سے جنت ث جس کا محور و ب ہے دو جنتوں ث جم ط اور د ث جب ط کے سازی ہے جن میں سے اول الذکر کا محور و ب ہے اور آخر الذکر کا محور و ج ہے۔

مورخ ازکر جنت مستوی لود میں عمل کرتا ہے اور اس لئے اس کی بجائے دو ایسی مساوی مخالف متوازی قوتیں رکھ سکتے ہیں جن کا معیار آخر ث جب ط محور اب جنت کی دو قوتوں میں سے ایک قوت مساوی جو و ب کی مخالف سمت میں عمل کرے، تب دوسری قوت مساوی خط ود کے ایک ایسے نقطہ پر عمل کریگی



ث جب ط

کہ مساوی = ث جب ط یعنی و د = ث جب ط  
اب و پر کی قوتیں متعادل ہو گئیں  
نیز جنت ث جم ط کے محور کو و سے بدل کر و ب  
پر لایا جاسکتا ہے۔

اس طرح سے ہمارے پاس بالآخر ایک قوت مساوی کا خط عمل و ب ہے اور ایک جنت ث جم ط جس کا محور بھی و ب ہے رہ جاتے ہیں۔

اس محور کو پائین لے کر مرکز کی محور کہتے ہیں۔

یہ تسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ اس طرح حاصل شدہ مرکزی محور ایک ہی ہوتا ہے اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ قوتیں کا دیا ہوا نظام و ب کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت اور و ب کے گرد عمل کرنے والے ایک جنت کے مساوی ہے اور نیز ایک اور خط و ب ل کے ساتھ عمل کرنے والی ایک اور قوت اور اس خط و ب ل کے گرد عمل کرنے والے ایک اور جنت کے بھی مساوی ہے۔ دفعہ ۱۶۲ کی رو سے حاصل قوت مساوی اور مقدار میں ہمیشہ وہی رہتی ہے مبادیا اساسی نقطہ خواہ کہیں لیا جائے پس و ب ل متوازی ہوگا و ب ل کے اور حاصل قوت مساوی دونوں کے لئے وہی ہے۔

اس لئے نظام (مر ث) خط و ب ل کے گرد مساوی ہے متوازی خط و ب ل کے گرد عمل کر نیوالے نظام (مر ث) کے۔ اب اگر و ب ل اور و ب ل کا درمیانی فاصلہ مع ہو تو قوت مساوی و ب ل کے ساتھ

عمل کرتی ہے وہ مساوی ہے ایک قوت سر کے جو  $\omega$  کے ساتھ عمل کرتی ہے اور ایک جنت  $\omega$  کے جس کا محور  $\omega$  پر عمود ہے (دیکھو دفعہ ۵۹)

پس دوسرا نظام سادل ہے  $\omega$  کے ساتھ عمل کرنے والی ایک قوت سر کے اور ایک جنت  $\omega$  کے جس کا محور  $\omega$  ہے اور نیز ایک اور جنت  $\omega$  کے جس کا محور  $\omega$  پر عمود ہے۔ اب موخر الذکر دونوں جنت ایک واحد جنت میں تحویل ہو جاتے ہیں جس کا محور  $\omega$  نہیں ہو سکتا۔ اس لئے موخر الذکر نظام پہلے نظام کے سادل نہیں ہو سکتا جس کا محور  $\omega$  ہے۔

پس معلوم ہوا کہ ہمارا ابتدائی مفروضہ غلط تھا یعنی ہم دو مرکزی محور  $\omega$  اور  $\omega$  لم معلوم نہیں کر سکتے لہذا دندہ ما قبل کا مرکزی محور صرف ایک ہی ہوتا ہے۔

۱۸۵۔ مبادا و خواہ کہیں لیا جائے حاصل قوت ہر صورت میں وہی رہتی ہے اور مرکزی محور کے ساتھ عمل کرنے والی قوت کے مساوی ہوتی ہے۔ لیکن حاصل جنت وہی نہیں رہتا۔ یہ جنت صریحاً مرکزی محور کے لئے چھوٹے سے چھوٹا ہوتا ہے کیونکہ اگر کسی مبادا کے لئے (جو مرکزی محور پر واقع نہ ہو) جنت  $\omega$  ہو اور مرکزی محور حاصل قوت کی سمت کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو دفعہ گزشتہ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ مرکزی محور کے لئے جنت کی قیمت  $\omega$  جم ط ہوگی یعنی ہمیشہ  $\omega$  سے کم ہوگی۔

پس مرکزی محور کے گرد حاصل جنت کا معیار اثر ہمیشہ کم ہوتا ہے اس حاصل جنت کے معیار اثر سے جو مرکزی محور پر نہ واقع ہونے والے کسی نقطہ کے جواب میں حاصل ہو۔

۱۸۶۔ ایک واحد قوت  $\omega$  اور ایک جنت  $\omega$  کو جس کا محور قوت کے خط عمل پر

منطبق ہو مجموعی طور پر ایک نام ریج سے موسوم کرتے ہیں نسبت  $\frac{\omega}{\omega}$  کو یعنی جنت

کا معیار اثر بڑے ہوئے قوت کو گھائی کہتے ہیں، یہ گھائی ایک خطی مقدار ہوتی ہے۔ جب گھائی صفر ہو تو ظاہر ہے کہ ریج ضرب ایک قوت پر مشتمل ہو گا۔ جب گھائی لا متناہی ہو تو ریج محض ایک جنت پر

مشتمل ہوگا۔

واحد قوت سما کو اکثر اوقات پیچ کی حدت بھی کہتے ہیں حاصل واحد قوت کے خط عمل اور گھائی کو ملا کر پیچ کہتے ہیں پس پیچ سے مراد ہے ایک خاص خط ہے جو ایک خاص گھائی سے وابستہ ہوتا ہے۔

پیچ کو متعین کرنے کے لئے پانچ مقداروں کی ضرورت ہوتی ہے۔ ان میں سے چار مقداریں محور کے محل کو متعین کرنے کے لئے ضروری ہیں مثلاً وہ نقطہ جہاں یہ خط حوالہ کے کسی مستوی سے ملتا ہے اور حوالے کے محوروں سے اس خط کا سیلان پانچویں مقدار گھائی کے تعین کے لئے ضروری ہے۔

کسی پیچ پر پیچ کو پورے طور پر متعین کرنے کے لئے ایک اور چھٹی مقدار کی ضرورت ہوگی جس سے پیچ کی حدت ظاہر ہو سکے۔

## ۱۸۷۔ راست دستی پیچ اور چپ دستی پیچ۔

ظاہر ہے کہ ایک ہی اپنی حرکت کے جواب میں گردش حرکت دو طرح سے یعنی مخالف سمتوں میں عمل پذیر ہو سکتی ہے۔ جب گردش حرکت اس پیچ کش کی حرکت کے مطابق ہو جس سے پیچ اندر کی طرف کسا جا رہا ہو تو پیچ کو راست دستی پیچ کہتے ہیں اگر گردش حرکت اس کے برعکس ہو تو پیچ کو چپ دستی پیچ کہتے ہیں۔

عام تعریف حسب ذیل ہے۔ فرض کرو کہ ایک شخص اس طرح کھڑا ہے کہ اس کا

جسم پیچ کے محور پر منطبق ہے اور اپنی حرکت کی مثبت سمت پیروں سے سر کی طرف ہے اور وہ ایک گھڑی کو مشابہہ کرتا ہے جس کا رخ اوپر کی طرف ہے اور جو گردش حرکت کے مستوی میں واقع ہے۔ تب اگر گردش کی سمت گھڑی کی سوئیوں کی حرکت کے موافق ہو تو پیچ کو چپ دستی پیچ کہیں گے اور اگر سوئیوں کی حرکت کے مخالف ہو تو راست دستی پیچ کہیں گے۔

مثلاً اس کتاب کی شکلوں میں جو ہندسہ مجہبات کے عام دستور العمل کے مطابق کھینچی گئی ہے ہم نے چپ دستی پیچ کو مثبت اور معیاری صورت مانا ہے

یہ امر اس بات سے بھی ظاہر ہوگا اگر ہم مذکورہ بالا تعریف کا اُس بیچ پر اطلاق کریں جس کا محور حوالہ کے لا محور پر منطبق ہے کیونکہ ہم نے دفعہ ۴۷ میں یہ فرض کر لیا ہے کہ وہاں سے وئے تک جسم کو گردش دینے والا جفت مثبت ہے۔

۱۸۸۔ وہ شرط معلوم کر دو کہ قوتوں کا ایک معلومہ نظام ایک واحد قوت میں تحویل ہو جائے۔ دفعہ ۱۶۲ کی رد سے یہ سب قوتیں کسی اختیاری نقطہ و پیراغل کرنے والی ایک حد قوت میں اور ایک واحد جفت ثلث میں تحویل ہو سکتی ہیں۔ اگر قوت کے خط عمل اور جفت ثلث کے محور کا درمیانی زاویہ ط ہو تو قوت سے دو قوتوں میں جسم ط اور مرکز ط کے معادل ہے جہاں مرکز ط جفت کی سطح مستوی پر نمودار ہے یعنی جفت کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔ اور مرکز ط جفت کے محور پر نمودار ہے۔ اب قوت سے مرکز ط اور جفت کی دونوں قوتیں جو سب ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہیں ایک واحد قوت سے مرکز ط میں تحویل ہو جاتی ہیں جو و میں نہیں گزرتی اور اس لئے بالعموم مرکز ط سے ترکیب پا کر ایک واحد قوت میں تحویل نہیں ہو سکتی۔ لیکن اگر مرکز ط = ۰ یعنی اگر جسم ط = ۰ تو ہمارے پاس صرف ایک قوت سے مرکز ط رہ جاتی ہے۔

اس لئے ط کو ۰ کے مساوی ہونا چاہیئے یعنی وہ خطوط مستقیم جن کی

سمتی جیوب التمام  $\frac{لا}{سر}$ ،  $\frac{ما}{سر}$ ،  $\frac{ل}{سر}$  اور  $\frac{ن}{ث}$ ،  $\frac{م}{ث}$ ،  $\frac{ل}{ث}$

میں ان کو علی القوائم ہونا چاہیئے۔ اس لئے

$$\frac{لا \times ل}{سر \times ث} + \frac{ما \times م}{سر \times ث} + \frac{ل \times ن}{سر \times ث} = \text{جسم } ۹۰ = ۰$$

$$\therefore لا + ما + ل = ن$$

مطلوبہ شرط ہے۔

۱۸۹۔ غیر متغیرات خواہ سبب کہیں لیا جائے اور محوروں کو کیسے ہی بدلا

جائے قوتوں کے کسی معلومہ نظام کے لئے مقداروں

$$لا + ما + ل = ن$$

کی قیمتوں میں کچھ فرق نہیں آتا جہاں  $\Sigma = لا$ ،  $\Sigma$  وغیرہ اور  $\Sigma = (م + لا)$ ۔  
- م (ای) وغیرہ۔

دفعہ ۱۶۲ اور ۱۸۴ کی رو سے ظاہر ہے کہ  $لا + ما + م$  مربع ہے اس  
حاصل قوت سرا کا جو مرکزی محور کے جواب میں حاصل ہوتی ہے اس لئے اسکی  
قیمت غیر متغیر ہے۔

نیز اگر دفعہ ۱۶۲ میں  $(ل، م، ن)$  حاصل قوت کی سمتی جیب التمام ہوں اور  
اور  $(ل، م، ن)$  حاصل جفت کے محور کی سمتی جیب التمام ہوں تو

$$\frac{لا}{سرا} \times \frac{ل}{ث} + \frac{ما}{سرا} \times \frac{م}{ث} + \frac{ن}{ث} = ل + م + ن$$

= حاصل قوت اور حاصل جفت کے محور کے درمیانی زاویہ کی جیب التمام۔  
= جم طہ (دفعہ ۱۸۴)

$$\therefore ل + ما + ن = سرا \times ث = جم طہ = سرا + ک$$

جہاں ک مرکزی محور کے گرد جفت کا سیدار اثر ہے۔

$$\text{پس } ع = ل + ما + ن = \text{غیر متغیر ہے۔}$$

اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ک صفر ہو یعنی اگر معلومہ نظام ایک واحد قوت میں

$$\text{محوّل ہو سکے تو } ل + ما + ن = ع = ۰$$

دوسرا غیر متغیرہ اُس صورت میں بھی صفر ہوگا جب حاصل قوت سرا صفر ہو اس

$$\text{صورت میں پہلا غیر متغیرہ بھی صفر ہوگا۔}$$

$$\text{نظام کے حاصل بیچ کی گھائی گ} = \frac{ک}{سرا} = \frac{ک}{سرا} = \frac{ع}{سرا}$$

$$= \frac{\text{نظام کا غیر متغیرہ ع}}{\text{غیر متغیرہ سرا کا مربع}}$$

۹۰۔ قوتوں کے کسی نظام کے لئے مرکزی محور کی مساوات معلوم کرنا۔

دفعہ ۱۶۲ کی ترقیم کی رو سے فرض کرو کہ محوروں ولا، و ما، وی کے لحاظ سے کسی نقطہ ق کے محدود (من، گ، ہ) ہیں۔

ولا کے متوازی ق میں سے گزرنے والے خط کے گرد معیار اثر صہ بجا لا، ہ، ی کی بجائے لا، ف، با، گ، ی، ہ رکھنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

پس یہ معیار اثر = (با، گ) ہے۔ (ی، ہ) (ما،)

= (ا، ی، ما)۔ گ (ے) + (ہ) (ما)

= ل۔ گ + ہ + ما

دفعہ ۱۶۲ کی ترقیم کے مطابق۔  
اسی طرح و ما وی کے متوازی ق میں سے گزرنے والے خطوط کے گرد معیار اثر بالترتیب

م۔ ہ + لا + ف + ن اور ن۔ ف + ما + گ لا ہیں۔

نیز ق کے ہر مقام کے لئے حاصل کے اجزائے ترکیبی کی قیمت وہی رہتی ہے، اس لئے یہ اجزائے ترکیبی ہر مقام کے لئے لا، ما، ے، رہتے ہیں۔

اگر ق مرکزی محور پر ہو تو جفت کے محور کی سمتی جیوب التمام حاصل قوت کے خط عمل کی سمتی جیوب التمام کے متناسب ہوتی ہیں۔

اس لئے ل۔ گ + ہ + ما = م۔ ہ + لا + ف + ن = ن۔ ف + ما + گ + لا

ل + لا + م + ن = ک + ہ = ک + ہ

پس نقطہ (ن، گ، ہ) کا طریق یعنی مرکزی محور کی مساوات



$$\frac{\text{ل} - \text{اے} + \text{ی} + \text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{مر} - \text{ی} + \text{لا} + \text{لاے}}{\text{ما}} = \frac{\text{ن} - \text{لا} + \text{ما} + \text{لاک}}{\text{ے}} = \frac{\text{سر}}{\text{سر}}$$

ریخ کی گھائی۔

۱۹۱- مشق ۱- تین قوتیں جن میں سے ہر ایک ق کے مساوی ہے ایک جسم پر عمل کرتی ہیں پہلی قوت نقطہ (۰، ۰، ۱) پر و ما کے متوازی دوسری (۰، ۱، ۰) پر و ی کے متوازی اور تیسری نقطہ (۰، ۰، ۱) پر و لا کے متوازی عمل کرتی ہے۔ محور کارٹیزی ہیں۔ مقدار اور مقام کے لحاظ سے حاصل ریخ معلوم کرو۔

$$\text{یہاں لا} = \text{ما} = \text{ے} = \text{ق}$$

نیز ل = ق ب، مر = ق ج اور ن = ق د  
اس لئے اگر ریخ کی قوت سر اور جنت ک ہو تو

$$\text{سر} = \text{لا} + \text{ما} + \text{ے} = \text{لا} + \text{ق}$$

$$\text{نیز ک سر} = \text{ل} + \text{لا} + \text{مر} + \text{ما} + \text{ن} = \text{ے} = \text{ق} (۱ + ب + ج)$$

$$\therefore \text{ک} = \frac{\text{لا} + \text{ق}}{۳} (۱ + ب + ج)$$

دفعہ ۱۹۰ سے مرکزی محور کی مساواتیں ہیں

$$\text{ب} - \text{ا} + \text{ی} = \text{ج} - \text{ی} + \text{لا} = \text{ا} - \text{لا} + \text{ما}$$

$$\text{یعنی لا} + \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}{۳} = \text{ا} + \frac{\text{ب} + \text{ج} + \text{ا}}{۳} = \text{ا} + \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}{۳} + \text{ی}$$

پس مرکزی محور ایسا خط مستقیم ہوگا جو نقطہ

$$\left( \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}{۳}, \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}{۳}, \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}}{۳} \right)$$

میں سے گزرتا ہے اور تینوں محوروں سے مساوی زاوے بناتا ہے۔

مشق ۲- دو مساوی قوتیں ان دو خطوط مستقیم کے سامنے عمل کرتی ہیں

$$\frac{\text{لا} \times \text{اجم ط}}{\text{اجب ط}} = \frac{\text{ب جب ط}}{\text{ج}} = \frac{\text{ی}}{\text{ج}}$$

نہایت کرو کہ ان کو مرکزی محور ط کی تمام قیمتوں کے لئے سطح

$$\text{ما} \left( \frac{\text{ی}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ی}} \right) = \text{ب} \left( \frac{\text{ج}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}}{\text{ج}} \right)$$

پر واقع ہوگا۔

اگر ہر ایک ذریعہ رقی ہو تو نقطہ (اجم ط، ب جب ط) پر ایک ایسی قوت عمل کرتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی (ب جب ط × ق، ب جم ط ق / ج ق کے تناسب میں اور نقطہ (اجم ط، ب جب ط) پر دوسری ایسی قوت عمل کرتی ہے جس کے اجزائے ترکیبی (ب جب ط × ق، ب جم ط ق اور ج ق کے تناسب میں

$$\text{پس لا} = \text{لا} \left( \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \right) \infty \text{اجب ط ق}$$

$$\text{ما} = \infty \text{ اور مے} \infty \text{اج} \times \text{ق}$$

$$\text{ل} = \text{ل} \left( \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \right) \infty \text{ب ج جب ط} \times \text{ق}$$

$$\text{مر} = \infty \text{ اور ن} \infty \text{ب ق}$$

جب دلو ۱۹۰ کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ب ج جب ط} = \frac{\text{ما} + \text{ب} + \text{ما} \text{اجب ط}}{\text{ج}} \text{ اور ی} \text{اجب ط} = \text{لا} \times \text{ج}$$

دوسری مساوات سے جب ط کی قیمت پہلی مساوات میں درج کرنے سے ہمیں مرکزی محور کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{ما} \left( \frac{\text{ی}}{\text{لا}} + \frac{\text{لا}}{\text{ی}} \right) = \text{ب} \left( \frac{\text{ج}}{\text{ا}} + \frac{\text{ا}}{\text{ج}} \right)$$

مثالیں

۱۔ ایک مکعب کو ہر ضلع و ہے اس کے ۱۱ متقابل کے رخوں کے عمل القوا اعم ہیں زاویوں

کے ساتھ دو سادی قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ معادل ہیں ایک واحد قوت سا کے جو کعب کے مرکز میں سے گزرتی ہے اور ایک جنت  $\frac{1}{4}$  سا کے جس کا محور وہی خط ہے۔

۲۔ و ب د ج ایک مستطیل ہے جس کا ضلع و ب = ب ا ، و ج = ج ا ، نیز و ا اس کی سطح منوی پر عمود ہے۔ و ا ج د اور ب د کے ساتھ قوتیں لا ، ما ، اے عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ حاصل پنچ کی قوت سما اور جنت کا معیار اثر تک بالترتیب  $\frac{لا + ما + اے}{(ب - ج)}$  اور لا (ب - ج)  $\div$  لا + ما + اے میں۔ نیز ثابت کرو کہ اگر و ا ، و ب ، و ج کو حوالے کے محور لا ، ا ، ی فرض کیا جائے تو مرکزی محور کی سادات ہے

$$\frac{لا}{لا + ما + اے} = \frac{ب}{ب - ج} = \frac{ج}{ج - د}$$

۳۔ ایک مستطیل متوازی السطوح کے کناروں و ا ، و ب ، و ج کے طول بالترتیب ۸، ۱۵، ۶ پنچ ہیں اور و ا ، و ب ، و ج اس کے بین زاویہ ہیں۔ ان قوتوں کا پنچ معلوم کرو۔ ب سے و کی سمت میں ۱۳۰، د سے و کی طرف ۶۸ ج سے د کی طرف ۵۰، ب سے ج کی طرف ۶۸

[س = ۱۰۸، ک = ۱۰۸۰؛ مرکزی محور ب ج کے وسطی نقطے سے و ا کے متوازی

خط ہے]

۴۔ و ا ، و ب ، و ج ایک کعب کے تین متوازی کنارے ہیں اور و ا ، و ب ، و ج ج ج اور و ا اس کے بین زاویہ ہیں۔ ب ج ، ج ا ، و ب اور و ا کے ساتھ قوتیں لا ، ما ، اے اور سما عمل کرتی ہیں، ثابت کرو کہ وہ ایک واحد حاصل قوت کے سادی ہونگی اگر

$$(ما + لا + لا) + (ما + لا + لا) + (ما + لا + لا) = ۰$$



۱۰۔ ایک واحد قوت ہے۔ کے اجزاء سے ترکیبی محوروں کے ساتھ بالترتیب لا، ما، اے ہیں اور اسی کے سیار اثران محوروں کے گرد بالترتیب ل، ا، ہر ان ہیں ثابت کرو کہ واحد قوت کی مقدار  $\sqrt{لا^2 + ما^2 + اے^2}$  ہے اور اس کے خط عمل کی مساوات ہے

$$\frac{ما}{لی} = \frac{لا}{لی} = \frac{اے}{لی} = \frac{لا - ما - اے}{ن} = ۱$$

۱۱۔ اگر ایک قوت (لا، ما، اے) ایک زائدی مکانی بنا  $\frac{لا}{۲} - \frac{ما}{۲} = \frac{اے}{۲} = \frac{لی}{ج}$  کے مکین کے ساتھ عمل کرے اور مبدأ پر عمل کرنے والی ایک مساوی قوت (لا، ما، اے) اور ایک جفت (ل، ہر، ن) کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ

$$لی + ب ہر = ۰، ب لا + و ما = ۰، ج ن + اب = ۰$$

۱۲۔ ایک قوت ق محور لا کے ساتھ عمل کرتی ہے اور ایک اور قوت ن × ق ایک اسطوانہ لا<sup>۲</sup> = و کے ایک کون کے ساتھ عمل کرتی ہے ثابت کرو کہ مرکزی محور اسطوانہ

$$ن (ن - لا - ی) + (۱ + ن) ما = ن اے$$

پر واقع ہوتا ہے۔

۱۳۔ دو قوتیں ہیں جن میں سے ایک قوت خط ما = و، ی = کے ساتھ اور دوسری لا = و، ی = ج کے ساتھ عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ جیسے قوتیں بدلتی ہیں اُن کے

مساوی رینج کا محور سطح (لا + ما) ی = ج ما مرسم کرتا ہے۔

۱۴۔ ایک قوت نقطہ (و، و) پر محوری کے متوازی عمل کرتی ہے اور ایک اور مساوی قوت محوری پر عمود وار نقطہ (و، و) پر عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ اس

$$نظام کا مرکزی محور سطح ی (لا + ما) = (لا + ما - و) لا$$

پر واقع ہوتا ہے۔

۱۶۔ ایک قوت ق محوری کے ساتھ عمل کرتی ہے اور ایک اور قوت م  $\times$  ق ایک ایسے خط میں عمل کرتی ہے جو لا محور کو مبداء سے فاصلہ ج پر کاٹتا ہے اور سطح ماسی کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ جیسے یہ خط مستقیم محور لا کے گرد گھومتا ہے قوتوں کا مرکزی محور سطح

$$\{m^2 y^2 + (m^2 - 1) a^2\} \{j - la\} = l^2 y^2$$

مرسم کرتا ہے۔

— ایک ناقص نما میں سے صدی ستویں کے ذریعہ ایک شن کا ٹاگیا ہے۔ اس شن کے ہر ایک نقطہ ن پر عماد کی سمت میں ن پر کی سطح کے ایک چھوٹے جزو کے متناسب ایک قوت عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ قوتیں ایک واحد قوت کے مساوی ہیں جو خط مستقیم

$$a(la - \frac{4}{33}) = b(1 - \frac{2}{33})$$

پر عمل کرتی ہے جہاں ۲، ۱، ۲، ۱ ج ناقص نما کے محور ہیں۔

۱۷۔ ایک زاہد نما  $\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{b} - \frac{y^2}{c} = 1$  کے کمونوں کے ایک ہی نظام کے ساتھ مساوی گھائی گ والے بیچ عمل کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ بیچ ایک واحد قوت میں تحویل ہو سکیں گے بشرطیکہ ان کے مرکزی محور مخروط

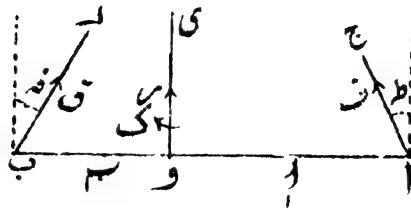
$$(g + \frac{b \times 1}{c})(la + (g + \frac{c \times 1}{b})a + (g - \frac{b \times 1}{c})y = 0$$

کے کمونوں کے متوازی ہوں۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ قوتوں کا کوئی نظام دو قوتوں میں لا متناہی طریقوں سے تحویل ہو سکتا ہے اور ان قوتوں سے جو جہاز سطحی بننا ہے اُس کا حجم ہمیشہ مستقل رہتا ہے۔

فرض کرو کہ معلومہ نظام کا مرکزی محور و سی ہے اور حسب معمول سرا اور ک اس نظام کے بیچ کی حاصل قوت اور جفت ہیں۔

و میں سے وی پر عمود و ارا ایک خط کھینچو اور اس خط پر و کے مخالف جانبوں



میں دو نقطے 'ا' اور 'ب' کو اور فرض کرو کہ  $و = ا$  اور  $و = ب$  = ب  
فرض کرو کہ معلومہ نظام، 'ا' میں سے گزرنے والی ایک قوت 'ف' اور 'ب'  
میں سے گزرنے والی ایک قوت 'ق' کے مساوی ہے اور ان کے خط عمل 'و' و 'ی'  
کے متوازی 'ا' اور 'ب' میں سے گزرنے والے خطوں کے ساتھ متقابل سمتوں  
میں بالترتیب زاویے طہ اور فہ بناتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ طہ اور فہ کے ناپنے کی  
مشبت سمتیں متقابل ہیں۔

تب 'ف' اور 'ق' کے حاصل 'و' کی سمت میں اور اس پر عمود واز سمت  
میں بالترتیب سہا اور صفر ہو گئے اور اسی طرح سے ان خطوں کے گرد حاصل جہنت  
بالترتیب ک اور صفر ہو گئے۔

(۱) اس لئے  $س = ف \times ط + ق \times جم$  فہ

(۲)  $ف \times جب ط - ق \times جب ف$  " " " "

(۳)  $ک = ف \times جب ط \times ا + ق \times جب ف \times ب$  " " " "

(۴) اور  $ف \times جم ط \times ا - ق \times جم ف \times ب$  " " " "

(۱) اور (۴) سے  $\frac{ف \times جم ط}{ب} = \frac{ق \times جم ف}{ا} = \frac{س}{ا + ب}$  " " (۵)

(۲) اور (۳) سے  $ف \times جب ط = ق \times جب ف = \frac{ک}{ا + ب}$  " " (۶)

$$\text{اس لئے } \frac{ک^۱ + س^۱}{۱ + س^۱} = \frac{ک^۲ + س^۲}{۱ + س^۲} \text{ اور } \frac{ک^۳ + س^۳}{۱ + س^۳} = \frac{ک^۴ + س^۴}{۱ + س^۴}$$

$$\text{سے } \frac{ک}{۱ + س} = \frac{ک}{۱ + س} \text{ اور } \frac{ک}{۱ + س} = \frac{ک}{۱ + س}$$

۱ اور ۲ کی خواہ کچھ ہی قیمتیں ہوں ہیں ف، ق، ط، اور ق کی حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اس سے پتہ چلا کہ انفر و فہ درست ہے۔

نیز (۵) اور (۶) سے

$$ک س^۱ = (۱ + س^۱) \times ف \times ق \text{ جب } ط \text{ جم } ف \text{ اور}$$

$$ک س^۲ = (۱ + س^۲) \times ف \times ق \times ط \text{ جب } ف$$

اس لئے جمع کرنے سے ک س^۱ = ف × ق × (۱ + س^۱) جب (ط + ف) = (۵)

فرض کر کے ا ج اور ب د بالترتیب ف اور ق کی مقدار کو تعبیر کرتے ہیں تب

چار سطحی ا ج ب د کا حجم

$$= \frac{۱}{۳} \Delta \text{ ا ب ج } \times (۵) \text{ سے } \Delta \text{ ا ب ج پر عمو}$$

$$= \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \text{ا ب} \times \text{ا ج} \times \text{ب د جب } (ط + ف)$$

$$= \frac{۱}{۲۴} \times ف \times ق \times (۱ + س^۱) \times (ط + ف) = \frac{۱}{۲۴} \times ک س^۱ \text{ مساوات (۷) سے}$$

یعنی چار سطحی کا حجم مستقل ہے۔

مشتمل صورت۔ اگر قوتیں ف اور ق مساوی ہوں اور مرکزی محوروں سے

مساوی فاصلوں پر عمل کریں تو مساواتوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) سے ط = ف یعنی قوتیں مرکزی محور کے ساتھ مساوی زاوے بناتی ہیں اور

$$س = ۲ ف جم ط \text{ اور } ک = ۲ ف ا جب ط$$



$$\therefore \text{ف} = \frac{1}{4} \left[ \frac{\text{ک}}{2} + \frac{\text{ک}}{2} \right] \text{ اور مسطہ} = \frac{\text{ک}}{\text{سرا}} \text{ ک}$$

اگر ہم علاوہ ازیں  $\frac{1}{4} = \frac{\text{ک}}{\text{سرا}}$  فرض کریں تو ف = سرا اور طہ = ۹۰  
۱۹۳۔ دو معلومہ پنوں کا حاصل بیچ معلوم کرنا۔

فرض کر کہ ایک بیچ (سرا، ک) کا محور لاج ہے اور دوسرے بیچ (سرا، ک)

کا محور لب د ہے۔ نیز فرض کر کہ لب (ج، ب) ان کے محوروں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے اور ان کا درمیانی زاویہ عمہ ہے۔

فرض کر کہ مطلوبہ مرکزی محوری لب پر عمود ہے اور لب کو دو حصوں لا اور ج۔ ل میں تقسیم کرتا ہے اور لاج کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے یعنی لب د کے ساتھ زاویہ (عمہ - طہ) بناتا ہے نیز فرض کر کہ مفروضہ مرکزی محور کی قوت اور جنت بالترتیب سرا اور ک ہیں۔

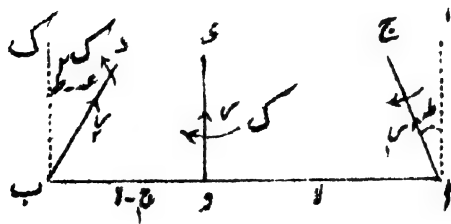
تب حسب شرائط سوال

$$\text{سرا} = \text{سرا} \text{ حجم طہ} + \text{سرا} \text{ حجم (عمہ - طہ)} \quad (۱)$$

$$۰ = \text{سرا} \text{ جب طہ} - \text{سرا} \text{ جب (عمہ - طہ)} \quad (۲)$$

$$\text{ک} = \text{ک} \text{ حجم طہ} + \text{ک} \text{ حجم (عمہ - طہ)} + \text{سرا} \text{ جب طہ} \times \text{لا} + \text{سرا} \text{ (ج - لا) جب (عمہ - طہ)} \quad (۳)$$

$$\text{اور} ۰ = \text{ک} \text{ جب طہ} - \text{ک} \text{ جب (عمہ - طہ)} - \text{سرا} \text{ حجم طہ} \times \text{لا} + \text{سرا} \text{ (ج - لا) حجم (عمہ - طہ)}$$





$$\frac{\text{سما ج (سما ججم عه + سما) - (سما ک - سما ک) جب عه}}{\text{سما ج (سما + سما ججم عه) + (سما ک - سما ک) جب عه}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{جسم طه}}{\text{جسم (عه - طه)}} = \frac{\text{سما + سما ججم عه}}{\text{سما ججم عه + سما}}$$

۱۹۴۔ دو معلومہ قوتیں سما اور سما ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ عه بناتی ہیں، ان کا حاصل پتہ معلوم کرو۔

یہ دفعہ ماقبل کی ایک خاص صورت ہے جبکہ ک اور کم دونوں صفر ہوں۔ اس لئے

$$\text{سما} = \text{سما} + \text{سما} + \text{سما} + \text{سما ججم عه}$$

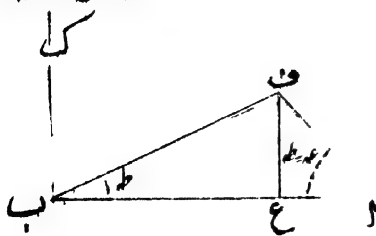
ک سما = سما سما ج جب عه

$$\frac{\text{لا}}{\text{ج - لا}} = \frac{\text{سما (سما ججم عه + سما)}}{\text{سما (سما + سما ججم عه)}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{جسم طه}}{\text{سما ججم عه}} = \frac{\text{جسم طه}}{\text{سما + سما ججم عه}} = \frac{\text{لا}}{\text{سما + سما ججم عه}}$$

$$\text{پس } \frac{\text{جسم طه}}{\text{جسم (عه - طه)}} = \frac{\text{سما + سما ججم عه}}{\text{سما ججم عه + سما}}$$

۱۹۵۔ دو قوتیں سما اور سما نقاط ل اور ب پر اج د ب کی سمتوں میں عمل کرتی ہیں ان کا مرکزی محور معلوم کرنے کا بندہ سی عمل دریافت کرو۔



فرض کرو کہ دو قوتیں سما اور سما ہیں جن میں سے سما ب د کے ساتھ عمل کرتی ہے اور سما نقطہ ب پر ل ج کے

متوازی عمل کرتی ہے، نیز ان کے حاصل سرا کی سمت سب ک ہے اور یہ سہارا اور سہارا کی سمتوں کے ساتھ بالترتیب زاویے ط اور ع - ط بناتی ہے۔ پس سب ک دفعہ ۱۹۳ کی شکل کی مانند مرکزی محور کے متوازی ہے۔ سطح مستوی ک ب ل میں ب اور ل پر > (ب ف = ط اور > ب ل ف = ع - ط بناؤ تب

ف ع جو ل ب پر عمود وار ہے مرکزی محور ہوگا اور حاصل بیچ کا جنت = ک ع ف کیونکہ دفعہ ماقبل کی مساواتوں سے ہم آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں

$$\begin{aligned} \text{لا} &= \frac{\text{جب ط جم (ع - ط)}}{\text{جم ط جب (ع - ط)}} \times \frac{\text{ل ف}}{\text{ب ف}} = \frac{\text{جم ط جب (ع - ط)}}{\text{جم ط}} \times \frac{\text{ل ف}}{\text{ب ف}} \\ \text{ب ج} &= \frac{\text{جم ط جب (ع - ط)}}{\text{جم ط}} \times \frac{\text{ل ف}}{\text{ب ف}} = \frac{\text{جم ط جب (ع - ط)}}{\text{جم ط}} \times \frac{\text{ل ف}}{\text{ب ف}} \\ \text{پس ع ف مرکزی محور ہے} \\ \text{نیز دفعہ ماقبل کی رو سے} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ک} &= \frac{\text{سہارا سہارا ج جب ع}}{\text{سہارا}} = \frac{\text{سہارا ج جب ط ج جب (ع - ط)}}{\text{سہارا ج جب ع}} = \frac{\text{سہارا ج جب ط ج جب (ع - ط)}}{\text{سہارا ج جب ع}} \\ \text{ع ف} &= \frac{\text{سہارا ج جب ط ج جب (ع - ط)}}{\text{سہارا ج جب ع}} \end{aligned}$$

یعنی ک = سرا × ع ف

## مثالیں

۱۔ اگر ف اور ق دو غیر متقاطعی قوتیں ہوں جن کی سمتیں ایک دوسرے پر عمود وار ہوں تو ثابت کرو کہ مرکزی محور سے ان قوتوں کے خطوط عمل کے فاصلے نسبت ق : ف = ۲ : ۱ میں ہیں۔

۲۔ ثابت کرو کہ قوتوں کا کوئی نظام لامتناہی طریقوں سے دو مساوی قوتوں میں تقبیل ہو سکتا ہے جن کے درمیان کوئی معلومہ زاویہ بنے۔ اگر وہ میانی زاویہ معلوم ہو تو قوتوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرو۔

۳۔ دو قوتیں ف اور ق ایسی ہیں کہ ان کا مرکزی محور بالفاظ مقام کے معلوم ہے اور ف کا خط عمل معلوم ہے۔ ثابت کرو کہ ق کے خط عمل کا ضربی ایک محزوظی بنا ہے۔

۴۔ دو قوتیں ایک معلومہ نظام (ک، سرا) کے معادل ہیں اور ان کے درمیان معلومہ زاویہ ۲ ع بنتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ

۲۔ گ۔ مم۔ ہے۔ ثابت کر دو کہ ہر ایک قوت  $\frac{1}{2}$  سے قطعہ کے مساوی ہے۔

۵۔ ایک منتظم چار سطحی کے کناروں کے ساتھ قوتیں اس طرح عمل کرتی ہیں: ف اب ج اور د کے ساتھ، ق اب ج اور د ب کے ساتھ، س ا ب اور د ج کے ساتھ۔ ثابت کر دو کہ معادل بیچ کی گھائی چار سطحی کے کنارہ کے  $\frac{1}{2}$  کے مساوی ہے۔

(منتظم چار سطحی کے مقابل کے کناروں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹے فاصلے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔)

۶۔ ایک منتظم چار سطحی [ ا ب ج د ] سینہ میں یکساں بیچ  $\frac{1}{2}$  ہے۔ اس کے کناروں کے ساتھ ایک ہی گھائی گ۔ کے بیچ عمل کرتے ہیں۔ اگر ا ب ا د ج کے ساتھ عمل کرنے والے بیچوں کی حدیں مساوی ہوں اور اسی طرح ب ج ا د اور د ب ا ج کے ساتھ عمل کرنے والے بیچوں کی حدیں مساوی ہوں تو ثابت کر دو کہ معادل بیچ کی گھائی گ +  $\frac{1}{2}$  ہوگی۔

۷۔ قوتوں کا ایک نظام ہے جس کے مرکزی محور کو ایک خط  $\theta$ ۔ تنظیم علی انقوائم قطع کرتا ہے ثابت کر دو کہ اس خط مستقیم پر کے مختلف نقطوں پر صدر معیار اڑنے کے محور جو سطح مرکز میں دہ زائدی مکانی مناسب ہے۔

[ ایک معلوم خط مستقیم کو لا کا محور مانو۔ معلوم نظام (س، ا، ک) کے مرکزی محور کو سی کا محور اور ان دونوں پر جو خط عمود وار ہے اسکو نا محور مانو، تب نقطہ (لا، ا، ۰) پر قوت س، ا، ک کے متوازی ہے اور جنت  $\theta$  ہے جو س کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بنا تا ہے اور ولا پر عمود وار ہے اس طرح کہ ک =  $\theta$  جب  $\theta$  اور  $\theta$  جب  $\theta$  = س، لا، تب اگر

$\theta$  کے محور پر کوئی نقطہ لا، ا، سی ہو تو  $\frac{1}{2}$  = مس  $\theta$  =  $\frac{1}{2}$  س، لا، پس مطلوب طریق زائدی مکانی مناسب لای = ک ما ہوگا ]

۸۔ ایک معلوم خط مستقیم پر کے سب نقطوں کے لئے قوتوں کے ایک معلوم نظام کے

متناظر صدر معیار اثر کے محور کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ یہ محور ایک زائدی مکانی نما پر واقع ہیں اور اُن کے سرے ایک اور معلومہ خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

معلومہ خط مستقیم کو و لا فرض کرو اور مرکزی محور اور و لا کے عمودی خط کو وی لا و تب صریحاً وی کے ساتھ کوئی ترکیبی قوت نہیں ہے اور نہ وی کے گرد کوئی ترکیبی جنت ہے۔

تب محوروں کے ساتھ عمل کرنے والی ترکیبی قوتیں (لا، ما،) ہیں اور ترکیبی جنت (ل، ہا،) ہیں، پس نقطہ (سا،) پر ترکیبی جنت لی، ہا، اور۔ سا، ما، ہیں (دفعہ ۱۹۰)

پس وہاں صدر معیار اثر کے محور کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا} - \text{سا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ما}}{\text{ہا}} = \frac{\text{وی}}{\text{سا، ما}}$$

سا کو ساقط کرنے سے ہیں زائدی مکانی مساوات  $\frac{\text{ل}}{\text{ہا}} = \text{لا} + \frac{\text{ما}}{\text{سا، وی}}$  حاصل ہوتی ہے۔

نیز اس محور کے سرے کے محدود (لا، ما، وی) مساواتوں

$$\text{لا} = \text{سا} + \text{ل}، \text{ما} = \text{ل}، \text{وی} = - \text{سا، ما}$$

سے حاصل ہوتے ہیں جہاں کہ کوئی مستقل ہے۔

سا کو ساقط کرنے سے ہیں لا، ما، وی کا طریق ایک خط مستقیم حاصل ہوتا ہے۔

۹۔ دور بیچ ہیں جن کی گھائیاں گ، اور گ، ہیں اور جن کے محوروں کا درمیانی فاصلہ ۱ ہے۔ اگر حاصل بیچ کی گھائی گ ہو اور اس کا محور ترکیبی بیچوں کے محوروں سے

متساوی الفضل ہو تو ثابت کرو کہ اُن کا درمیانی زاویہ ہوگا  $\frac{1}{2}(\text{گ} - \text{گ} - \text{گ} - \text{گ})$

۱۰۔ تین معلومہ بیچ ہیں جن کے محور مشترک اور ایک دوسرے پر علی القوائم ہیں ان بیچوں پر

گ، گ، گ، گ، گھائیوں والے بیچ عمل کرتے ہیں جن کا حاصل ایک معلومہ گھائی گ

ہوے بیچ پر عمل کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس بیچ کا طریق یہ زائدی نما ہے

(گ - گ) لا + (گ - گ) ما + (گ - گ) وی + (گ - گ) ل = ۰



اب دفعہ اہ کی رو سے یہ توازی قوتیں اور رد کے ساتھ عمل کرنے والی قوت سر  
ل کر ایک قوت سر کے مساوی ہیں جو رد کے متوازی ایک ایسے خط ہم (ن) کے  
ساتھ عمل کرتی ہے کہ

$$\text{دہم} = (\text{گ} - \text{گ}) \text{ جب } \text{ط} \text{ جم } \text{ط} \dots \dots \dots (۲)$$

جنت (۱) کے محور کو ہم (ن) پر منتقل کرنے سے ہمیں ایک ایسے حاصل ہوتا ہے  
جس کا محور ہم (ن) ہے اور جس کا شعاع اثر اور قوت بالترتیب

$$(\text{گ} - \text{جم} \text{ط} + \text{گ} \text{ جب } \text{ط}) \text{ میں اور یہاں علیہ جس کی گھائی}$$

$$\text{گ} = \text{گ} - \text{جم} \text{ط} + \text{گ} \text{ جب } \text{ط} \text{ ہے}$$

اب خط ہم (ن) پر کوئی نقطہ (لا، ما، ی) نیا جاسے تو نتیجہ (۲) کی رو سے

$$y = (\text{گ} - \text{گ}) \frac{\text{لا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

یعنی ہم (ن) سطح (لا، ما، ی) = (گ - گ) لا  
پر واقع ہوتا ہے۔

اس سطح کو اسطوانہ بنا کہتے ہیں۔ نیز گ اور گ کو اس کی سرگرا بناتے ہیں۔

اس سطح کی مساوات دفعہ ۱۰ سے فوراً نکل سکتی تھی کیونکہ نظام کے مرکزی محور کی

مساواتیں ہیں

$$\frac{\text{گ} - \text{لا} + \text{ی} \text{ ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{گ} - \text{ما} - \text{ی} \text{ لا}}{\text{ما}} = \frac{-\text{لا} \text{ ما} + \text{ما} \text{ لا}}{\dots}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے  $y = (\text{لا} + \text{ما}) = (\text{گ} - \text{گ}) \text{ لا} \text{ ما}$

اور لا ما = ما لا

لا اور ما کو سافط کرنے سے ہمیں مرکزی محور کا طریق ملتا ہے

$$(\text{لا} + \text{ما}) = y = (\text{گ} - \text{گ}) \text{ لا} \text{ ما}$$





اور  $\Delta = (گ - گ_1)$  حجم ط جب ط

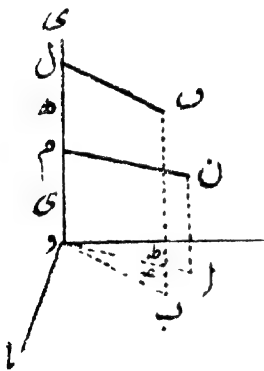
ان سے حاصل ہوتا ہے  $گ_1 = گ - \Delta$  مس ط اور  $گ_1 = گ + \Delta$  مم ط

نیز  $\Delta =$  سرجم ط اور  $\Delta =$  سر جب ط

اس لئے اگر سر اور گ کی قیمتیں معلوم ہوں تو ہمیں  $\Delta$  اور ط کی کسی معلوم قیمتوں کے جواب میں  $\Delta$ ، گ اور ما، گ کی قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

۱۹۹۔ معلومہ بیچوں پر کوئی دو ریج ایک اور صرف ایک ہی اسطوانہ نما کا تعین کرتے ہیں۔

فرض کر دو کم ن اور ل ق دو ریجوں کے محور ہیں، گ اور گ<sub>1</sub> ان کی گھائیاں ہیں اور ان کے درمیان زاویہ عم ہے اور چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ م ل طول میں ہ کے مساوی ہے۔



اب اگر ہم م ل پر ایک نقطہ و اور دو علی القوائم خطوط ولا و ما ایسے معلوم کر سکیں کہ جب ہم ان ریجوں کو ولا اور و ما کے گرد تحلیل کریں تو ولا کے گرد دو ترکیبی ریجوں کی گھائیاں باہم مساوی ہوں اور نیز و ما کے گرد ترکیبی ریجوں کی گھائیاں

مساوی ہوں تو ہم نے مسئلہ کو ثابت کر لیا۔ کیونکہ ولا کے گرد دو ریج ایک ریج میں ترکیب پاسکتے ہیں اور اسی طرح سے و ما کے گرد دو ریج ایک ریج میں ترکیب پاسکتے ہیں اور حسب دفعہ ۱۹۹ ان دو حاصل ریجوں سے ایک اسطوانہ نما حاصل ہوتا ہے۔ پس ہم فرض کرتے ہیں کہ م ن کے گرد کا ریج ولا اور و ما کے گرد دو

ریچوں کے سادی ہے جن کی گھائیاں گہ اور گہا میں جہاں وم = ی  
اور زادی لاؤل = طہ

اور اسی طرح ق کے لئے جہاں لاوب = ط + ع  
تب حسب دفعہ ۱۹۶

$$g = g + \frac{g}{m} + \frac{g}{n} = g + \frac{g}{m+n} \quad (1)$$

۵ = (گ-گ) جم ط جب ط =  $\frac{گ-گ}{۲}$  جب ۲ ط ... .. (۲)

گ = گ + جم (ط + عم) + گ + جب (ط + عم)

$$(3) \quad \dots \dots \dots (2p+2e) \quad \frac{g-g}{2} + \frac{g+g}{2} =$$

اور ی + م = (گ-گ) جم (ط+ع) جب (ط+ع)

$$= \frac{g - g}{2} \text{ لاجب } (2 + 2) \dots (2) \dots (2)$$

(۵) اس لئے گ + گ = گ، گ + گ + گ = (گ - گ) جمعه جم (ط + ع) .. (۵)

گ-گ = (گ-گ) جب عجب (۲ ط + ع) " " " (۶)

$$\text{اور } \frac{g-g}{2} = [\text{جب } (2\text{ ط} + 2\text{ ع}) - \text{جب } 2\text{ ط}]$$

۱۰۰ = (گ-گ) جم (ط+ع) جب و .. .. (۷)

(۶) اور (۷) سے  $\frac{g \cdot g}{h} = (2 + 2) = 4$  " " " " (۸)

(۵) اور (۶) سے

گ + گ = گ + گ - (گ - گ) مم عم (ط + ع) = گ + گ + ہ مم عم  
 اور گ - گ = (گ - گ) قم عم (ط + ع) = ہ + (گ - گ) قم عم  
 ان مساواتوں سے گ اور گ حاصل ہوتے ہیں۔  
 نیز (۲) سے

$$y = \frac{1}{2} - \frac{g - g}{\text{جب عم جب (ط + ع)}} \text{ جب ط}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{g - g}{\text{جب عم}} [\text{جم عم - جب عم مم (ط + ع)}]$$

$$= \frac{1}{2} [(g - g) \text{ مم عم - ہ}]$$

ان قیمتوں سے ولا اور واما کے محل واحد طور پر متعین ہو جاتے اور ان کے گرد کے ریچ  
 بھی متعین ہو جاتے ہیں۔

۲۰۰ - مقادیر بالا حسب دفعہ قبل معلوم کر لینے کے بعد اگر م ن اور ل ق کے گرد  
 ریچوں کے حدیں سر اور سر ہوں تو یہ دو ریچ معا ول ہیں، قوتوں  
 سہا جم ط + سر جم (ط + ع)، ولا کے ساتھ  
 سر جب ط + سر جب (ط + ع)، واما کے ساتھ  
 کے اور جفتوں

$$g = [\text{سہا جم ط + سر جم (ط + ع)}] \text{ ، ولا کے گرد}$$

$$g = [\text{سر جب ط + سر جب (ط + ع)}] \text{ ، واما کے گرد}$$

کے سرچا دفعہ ۱۹۷ کے مطابق یہ قوتیں اور جفت ایک ایسے ریچ میں ترکیب پا جاتے ہیں جو  
 ذیل کے اسطوانہ نما کے ایک بیج کے گرد عمل کرتا ہے

ی (لا + آ) = (گ، - گ) لا = لا ماقم ھ۔ (گ، - گ) ۲

مشق۔ ایک ریج کی گھائی ۱ اور خط عمل ۱ = ۲، ی = ۳ ہے اور ایک دوسرے ریج کی گھائی ۴ اور خط عمل (۲ - ۱) = ۳ = ۴ - ۱ = ۳، ی = ۴ ہے ان سے ایک اسطوانہ نما متعین ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی صدر گھائیاں ۳ - ۲ = ۱، ۲ = ۳ اور ۳ + ۲ = ۵ ہیں اور اس کے صدر محوروں کی مساواتیں ہیں ۲ - ۱ = (۳ + ۲) (۲ - ۱) (۳ - ۱)

۲۰۱۔ ایک ہی اسطوانہ نما کے پینچوں پر کے پینچوں کا حاصل ریج۔ اسطوانہ نما کی صدر گھائیاں گ، ۱ اور گ، ۲ ہیں۔ اب اس ریج پر غور کرو جس کی حد ص ص ہے اور جس کی گھائی ایسی گھائی ہے جس اس اسطوانہ پر محور و لا کے ساتھ زاویہ بنا نے والے ریج کے لئے مناسب ہے۔ وہ ۱۹۶ کی رو سے یہ ریج ان دو پینچوں کے معادل ہے

ایک ریج (س، جب ط، گ، ۱) محور و لا کے گرد

اور دوسرا ریج (س، جب ط، گ، ۲) محور و لا کے گرد

اس لئے اگر ہر ایک معلوم ریج کو و لا اور و ما کے گرد پینچوں میں توہیل کیا جائے تو یہ سب ریج قوتوں اور جفتوں کے حسب ذیل نظام کے معادل ہو جائیں گے:-

لا = ۳ (س، جب ط)

ما = ۳ (س، جب ط)

ل = ۳ (گ، ۱) (س، جب ط) = گ، ۱

م = ۳ (گ، ۲) (س، جب ط) = گ، ۲

یعنی و لا کے گرد ریج (لا، گ، ۱) اور و ما کے گرد

ریج (ما، گ، ۲)۔

ان ریجنوں کی گھائی دہی ہے جو اسطوانہ نما کی صدر گھائیاں ہیں۔ اس لئے  
یسبل کر ایک رینج (س گ س) کے متبادل ہونگے جو اسطوانہ نما کے محور لا  
سے زاویہ خم بنانے والے بیچ پر عمل کرے گا جہاں

$$\text{س ف} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{ح (س ج ب ط)}}{\text{ح (س ج م ط)}}$$

$$\text{س} = \text{لا} + \text{ما} = \text{ح (س ج م ط)} + \text{ح (س ج ب ط)} \\ \text{اور گ} = \text{گ} + \text{جم ف} + \text{ج ب ف}$$

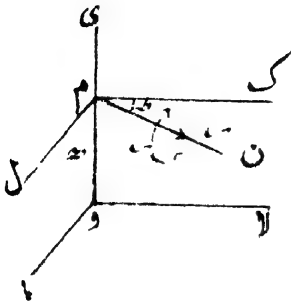
۲۰۲۔ اوپر جو کچھ بیان ہوا اُس سے ظاہر ہے کہ ایک ہی اسطوانہ نما کے بیچوں  
پر کے رینج متبادل میں ہونگے جبکہ ان کی قوتوں کو ان کی سمتوں کے متوازی ایک  
ہی نقطہ پر منتقل کر دینے پر یہ قوتیں متبادل ہو جائیں گی کیونکہ اس صورت میں لا  
اور ما دونوں صفر ہونگے۔

بالخصوص ایک ہی اسطوانہ نما کے بیچوں پر کے تین رینج متبادل ہوں گے  
اگر ہر ایک کی حدت باقی دو کے درمیانی زاویہ کی جیب کے متناسب ہو۔  
۲۰۳۔ ایک رینج کی قوت س اور معلومہ بیچ کے گرد اس کی گھائی گ ہے ثابت کرو  
کہ اگر جسم کو گ گھائی والے ایک دوسرے بیچ کے گرد زاویہ ص ف سے ہیں سے  
مردنا جائے تو اس رینج کی قوتوں کا کام ہوگا

$$\text{س ف سے } \{ \text{گ} + \text{گ} \} \text{ جم ط} - \text{ح ج ب ط}$$

جہاں ط دونوں بیچوں کے محوروں کا درمیانی زاویہ ہے اور ہ اُن کے درمیان  
چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے۔

فرض کرو کہ بیچ گ کا محور لا ہے، رینج کا محور م ن ہے اور ان کے  
درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ و م طول میں ہ ہے۔ ولا کے متوازی



م ک کھینچو اور م ک اور و م پر عمود  
م ل کھینچو۔ قوت سران دو قوتوں کے  
معا دل ہے قوت سرجم ط ، م ک  
کی سمت میں اور سر جب ط م ل کی سمت  
میں۔ جزو ترکیبی سرجم ط معا دل ہے ولا  
کے ساتھ قوت سرجم ط اور و م کے  
گرد جفت سرجم ط  $\times$  ہ کے۔

جزو ترکیبی سر جب ط معا دل ہے و م کے ساتھ قوت سر جب ط کے اور  
ولا کے گرد جفت۔ سر جب ط  $\times$  ہ کے۔

م ن کے گرد جو جفت گ  $\times$  سر عمل کرتا ہے وہ ان دو جفتوں کے  
معا دل ہے گ  $\times$  سرجم ط خط م ک کے گرد اور گ  $\times$  سر جب ط خط م ل  
کے گرد۔ ان کے محوروں کو ولا اور و م پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔  
پس معلومہ پنج معا دل ہے ان اجزا کے

ایک قوت	سرجم ط ،	ولا کے ساتھ
ایک قوت	سر جب ط ،	و م کے ساتھ
ایک جفت	سر (گ جم ط - ہ جب ط) ،	ولا کے گرد
ایک جفت	سر (گ جب ط + ہ جم ط) ،	و م کے گرد

اب جسم کا ہٹاؤ مشتعل ہے ولا کے گرد ایک زاویہ ہٹاؤ سف سے کے اور ولا کے  
ساتھ ایک خطی ہٹاؤ گ  $\times$  م ف سے کے۔

زاویہ ہٹاؤ کی وجہ سے جفتوں کا کام ہے سر (گ جم ط - ہ جب ط) سف سے  
(دیکھو دفعہ ۹۷) اور قوتوں کا کام صفر ہے۔

خطی ہٹاؤ کی وجہ سے جفتوں کا کام صفر ہے اور قوتوں کا کام جسم ط × گ مف سے ہے  
پس خفیف سے ہٹاؤ میں قوتوں کا مجموعی کام

$$= \text{سرمفت سے } (گ + گ) \text{ جسم ط} - \text{ہ جب ط}$$

اگر گ اور گ کو باہم بدل دیا جائے تو اس کام میں کوئی فرق نہیں آتا۔ پس  
اگر ہمارے پاس بیج والا کے گرد رنج (س، گ، س) ہوتا اور جسم کو م ن محور پر  
گھائی گ والے بیج کے گرد خفیف سے زیادہ مف سے میں سے گھمایا جاتا  
تو بھی اتنا ہی کام ہوتا۔

۲۰۴۔ سوہوم کام کے اصول سے ظاہر ہے کہ اگر ایک جسم صرف محور والا کے بیج پر  
حرکت کر سکتا ہے اور اس پر بیج م ن کا ایک رنج عمل کرے تو جسم متبادل میں ہوگا اگر  
(گ + گ) جسم ط۔ ہ جب ط =

دو بیج جو اس شرط کو پورا کرتے ہیں مشکانی بیج کہلاتے ہیں۔ پس مشکانی بیجوں سے وہ  
بیج مراد ہیں کہ اگر کسی ایک بیج کے گرد کسی حدت اور مناسب گھائی والا بیج جسم پر  
عمل کرے اور جسم صرف دوسرے بیج پر حرکت کر سکتا ہو تو جسم متبادل رہیگا۔  
اوپر کی شرط سے ظاہر ہے کہ دو بیج جن کے محور قطع کرتے ہوں یعنی ہ =  
مشکانی ہونگے اگر ان کے محور علی القوائم ہوں یا اگر ان کی گھائیاں مساوی اور علامت  
میں مختلف ہوں۔

۲۰۵۔ اگر کوئی بیج جب ہر دو بیجوں عہ اور ب کے مشکانی ہو تو یہ عہ اور ب سے متعین  
ہونے والے اسطوانہ نما پر کے ہر بیج ل کے مشکانی ہوگا۔

دفعہ ۲۰۶ سے ظاہر ہے کہ چونکہ عہ ۱ ب اور لہ ایک ہی اسطوانہ پر کے بیج ہیں  
اسلئے لہ پر کا کوئی رنج عہ اور ب کے گرد دور بیجوں کے معادل ہوگا اگر رنج لہ کی حدت،  
رچوں عہ اور ب کی حدتوں کے اجزائے ترکیبی کے معادل ہو رنج لہ کی بجائے عہ  
اور ب کے گرد یہ دو ترکیبی رنج لگاؤ۔

چونکہ بیج جب اور عہ مشکانی ہیں اس لئے عہ کے گرد عمل کرنے والے رنج کا



سوہوم کام جب کے گرد کسی ہٹاؤ کے لئے صفر ہوگا۔ اسی طرح سے یہ کے گرد عمل کرنے والے ریچ کا سوہوم کام بھی جب کے گرد کسی ہٹاؤ کے لئے صفر ہوگا۔ اس لئے ریچ لہ کا مجموعی سوہوم کام جب کے گرد کسی ہٹاؤ کے لئے صفر ہوگا۔ پس لہ اور جہ متکا فی ہیں۔

۲۰۶۔ صفری خطوط اور صفری مستوی سطحیں۔ فرض کرو کہ کسی سبدا یا اساسی نقطہ و کے متناظر قوتوں کے نظام کی حاصل قوت سر اور حاصل جنت ث ہے۔ جنت ث کے محور پر کوئی عمودی خط و میں سے کھینچو۔ تب اس خط کے گرد نظام کی تمام قوتوں کے معیار اثر دں کا جبر یہ مجموعہ صفر ہوگا کیونکہ اس محور کے گرد ث کا جزو ترکیبی کچھ نہیں ہے اور سر اس خط سے ملتا ہے۔

اس بنا پر اس خط کو صفری خط کہتے ہیں اور اس کے طریق کو یعنی و میں سے ث کے محور پر عمود وار خط کے طریق کو و کا صفری مستوی کہتے ہیں۔ نیز نقطہ و کو سطح مستوی کا صفری نقطہ کہتے ہیں۔

۲۰۷۔ کسی محوروں ولا، واما، وی کے لحاظ سے کسی معلومہ نقطہ (ف، گ، ہ) کے صفری مستوی کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ولا، واما، وی کے ساتھ حاصل قوت کے اجزائے ترکیبی لا، ما، مے اور ان کے گرد حاصل جنت کے ترکیبی اجزاء لی، مر، ن ہیں۔ دہ ۹۰ کی رُود سے نقطہ (ن، گ، ہ) میں سے ولا، واما، وی کے متوازی خطوط کے گرد

لی۔ گ مے + ہ ما، مر۔ ہ لا + ن مے، ن۔ ف ما + گ لا جنت ہیں۔

اور یہ نقطہ (ن، گ، ہ) پر حاصل جنت کے محور کے سمتی جوب التمام کے تناسب ہیں لیکن حاصل جنت کا محور اس نقطہ پر صفری مستوی سطح کا عماد ہے۔ پس صفری مستوی سطح کی مساوات ہے

(لا - ف) (لی - گ مے + ہ ما) + (ا - گ) (مر - ہ لا + ف مے)

+ (می - ہ) (ن - ف ما + گ لا) = ۰

یعنی لا (ل-گ + مے + ما) + (م-ہ + لا + ف + ے)

+ ی (ن- ف + ما + گ + لا) = ن + ل + گ + م + ہ + ن ... (۱)

برعکس ازیں اگر ہم سطح مستوی

ل + لا + م + ما + ن ی = ا - - - - - (۲)

کا صفری نقطہ معلوم کرنا چاہتے ہیں تو فرض کرو کہ مطلوبہ نقطہ ہے  
(ف، گ، ہ)

اب نقطہ (ف، گ، ہ) سطح مستوی (۲) پر واقع ہے - اس لئے  
مساد اتوں کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ف}}{\text{گ}} = \frac{\text{ن} - \text{م} + \text{ن}}{\text{ل} - \text{م} + \text{ن}} = \frac{\text{ف}}{\text{گ}}$$

$$\frac{\text{ل} - \text{م} + \text{ن}}{\text{ل} - \text{م} + \text{ن}} = \frac{\text{ف}}{\text{گ}}$$

جس سے مستوی سطح (۲) کا صفری نقطہ حاصل ہو سکتا ہے۔

۲۰۸ - وہ شرط معلوم کرو کہ خط مستقیم

$$\frac{\text{ل} - \text{ف}}{\text{م}} = \frac{\text{ما} - \text{گ}}{\text{ن}} = \frac{\text{ی} - \text{ہ}}{\text{ن}}$$

تو تین کے مذکورہ بالا نظام کا صفری خط ہو۔

محوروں کے متوازی (ف، گ، ہ) میں سے گزرنے والے خطوں  
کے گرد ترکیبی جفت یہ ہیں

ل-گ + مے + ما، م-ہ + لا + ف + ے، ن-ف + ما + گ + لا

اس لئے دئے ہوئے خط کے گرد جفت کا معیار اثر

$$= ل (ل - گ + م + ما) + م (م - لا + ن + ن) + ن (ن - ت + ما + گ لا)$$

اور یہ صفر ہوگا بشرطیکہ

$$لا (م - ن - گ) + ما (ن - ل - م) + م (ل - گ - م ن) = ل ل + م م + ن ن$$

یعنی اگر	لا	ما	م	ن
	ل	ل	م	ن
	ت	گ	م	ن

$$= ل ل + م م + ن ن$$

پس یہ اس امر کی شرط ہے کہ دیا ہوا خط مذکورہ بالا نظام کا صفری خط ہو۔

مربط۔ ثابت کر دو کہ قوتوں کے نظام کے کسی صفری خطوں میں سے چار خط کسی زائد منہا کے مکون ہوتے ہیں جن میں دو ایک نظام سے متعلق ہوتے ہیں اور دو دوسرے سے۔

$$\text{فرض کر دو کہ زائد منہا} = \frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۳} - \frac{م}{۴} = ۱ \text{ ہے}$$

اور فرض کریں کہ اس کے مرکز اور محوروں کے لحاظ سے قوتوں کا نظام

$$(لا، ما، م، ل، م، ن) \text{ سے تعبیر ہوتا ہے۔}$$

زائد منہا کے کسی مکون کی مساوات ہے

$$\frac{لا - اجم ط}{اجب ط} = \frac{ما - ب جب ط}{ب جم ط} = \frac{م}{ج}$$

وضفہ ماقبل کی رو سے یہ قوتوں کے نظام کا صفری خط ہوگا اگر

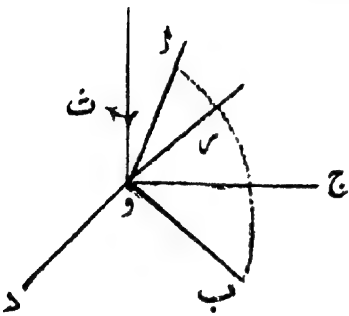
$$لا - (ب ج جب ط) + ما ج اجم ط + مے اب ل - (ب ج جب ط) + ن ج$$

$$\text{یعنی اگر ج ط } \left( \frac{ل}{ب} + \frac{لا}{و} \right) - \text{ج ط } \left( \frac{ما}{ب} + \frac{م}{ج} \right) = \frac{ن}{ج} - \frac{مے}{ب}$$

جس سے صریحاً بالعموم ط کی دو قیمتیں حاصل ہونگی۔ پس مکونوں کے ایک نظام کے دو مکون صفہی خطوط ہیں۔ اسی طرح سے مکونوں کے دوسرے نظام کے لئے۔

۲۰۹۔ ثابت کرد کہ قوتوں کا کوئی معلومہ نظام دو قوتوں میں تحویل ہو سکتا ہے جن میں سے ایک کسی معلومہ خط و لا کے ساتھ عمل کرتی ہے۔

و کو اساسی نقطہ یا سیدانا قرار



فرض کرو کہ س اور ث حاصل قوت اور جنت ہیں۔ و لا اور قوت سر کے خط عمل میں سے ایک سطح مستوی کھینچو جو جنت کی سطح عمل سے (یعنی سطح مستوی ج و د سے جو جنت کے محور پر عمود دار ہے) خط و ب میں ملے۔ س اور دو قوتوں میں تحلیل کرو جن میں

سے ایک ف، و لا کے ساتھ عمل کرے اور دوسری ث، و ب کے ساتھ عمل کرے۔

قوت ث، سطح مستوی ب و ج میں حاصل جنت کی دو قوتوں سے مل کر ایک قوت ث بن جائیگی جس کا خط عمل و ب کے متوازی ہوگا۔

اس سے ظاہر ہے کہ قوتوں کا کوئی نظام معادل ہوتا ہے ایک خاص قوت ث کے جو ایک معلومہ خط و لا کے ساتھ عمل کرتی ہے مع ایک اور قوت ث کے جو و کے صفہی سطح مستوی میں کسی جگہ پر عمل کرتی ہے۔

اس قسم کی قوتوں کو جیسی کہ ث اور ث ہیں مزدوج قوتیں کہتے ہیں اور ان کے خطوط عمل مزدوج خط کہلاتے ہیں۔

نقطہ و خط و لا پر خواہ کسی جگہ لیا جائے قوت ث ہر صورت میں اس نقطہ کے صفہی سطح مستوی میں عمل کرے گی۔ پس جیسے جیسے نقطہ و لا پر حرکت کرتا ہے اس کا صفہی سطح مستوی سلسلہ طور پر اس طرح گھومتا جاتا ہے کہ و لا کا مزدوج خط ہمیشہ اس میں واقع ہوتا ہے۔ پس و لا کا مزدوج خط اس طرح آسانی

سے دریافت ہو سکتا ہے کہ دائر کوئی دو مناسب نقطے لیکر ان نقطوں کے صفری سطوح  
مستوی کی مساواتیں لکھی جائیں۔ مطلوبہ خط ان سطوح مستوی کا خط تقاطع ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم قوتوں کے نظام (لا، ما، مے، ل، مر، ن) کے

لحاظ سے خط

$$\frac{لا - ن}{ل} = \frac{ما - گ}{م} = \frac{ی - ه}{ن} \quad (1)$$



[فرض کرو کہ وہ قوت جو محور لا کے ساتھ عمل کرتی ہے ق ہے، تب دوسری قوت کے اجزائے ترکیبی لا۔ ق، ما۔ مے ہونگے، فرض کرو کہ یہ قوت کسی نقطہ (ن آگ) پر عمل کرتی ہے۔ چونکہ یہ قوتیں نظام مذکور کے معادل ہیں اس لئے دفعہ ۱۶۲ کی رو سے

$$ل = گ مے، مے۔ ف = ن اور ق = ن ما۔ گ (لا۔ ق)$$

اس سے نتائج بالا آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں، نیز دوسری قوت کا خط عمل معلوم ہو سکتا ہے]

۴۔ ثابت کرو کہ بیچ (لا، ما، مے، ل، م، ن) دو قوتوں کے معادل ہے جن میں سے ایک خط لا = م = ی کے ساتھ اور دوسری خط

$$ل + لا + م + ن = ی =$$

$$\text{اور } لا (ما۔ مے) + ما (مے۔ لا) + ی (لا۔ ما) = ل + م + ن$$

کے ساتھ عمل کرتی ہے دونوں قوتوں کی مقدار میں معلوم کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ قوتوں کے دو نظام بالعموم مزدوج خطوں کا صرف ایک ہی زوج مشترک رکھتے ہیں۔

۶۔ ایک زائد نما کے ایک ہی نظام کے دو کمونوں کے ساتھ قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ اسی نظام کے دو کمون ان قوتوں کے صفوی خط ہیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ ایک خط ل ب کے مختلف نقطوں کے صفوی سطوح مستوی ایک دوسرے خط ج د میں سے گزرینگے نیز اگر مختلف محلوں میں خطوط ل ب ایک زائد نما کے کمون ہوں تو خطوط ج د بھی ایک زائد نما کے کمون ہونگے۔

۸۔ قوتوں کے ایک نظام کو دو قوتوں میں تحلیل کیا گیا ہے جن میں سے ایک کسی خاص خط مستقیم کے ساتھ عمل کرتی ہے ۱۔ ثابت کرو کہ (۱) اس قسم کی قوتوں کے دو جوڑوں کے چار خطوط عمل یک چار درجہ زائد نما کے ایک ہی نظام کے کمون ہونگے اور (۲) وہ خطوط مستقیم جو ان دو قوتوں اور مرکزی محور میں سے گزرتے ہیں ایک زائد نما کی مکافی منافی تکوین کرینگے جس کے کمونوں کا ایک جٹ مرکزی محور پر عمود ہوگا۔

۹۔ ایک ہی مبدأ اور محوروں کے لحاظ سے قوتوں کے دو نظام (لا، ما، مے، ال، قرآن) اور (لا، ما، مے، ال، قرآن) سے تفسیر ہوتے ہیں۔ ثابت کر دو کہ بالعموم دو خطوطِ قائم کا صرف ایک جوڑ ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ ان میں عمل کرنے والی مناسب قوتیں ہر دو نظام کے معادل ہوں۔

نیز ثابت کریں کہ ان خطوط کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے

$$\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \text{غ (سنا - ک)}$$

جہاں  $\pi = \text{لی} + \text{لا} + \text{مما} + \text{ن} + \text{ئے} + \text{لی} + \text{لا} + \text{مما} + \text{ن} + \text{ے}$   
 ک = لا لا لا + ما + ما + مے + ئے

اور غنغ حسب مہول نظاموں کے غیر متغیرہ کو تعبیر کرنے میں اور مہول حاصل قوتوں کو۔ (دونوں نظاموں کے مرکزی محوروں کے لئے دفعہ ۱۹۰ کی مساواتیں استعمال کرنے سے ہمیں پچھوٹے سے چھوٹا فاصلہ مسا اور مرکزی محوروں کے درمیان زاویہ حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے۔

جم =  $\frac{\text{ک}}{\text{سر ستر}}$

اور بسا =  $(\frac{\text{غک}}{\text{سرا}} - \frac{\text{غک}}{\text{سرا}} - \pi) \div \sqrt{\text{سرا} - \text{سرا}}$

$$\text{معم} \left[ \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3} \right] =$$

نیز دفعہ ۱۹۲ کی رو سے اگر اُج اور ب د مطلوبہ خطا ہوں تو ظاہر ہے کہ ا ب ہر ایک مرکزی محور پر عمود ہوگا اور اس لئے اُن کے درمیان چھوٹے سے چھوٹے فاصلہ مساوی واقع ہوگا۔ دفعہ ۱۹۲ کے زاویے ط اور ذ کی مساوات میں یہ مشکل اختیار کرتی



$$\text{مس ط} = \frac{ا}{\text{سرا ب}} ، \text{مس ذ} = \frac{\text{غ}}{\text{سرا ا}} ، \text{مس (ط-ع)} = \frac{\text{غ}}{\text{سرا (ب+سا)}} \\ \text{اور مس (ذ+ع)} = \frac{\text{غ}}{\text{سرا (ا-سا)}}$$

ان مساواتوں میں سے ط اور ذ کو سا قطا کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ا اور ب

اس مساوات کی اصلیں ہیں

$$\text{ما}^۲ = \left[ \frac{\pi}{\text{سرا}} - \frac{\text{غ}^۲}{\text{سرا}^۲} \right] + \text{مم ع} + \left[ \frac{\text{غ}^۲ \times \text{غ}}{\text{سرا}^۲} - \frac{\text{غ سا مم ع}}{\text{سرا}} \right] = ۰$$

پس مطلوبہ فاصلہ = اس مساوات کی اصلوں کا فرق جو تحویل کرنے پر دئے ہوئے جواب کے مساوی ثابت کیا جاسکتا ہے ۔

۱۔ ثابت کرو کہ قوتوں کے تین معلوم نظاموں کے مشترک صفری خطوط ایک چادری زائد نما کے ایک ہی نظام کے کمون ہیں ۔

# بارہواں باب

## مشینیں

۲۱۰۔ اس باب میں ہم چند سادہ مشینوں کو بیان کریں گے اور ان کے متبادل پر بحث کریں گے۔

ہم فرض کریں گے کہ ان مشینوں کے مختلف حصے چلنے اور استوار ہیں اور سب رسیاں جو استعمال کی جاتی ہیں مکمل طور پر مڑ جانے والی ہیں، نیز ان مشینوں پر جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ ہمیشہ باہم متبادل رہتی ہیں یعنی مشینیں ہمیشہ ساکن رہتی ہیں۔ عملی دنیا میں یہ شرائط بہت سی مشینوں میں تقریبی طور پر بھی پورے نہیں ہوتے۔

عملاً مشین کو کسی مزاحمت پر غالب آجانے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ جو قوت مشین پر لگائی جاتی ہے اُس کو طاقت کہتے ہیں اور جس رکاوٹ پر غالب آنا مقصود ہوتا ہے اُس کو مزاحمت یا وزن کہتے ہیں خواہ وہ کسی شکل میں نمودار ہو۔

۲۱۱۔ جیلی فائدہ۔ اگر کسی مشین میں طاقت  $Q$  مزاحمت  $W$  کو متبادل کرے تو

نسبت  $\frac{W}{Q}$  یعنی  $\frac{\text{مزاحمت}}{\text{طاقت}}$  کو مشین کا جیلی فائدہ کہتے ہیں۔ پس

مزاحمت = طاقت  $\times$  جیلی فائدہ

بعض اوقات جیلی فائدہ کی بجائے اصطلاح، قوتی نسبت بھی استعمال کی جاتی ہے۔ تقریباً سب مشینیں اس طرح بنائی جاتی ہیں کہ جیلی فائدہ ایک سے زیادہ رہے۔

رفتار کی نسبت۔ کسی مشین کی رفتار کی نسبت سے اُن فاصلوں کی نسبت مراد ہوتی ہے جن میں سے بالترتیب ایک ہی وقت کے دوران میں طاقت اور مزاحمت کے نقاط حرکت کرتے ہیں یعنی

$$\text{رفتار کی نسبت} = \frac{\text{وہ فاصلہ جس میں سے ق حرکت کرتا ہے}}{\text{وہ فاصلہ جس میں سے و حرکت کرتا ہے}}$$

اگر مشین ایسی ہو کہ اس کے ترکیبی حصوں کو اٹھانے میں کوئی کام نہ دینا پڑے اور اگر یہ بالکل چکینی ہو یعنی اس کے مختلف اجزاء کے اندر رگڑ کی قوت بالکل معدوم ہو تو معلوم ہو گا کہ چکلی فائدہ اور رفتار کی نسبت دونوں مساوی ہوتے ہیں۔ پس ایسی صورت میں

$$\frac{و}{ق} = \frac{\text{وہ فاصلہ جس میں سے ق حرکت کرتا ہے}}{\text{وہ فاصلہ جس میں سے و حرکت کرتا ہے}}$$

اس لئے  $و \times$  وہ فاصلہ جس میں سے و حرکت کرتا ہے

$$= ق \times \text{وہ فاصلہ جس میں سے ق حرکت کرتا ہے}$$

یعنی طاقت کا کام = وزن کے خلاف کام  
۲۱۲۔ ہم دیکھیں گے کہ ذیل کا مسئلہ جو کام کے اصول کے نام سے موسوم ہے نہایت عام اور جامع مسئلہ ہے:-

خواہ ہماری مشین کیسی ہی ہو بشرطیکہ اس کے اجزاء کے اندر رگڑ نہ ہو اور اس کے مختلف حصوں کے وزنوں کو نظر انداز کر دیا جائے طاقت کا کام ہمیشہ اُس کام کے مساوی ہوتا ہے جو وزن یا مزاحمت کے خلاف کیا جائے۔

اس اصول کو موہوم کام کے اصول کی توسیع خیال کیا جاسکتا ہے۔ اس میں

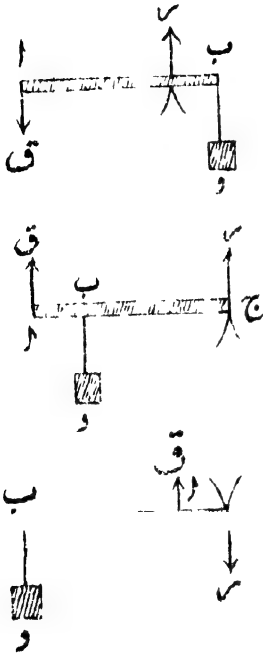
بجائے موبوم ہٹاؤں کے ایسے حقیقی اور محدود ہٹاؤ ہوتے ہیں جو مشین کے ہندسی روابط کے مطابق ہوں۔

فرض کرو کہ ہماری مشین سے جیلی فائدہ حاصل ہوتا ہے یعنی وزن سے کم طاقت لگانی پڑتی ہے تو طاقت کا فاصلہ طے کردہ وزن سے فاصلہ طے کردہ سے اُسی نسبت میں کم ہوگا۔ عام الفاظ میں اس امر واقعہ کو یوں بیان کرتے ہیں کہ طاقت میں جو فائدہ حاصل ہوتا ہے رفتار میں اتنا ہی نقصان ہوتا ہے۔ یہ کہنا شاید زیادہ جامع ہو کہ جیلی فائدہ کا حصول رفتار میں متناسب کمی پیدا کرتا ہے۔ کسی مشین کے استعمال سے کام میں فائدہ نہیں اُٹھایا جاسکتا اگرچہ عام طور پر جیلی فائدہ ہوتا ہے۔ عملی طور پر اگر کوئی غیرہ کی وجہ سے ہر مشین کے استعمال سے کچھ نہ کچھ کام کا نقصان ہوتا ہے

### مشین کے فائدے حسب ذیل ہیں۔

- (۱) اس کی مدد سے ایک شخص اس سے بہت زیادہ وزن اٹھا سکتا ہے جتنا کہ وہ مشین کی مدد کے بغیر اٹھا سکتا تھا۔ مثلاً چرخوں کے نظام یا پرنج اور محور کی مدد سے۔
- (۲) مشین کے کسی ایک حصہ کو حرکت میں لانے سے اس کے کسی دوسرے حصہ میں زیادہ تیز حرکت پیدا کی جاسکتی ہے مثلاً بائیسکل میں
- (۳) مشین کی مدد سے کسی قابل رسائی مقام پر آسان طریقہ سے قوت لگا سکتے ہیں۔ مثلاً دست پناہ کی مدد سے آگ کو ہلا سکتے ہیں یا چوکنے کے بڑے ٹوکے کو ایک چرخ کی مدد سے کسی عمارت پر چڑھا سکتے ہیں اس طور پر کہ ایک رسی ٹوکے سے باندھ دیجائے اور اسے عمارت پر کی ایک وابستہ چرخ پر سے گزار کر اس کے دوسرے سرے کو زمین پر کا کوئی استادہ شخص کھینچے۔

۲۱۳۔ بیرم۔ بیرم دراصل ایک سیدھی یا ٹریسٹی استوارسلاخ ہوتی ہے جس کا ایک نقطہ ثابت ہو اور باقی ماندہ سلاخ اس نقطہ کے گرد گھوم سکتی ہو۔ اس ثابت نقطہ کو نصاب کہتے ہیں اور نصاب سے طاقت اور مزاحمت کے خطوط عمل کے عمودی فاصلوں کو بیرم کے بازو کہتے ہیں۔



قسم اوّل - اس میں وزن و اور طاقت ق  
نصاب کے مختلف جانب عمل کرتے ہیں۔

قسم دوم - اس میں وزن و اور طاقت  
ق نصاب کے ایک ہی طرف عمل کرتے  
ہیں۔ لیکن طاقت ق و وزن و کی نسبت  
نصاب سے زیادہ فاصلہ پر عمل کرتی ہے۔

قسم سوم - یہاں طاقت ق و وزن و  
نصاب ج کے ایک ہی طرف عمل کرتے  
ہیں لیکن طاقت کا نصاب سے فاصلہ  
وزن کے فاصلہ سے کم ہوتا ہے۔

### ۲۱۴۔ سیدھے بیرم کے تعادل کی شرائط۔

بیرم میں جسم پر تین متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں لہذا نصاب پر کا تعادل نہ قوت  
ق اور و کے حاصل کے مساوی اور متقابل ہوگا۔  
پہلی اور تیسری قسم میں ہم نے دیکھا ہے کہ ق اور و متقابل سمتوں میں عمل  
کرتے ہیں۔

دوسری صورت میں و و ایک ہی سمت میں عمل کرتے ہیں۔ چونکہ ہر صورت میں  
ق اور و کی حاصل قوت ج میں سے گزرتی ہے اس لئے و و و کے مطابق

$$ق \times ج = و \times ب$$

$$\frac{ق}{و} = \frac{ج}{ب} = \frac{و}{ق} \text{ اس لئے}$$

اس سے ظاہر ہے کہ پہلی قسم میں بالعموم اور دوسری قسم میں ہمیشہ خلی فائدہ حاصل ہوتا ہے۔

لیکن تیسری قسم میں جلی نقصان ہوتا ہے۔

۲۱۵۔ مختلف قسم کے بیرموں کی مثالیں حسب ذیل ہیں۔

قسم اول۔ آتش گیر جبکہ اسے آگ کو ہلانے کے لئے استعمال کیا جائے اس صورت میں جھٹکے کی سلاخ نصاب ہوتی ہے۔

میخ کش جب اسے میخ نکالنے کے لئے استعمال کیا جائے۔ ایک بیل جبکہ اس کا کوئی نقطہ کسی ثابت سہارے پر ساکن ہے۔

ترازو۔ پانی نکالنے کے پمپ کا دستہ وغیرہ

اس قسم کے دوہرے بیرم یہ ہیں :- قینچی۔ موجنا

قسم دوم۔ ٹھیلہ۔ کاک داب۔ ایک بیل جبکہ اس کا ایک سر زمین پر ساکن ہو (یہ فرض کر کے کہ اس کا وہ سر جو پانی کو مس کر رہا ہے ساکن ہے)۔

بادام شکن۔ اس قسم کے دوہرے بیرم کی مثال ہے۔

قسم سوم۔ خرا د کا پائیدان۔ انسان کے بازو کا اگلا نصف۔ جبکہ یہ ہتھیلی پر کسی وزن کو اٹھائے ہوئے ہو۔ اس صورت میں نصاب کہنی ہوگی اور پٹھوں کے تناؤ کی طاقت زور کا کام دیگی۔

شکر اٹھانے کے چمچے کو اس قسم کے دوہرے بیرم کی مثال تصور کیا جاسکتا ہے۔ آخری قسم کے بیرم عملی طور پر اُس وقت کام آئے ہیں جبکہ طاقت کسی ایسے نقطہ پر لگانا مطلوب ہو جہاں براہ راست طاقت نہ لگائی جاسکے۔

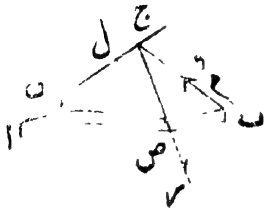
دفعہ ما قبل میں ہم نے بیرم کے وزن کو نظر انداز کیا ہے۔ اگر اس وزن کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو تعادل کی شرائط نصاب کے گرد قوتوں کے معیار اثرات کے جبر یہ مجموعہ کو صفر کرنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

بیرم کا اصول حکیم آرشمیدس کو معلوم تھا جو تیسری صدی قبل از مسیح گزرا ہے سو لھویں صدی میں قوتوں کے متوازی الاضلاع کا اصول معلوم ہونے تک

بیرم کا اصول سکونیات کا بنیادی اصول تھا۔

۲۱۶۔ خم دار بیرم۔ فرض کرو کہ ا ص کوئی ٹیڑھا بیرم ہے

جس کا نصاب ص ہے اور ص ل اور  
ص م بالترتیب قوت ق کے خط عمل  
ا ج اور مزاحمت و کے خط عمل جب ج پر  
ص سے عمود ہیں۔



ص کے گرد معیار اثر لینے سے

ق =  $\frac{\text{نصاب سے مزاحمت کے خط عمل پر عمود}}{\text{ص}}$  =  $\frac{\text{نصاب سے طاقت کے خط عمل پر عمود}}{\text{ص}}$

ص و پر تعامل معلوم کرنے کے لئے فرض کرو کہ طاقت ق اور وزن و کی سمتیں ایک  
دوسرے سے ج پر ملتی ہیں۔ چونکہ جسم پر عمل کرنے والی قوتیں صرف تین ہیں، اس لئے  
ص پر کے لغزش کی سمت لازماً ج میں سے گزرے گی۔ پس لامی کے مسئلہ کی رو سے

$$\frac{\text{ج ب ا ص ب}}{\text{ق}} = \frac{\text{ج ب ا ج ص}}{\text{و}}$$

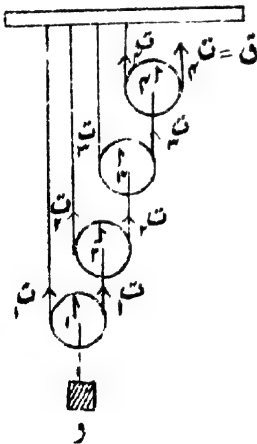
تفاعل س کی قیمت قوتوں س، ق اور و کو دو علی القوائم سمتوں میں تحلیل کرنے  
سے بھی حاصل ہو سکتی ہے۔ اس دفعہ میں ہم نے نصاب پر رگڑ کی قوت کو ملحوظ  
نہیں رکھا ہے۔ نیز ہم نے یہ فرض کر لیا ہے کہ بیرم پر عمل کرنے والی قوتیں ایک  
ای سطح مستوی میں ہیں جو اس محور پر جس کے گرد بیرم گھومتا ہے عمود دار ہے۔  
اگر قوتیں کسی اور سمت میں عمل کریں تو تعادل کا مسئلہ دسویں باب کی رو سے  
تین ابعاد کی قوتوں کا مسئلہ ہوگا۔

۲۱۷۔ چرخ خیال۔ چرخ لکڑی یا دھات کا چھوٹا سا پہیا ہوتا ہے جس کے محیط پر ایک  
نالی لکڑی ہوتی ہے جس میں ڈوری یا رسی بیٹھ سکے۔ چرخ فی ایک ایسے محور کے گرد

آزادانہ گھوم سکتی ہے جو پیپے کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کی سطح پر عمود وار ہے۔ اس محور کے سرے لکڑی کے ایک قالب پر سہارے ہوئے ہوتے ہیں۔ اگر چرخ کی کا قالب حرکت کر سکے تو اس کو قابل حرکت چرخ کہتے ہیں اور اگر اس کا قالب ہمیشہ ثابت رہے تو اسے ثابت چرخ کہتے ہیں۔

عام طور پر چرخ کی کا وزن اُس وزن کے مقابلے میں جس کو یہ سہارے ہوئے ہے اس قدر چھوٹا ہوتا ہے کہ اس کے اپنے وزن کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ اس قسم کی چرخ کی کو بے وزن چرخ کہتے ہیں۔ رسی یا ڈوری کے وزن کو جو چرخ پر سے گزرتی ہے ہمیشہ نظر انداز کیا جائے گا۔ ہم چرخ کی کو ہمیشہ جیکنا تصور کریں گے جس کی وجہ سے اس پر سے گزرنے والی رسی کا تناؤ اس کے سب طول پر مساوی سمجھا جائے گا۔

۲۱۸۔ ہم یہاں چرخوں کے تین نظاموں پر حسب معمول ترتیب میں غور کریں گے۔ اس ترتیب میں کوئی خاص بات نہیں مگر حوالہ دینے کی ضرورتوں کے لحاظ سے اس کو بدستور قائم رکھنا مناسب ہے۔



چرخوں کا پہلا نظام۔ اس نظام میں ہر ایک رسی سہارے والے شہتیر کے ساتھ بندھی ہوتی ہے۔ طاقت اور وزن کا تعلق دریافت طلب ہے۔

چرخوں کے اس نظام میں وزن سب سے پہلی چرخ کی کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اس کے گرد جو رسی گزرتی ہے اس کا ایک سر

سہارے والے شہتیر کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اور دوسرا سر اوپر والی چرخ کی کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اور اسی طرح موخر الذکر چرخ کی کے گرد گزرنے والی رسی کا ایک سر شہتیر کے ساتھ اور دوسرا اس چرخ کی کے اوپر کی چرخ کی کے ساتھ بندھا ہوتا ہے علیٰ ہذا القیاس۔ آخری رسی کے خالی سرے پر قوت لگائی جاتی ہے



عام طور پر ایک اور زائد ثابت چرخہ ہوتی ہے اور آخری رسی کا خالی سرا  
اس چرخہ کے اوپر سے گزرتا ہے۔ اس صورت میں قوت کو نیچے کی طرف لگایا  
جاسکتا ہے۔

فرض کر کہ چرخیاں نیچے کی طرف سے لے لے، ... ہیں۔ اور ان کے گرد گزرنے

والی رسیوں کے متاد متاد ... ہیں، نیز فرض کر دو کہ طاقت  $Q$  اور وزن  $W$  ہے۔  
چرخوں کے متادل کے لئے اگر چرخوں  $1, 2, 3, \dots$  کے اوزان بالترتیب  
 $W_1, W_2, W_3, \dots$  ہوں تو

$$W_1 + \frac{W_2}{2} + \frac{W_3}{4} + \dots = \frac{1}{2}(W_1 + W_2 + W_3 + \dots) = \frac{1}{2}W$$

$$W_2 + \frac{W_3}{2} + \frac{W_4}{4} + \dots = \frac{1}{2}(W_2 + W_3 + W_4 + \dots) = \frac{1}{2}W_1$$

.....

اگر چرخوں کی تعداد  $n$  ہو تو بالآخر

$$Q = W_1 + \frac{W_2}{2} + \frac{W_3}{4} + \dots + \frac{W_n}{2^{n-1}}$$

$$2^n \times Q = 2^n W_1 + 2^{n-1} W_2 + 2^{n-2} W_3 + \dots + 2 W_n$$

اگر چرخیاں مساوی وزن والی ہیں اور ہر ایک کا وزن  $W$  ہو تو

$$2^n \times Q = W(2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1) = W(2^n - 1)$$

اس سے ظاہر ہے کہ خلی فائدہ  $\frac{Q}{W}$  چرخوں کے وزن پر موقوف ہوتا ہے۔

فرض کر دو کہ مشین پر متادل  $n$  ہے چونکہ  $Q$  اور  $W$  ملکہ چرخوں کے نظام  
کو مع وزن  $W$  کے سہارا ہوئے ہیں۔ اس لئے

$$Q + W = W + W + W + \dots + W$$

۲۱۹۔ کام کے اصول کی تصدیق۔ اگر وزن و کو فاصلہ لائیں سے اٹھایا

جائے تو بشرطیکہ فاصلہ ۱۰ میں کوئی تبدیلی واقع نہ ہو چرخ ۱۰ بھی فاصلہ لائیں سے اوپر اٹھیں گی لیکن دراصل ۱۰ کو اٹھانے کے دوران میں اس رسی کا طول جو ۱۰ کو شہتیر کے ساتھ ملاتی ہے بقدر ۱۰ کے کم ہو جاتا ہے اور رسی کے طول کا بقدر ۱۰ حصہ چرخ ۱۰ پر سے پھسل جاتا ہے۔ اس لئے چرخ ۱۰ کلیتہً فاصلہ ۲ لائیں سے اوپر چڑھ جاتی ہے۔

اسی طرح سے چرخ ۱۰ فاصلہ ۳ لا اوپر چڑھتی ہے اور چرخ ۱۰ فاصلہ ۴ لا اوپر چڑھتی ہے اور بالآخر چرخ ۱۰ فاصلہ ۵ لا اوپر چڑھتی ہے

چونکہ چرخ ۱۰ فاصلہ ۵ لا اوپر اٹھ آتی ہے اس لئے جو رسی اس چرخ کو ایک طرف شہتیر کے ساتھ اور دوسری طرف ق سے ملاتی ہے اس کے ہر ایک حصہ کے طول میں بقدر ۵-۱۰ کے کمی واقع ہو جاتی ہے۔ اس لئے یہ ڈھیلی رسی چرخ ۱۰ پر سے پھسل جاتی ہے اور ق کا نقطہ عمل فاصلہ ۵ لائیں سے اوپر اٹھ جاتا ہے۔

اس لئے وزن (مزامحت) اور چرخوں کے وزن پر جو کام ہوتا ہے وہ

$$= ۱۰ \times ۱۰ + ۱۰ \times ۲۰ + ۱۰ \times ۳۰ + ۱۰ \times ۴۰ + ۱۰ \times ۵۰ + \dots + ۱۰ \times ۱۰$$

$$= ۱۰ \times ۱۰ \text{ ق و فدا قبل کی رو سے}$$

$$= \text{طاقت کا کام}$$

۲۲۰۔ چرخوں کا دوسرا نظام۔ اس میں سب چرخوں کے گرد ایک ہی رسی

گزرتی ہے۔ وزن اور طاقت کا رشتہ معلوم کرو۔

اس نظام میں دو قالب ہوتے ہیں جن میں سے ہر ایک میں چرخیاں ہوتی

ہیں۔ اوپر کا قالب ساکن ہوتا ہے اور نیچے کا حرکت پذیر۔ ایک ہی رسی سب چرخوں پر سے گزرتی ہے جیسا کہ ذیل کی شکلوں میں دکھایا گیا ہے۔ اس رسی کے کھلے سرے پر قوت لگائی جاتی ہے اور اس کا دوسرا سرا اوپر کے یا نیچے کے قالب کے ساتھ بندھا ہوتا ہے۔ دونوں صورتوں میں فرض کرو کہ نیچے کے قالب میں رسیوں کے جو حصے ہیں ان کی تعداد  $n$  ہے۔ چونکہ ہمارے پاس ایک ہی رسی ہے جو

چکنی چرخوں کے

اوپر سے گزرتی ہے

اس لئے اس کا تناؤ

ہر جگہ سادی ہے اور

$Q$  کے برابر ہے۔

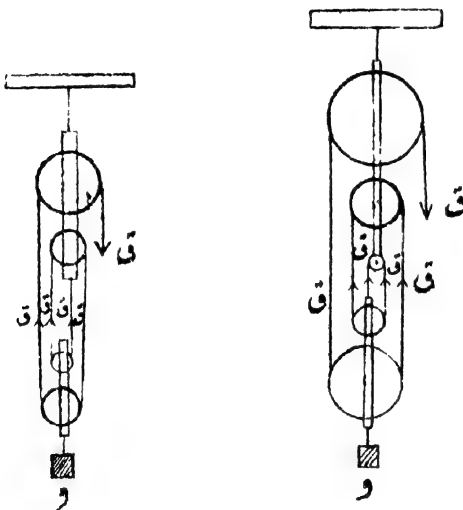
پس  $nQ = W$  و

جہاں  $W$  سہارا

ہوا وزن ہے اور

$W$  نچلے قالب کا وزن

ہے۔



عملی طور پر ہر ایک

قالب کی چرخوں کو

ایک دوسرے کے متوازی رکھا جاتا ہے۔ اس لئے رسیوں کے حصے اگرچہ ٹھیک

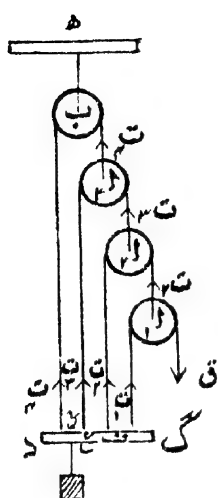
طور پر متوازی نہیں ہوتے مگر تقریبی طور پر متوازی ہوتے ہیں اس لئے مندرجہ بالا

نتیجہ پھر بھی درست رہتے ہیں۔

۲۲۱۔ چرخوں کا تسیر النظام۔ اس نظام میں سب رسیاں وزن کے

ساتھ بندھی ہوتی ہیں۔ طاقت اور وزن کا رشتہ معلوم کرو۔

اس نظام میں ہر ایک چرخ پر سے گزرنے والی رسی کو ایک طرف وزن و



کو سہارنے والے شہتیر کے ساتھ اور دوسری طرف نیچے کی چرخی سے باندھا جاتا ہے۔ سب سے اوپر کی چرخی ثابت ہوتی ہے اور ایک ساکن شہتیر سے لٹکی رہتی ہے۔ سب سے نیچے کی چرخی پر سے جو رسی گزرتی ہے اُس کا ایک سر حسب معمول وزن کو سہارنے والے شہتیر کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اور دوسرے سرے پر قوت لگائی جاتی ہے۔

فرض کرو کہ نیچے کی طرف سے شروع ہو کر چرخیاں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳

اگر طاقت ق ہو تو صرفاً ت = ق

چرخوں کے تعادل پر ترتیب وار غور کرو، اگر ان کے وزن و..... ہوں تو

$$تم = تم + و = ق + و$$

$$t_3 = t_2 + \tau = \tau_q + \tau_2 + \tau_3$$

$$ت_۴ = ت_۲ + و_۲ = ق_۲ + و_۲ + و_۲ + و_۲$$

ت = اق + ق + و<sup>۲-۵</sup> + و<sup>۳-۶</sup> + " " + و<sup>ن-۱</sup>

اگر چہ خیوں کی تعداد ن ہو جن میں سے ن - ا قابل حرکت ہوں تو وزن (مزاحمت) کو سہارنے والی سلاح کی مدد سے

$$و = ت_1 + ت_2 + \dots + ت_n + ت_{n+1}$$

$$= (1-2)Q + (1-2^2)P + (1-2^3)P + \dots$$

$$+ (1-2^2)P + (1-2)P + \dots = (1)$$

اگر سب چرخوں کے وزن  $P$  ہوں تو

$$Q = (1-2)Q + (1-2^2)P + (1-2^3)P + \dots$$

سہارنے والے شہتیر پر کاربائو :- یہ دباؤ طاقت، وزن اور پرخوں کے وزن کو متعادل رکھتا ہے اور اس لئے

$$Q = P + P + P + \dots + P + P$$

۲۲۲۔ اس نظام میں ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایک چرخ کا وزن جتنا زیادہ ہوگا ہمیں وزن کو سہارنے کے لئے اتنی ہی کم قوت لگانا پڑے گی۔ پس چرخوں کے وزن طاقت کی مدد کرتے ہیں۔ اگر چرخوں کے وزن مناسب منتخب کئے جائیں تو بغیر کسی طاقت کے لگانے کے وزن بتایم ردسکتا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہمارے پاس تین متحرک پرخیاں ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن  $P$  ہے، تب دفنہ ماقبل کے رشتہ (۱) کی رو سے

$$Q = 5P + P$$

اس لئے اگر  $Q = P$  تو طاقت  $Q$  صفر ہوگی یعنی رسی کے سرے پر وزن کو

(مزاحمت) کو سہارنے کے لئے کسی طاقت کے لگانے کی ضرورت نہ ہوگی۔

۲۲۳۔ تاوقتیکہ وزن کو اس کے سہارنے والی سلاخ کے مناسب مقام پر نہ لٹکایا جائے یہ سلاخ دوران حرکت میں افقی نہ رہے گی۔ کسی خاص صورت میں لٹکانے کا مناسب محل آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

دفنہ ۲۲۱ کی شکل میں فرض کرو کہ نقاط  $d$ ،  $e$ ،  $f$ ،  $g$  (جن پر رسیاں بندھی ہیں) کے درمیانی فاصلے  $P$  ہیں اور فرض کرو کہ جس نقطہ پر وزن لٹکا ہوا ہے

وہ لا ہے۔ تب ضروری ہے کہ تناؤ ت، ت، ت، ت، ت کا حاصل نقطہ  
لا میں سے گزرے۔

پس دفعہ ۳۳ کی رو سے اگر چرخوں کے وزنوں کو نظر انداز کیا جائے تو

$$\frac{ت۰ \times ۱۰ + ت۱ \times ۱۰ + ت۲ \times ۱۰ + ت۳ \times ۱۰ + ت۴ \times ۱۰}{ت۰ + ت۱ + ت۲ + ت۳ + ت۴}$$

$$\frac{۱۱}{۱۵} = \frac{۱۳ \times ق + ۲ \times ق + ۲ \times ق + ۲ \times ق + ۲ \times ق}{ق + ق + ق + ق + ق}$$

۲۲۴۔ چرخوں کے تیسرے نظام سے وزنوں کو اٹھانا مقصود نہیں ہوتا۔ اگر اسے  
اس مقصد کے لئے استعمال کیا جائے تو اس کا ناقابل عمل ہونا بہت جلد ثابت  
ہو جائے گا۔

اس کا استعمال یہ ہے کہ خفیف سے عرصہ کے لئے بہت زور کا جھٹکا دیا جاسکے  
مثلاً یہ نظام ایک کشتی کے تختہ پرستول کو سیدھا رکھنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

دفعہ ۲۲۱ کی شکل میں د ع ف گ ایک کشتی کا تختہ ہے جس کے ساتھ  
رسیاں بندھی ہیں اور کوئی وزن و نہیں ہے۔ برنیوں کے لئے کم کی رسیاں

سمت انتصابی کے ساتھ میلان رکھتی ہیں اور نقطہ ہ مستول کی چوٹی ہے جسے سیدھا  
رکھنا مطلوب ہے۔ اس صورت میں مزاحمت وہ قوت ہے جسے ہ پر لگا کر مستول  
سیدھا رکھا جاسکے۔ طاقت جس طرح عمل کرتی ہے اُسے شکل میں دکھایا گیا ہے۔

۲۲۵۔ کام کے اصول کی تصدیق۔ فرض کرو کہ وزن و فاصلہ لا میں سے اوپر  
اٹھتا ہے۔ تب جو رسی چرخ ب کو سلاخ کے ساتھ پیوست کرتی ہے اُس کا  
طول بقدر لا کے کم ہو جاتا ہے جس سے چرخ ب فاصلہ لائیچے اتر آتی ہے۔ چونکہ چرخ  
لہ فاصلہ لائیچے اتر آتی ہے اور سلاخ فاصلہ لا اوپر چڑھ جاتی ہے وہ رسی جو لہ  
کو سلاخ کے ساتھ ملائی ہے بقدر لا کے کم ہو جاتی ہے اور یہ حصہ لہ کے  
اوپر سے پھسلتا ہے۔ پس چرخ لہ فاصلہ ۲ لا اور نیز وہ فاصلہ جس میں سے لہ

اترتی ہے نیچے اتراتی ہے یعنی مجموعی طور پر فاصلہ ۲ لا + لا = ۳ لا نیچے اتراتی ہے۔ اس سے رسی ۱۴ فٹ بقدر ۳ لا کے کم ہو جاتی ہے جو طول چرخ ۱۴ سے بھسل جاتا ہے۔ اس کا نتیجہ یہ ہوتا ہے کہ چرخ ۱۴ ایک تو فاصلہ ۳ لا اور دوسرے فاصلہ جس میں چرخ ۱۴ اترتی ہے یعنی مجموعی طور پر فاصلہ ۳ لا + ۳ لا = ۶ لا نیچے اتر جاتی ہے۔ پس پہلی، دوسری، تیسری، ... (ن-۱) دیں چرخیاں بالترتیب فاصلے لا، ۳ لا، ۵ لا، ... (۲-۱) لا نیچے اترتی ہیں۔ اور طاقت ق کا نقطہ

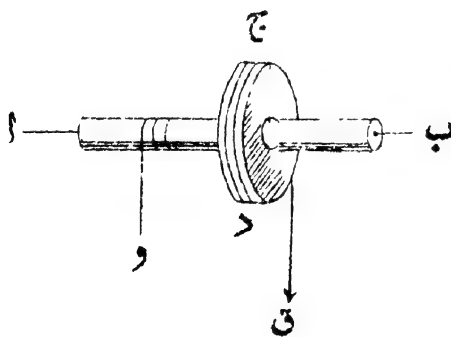
عمل فاصلہ (۲-۱) لا نیچے اترتا ہے۔ پس رفتار سی نسبت ۲-۱ ہے۔ طاقت اور چرخوں کے وزنوں (جو اس صورت میں طاقت کی مدد کرتے ہیں) کا کام

$$= ق (۱-۲) + و (۲-۱) لا + د (۲-۱) لا + ... + ۳ و (۲-۱) لا + و (۲-۱) لا$$

$$= لا \times و \text{ و د فہ ۲۲ کی رو سے}$$

$$= وزن و کا کام$$

۲۲۶- چرخ اور محور۔ اس ستین میں ایک مضبوط مستدیر اسطوانہ یعنی محور ہوتا ہے



جس کے سرے دو چولیس ۱۴ اور دب ہوتی ہیں اور یہ چولیس ثابت سہاروں پر آزادانہ گھوم سکتی ہیں اس اسطوانہ کے ساتھ استوار طر پر ایک چرخ ج د پیوست ہوتا ہے جس کی سطح مستوی محور پر عمود دار ہوتی ہے۔

محور کے گرد ایک رسی پٹی ہوتی

ہے جس کے ایک سرے کو محور کے ساتھ باندھ دیا جاتا ہے اور دوسرے سرے سے وزن لٹکایا جاتا ہے۔ چرخ کے محیط پر پہلی رسی کی مقابل سمت میں ایک اور رسی پٹی ہوتی ہے جس کا ایک سر چرخ کے ساتھ بندھا ہوتا ہے اور دوسرے

سرے پر طاقت لگائی جاتی ہے چرخ کے محیط پر تالی کھدی ہوتی ہے تاکہ رسی پھسل نہ جائے۔

اگر محور کا نصف قطر ۱ ہو اور چرخ کا نصف قطر ۲ ہو تو ثابت محوری خط کے گرد معیار افر لینے سے تعادل کے لئے ضروری ہے کہ

$$ق \times ب = و \times د = \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{پس مفاد جیلی} = \frac{و}{ق} = \frac{ب}{۱} = \frac{\text{چرخ کا نصف قطر}}{\text{محور کا نصف قطر}}$$

کام کے اصول کی تصدیق۔ فرض کرو کہ مشین چار فائوں میں سے گھومتی

ہے تو رسی کا ایک حصہ جس کا طول ۲۲ ب ہے چرخ پر سے کھل جاتا ہے اس لئے ق اس فاصلہ میں سے نیچے اتر آتا ہے۔ اسی اثنا میں طول ۲۲ د محور کے گرد لپیٹ جاتا ہے جس سے وزن و اسی قدر فاصلہ اوپر چڑھ جاتا ہے پس طاقت کا کام = ق ۲۲ ب اور وہ کام جو طاقت کے خلاف کیا گیا = و ۲۲ د

یہ دونوں ربط (۱) کی وجہ سے مساوی ہیں۔

نیز زقاری نسبت (دیکھو دفعہ ۲۱۱)

$$= \frac{۲۲ ب}{۱ ۲۲} = \frac{ب}{۱} = \text{مفاد جیلی}$$

نظری طور پر مقدار  $\frac{ب}{۱}$  کو بہت بڑا بنانے سے ہم مفاد جیلی کو جتنا چاہیں

استا بڑا بنا سکتے ہیں۔ مگر عملی طور پر یہ مقدار خاص حدود سے تجاوز نہیں کر سکتی۔ چونکہ ثابت سہاروں پر کے دباؤ اور و کا توازن کرتے ہیں اس لئے ہم محور کی توانائی

یعنی ۲ کو بہت کم نہیں کر سکتے اور نہ ہی چرخ کے نصف قطر کو بہت بڑھا سکتے ہیں

کیونکہ ایسا کرنے سے مشین بھدی اور ناقابل عمل ہو جائیگی۔ پس مفاد جیلی کی

قیمتیں محدود ہیں۔ اس کے حدود ایک طرف تو مشین کی مضبوطی سے اور دوسری مشین کی جسامت کو مناسب رکھنے کی ضرورت سے متعید ہیں۔

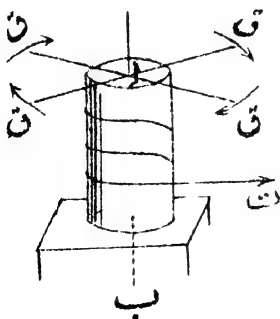


۲۲۷۔ دفعہ ۲۲۶ میں ہم نے رسیوں کی موٹائی کو نظر انداز کر دیا۔ ہے۔ مگر اُن کی موٹائیاں اتنی ہوں کہ چرخ اور محور کے نصف قطروں کے مقابلہ میں نظر انداز نہ ہو سکیں تو ہم اُن کو بھی ملحوظ رکھنے کے لئے یہ فرض کر سکتے ہیں کہ رسیوں کے تناؤ درمیانی ریشے کے ساتھ عمل کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ان رسیوں کے نصف قطر جو بالترتیب محور اور چرخ کے گرد لپیٹی ہیں لا اور ما ہیں اس لئے جن خطوط پر اب تناؤ عمل کرتے ہیں ان کے فاصلے چولوں کو مانے واسطے خط سے بالترتیب  $(4 + 4)$  اور  $(3 + 4)$  ہیں۔ پس تعادل کے لئے  $ق (ب + ۴) = و (۱ + ۱)$  جس سے

$$\frac{ق}{و} = \frac{\text{محور اور اس کی رسی کے نصف قطروں کا مجموعہ}}{\text{لا اور اس کی رسی کے نصف قطروں کا مجموعہ}}$$

۲۲۸۔ چرخ اور محور کی دو شکلیں یہ ہیں۔ ڈنڈا چرخ جیسے کوئیں میں سے پانی نکالنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے اور لنگر چرخ جو جہاز پر استعمال کیا جاتا ہے ان مشینوں میں طاقت دفعہ ۲۲۶ کے مطابق اسطوانوں کے گرد پٹنے ہوئے رسیوں کے ذریعہ لگانے کی جائے طاقت ہتھوں پر لگائی جاتی ہے جو محور پر عمود وار سطح مستوی میں پیوست ہوئے ہیں۔



ڈنڈا چرخ میں محور متوازی الافق ہوتا ہے اور لنگر چرخ میں محور اتصابی ہوتا ہے۔ موٹر الذکر صورت میں مزاحمت اس رسی کے تناؤ سے پرستل ہوتی ہے جو محور کے گرد لپیٹی ہوتی ہے اور طاقت اُن سلاخوں کے سروں پر لگائی جاتی ہے جو لڑ پرستحکم طور پر جڑی ہوتی ہیں۔ سلاخوں کے جوڑو رکھنے کا یہ فائدہ ہے کہ لنگر چرخ کی چولوں پر کا دباؤ بہت کم ہو جاتا ہے یا بالکل معدوم

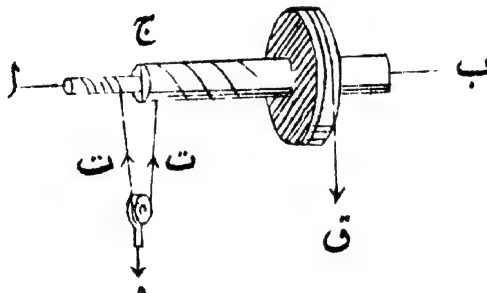
ہو جاتا ہے۔ تعادل کی شرائط دفعہ ۲۲۶ کے مطابق معلوم ہو سکتی ہیں۔

۲۲۹۔ فرقی چرخ اور محور۔ معمولی چرخ اور محور کی ذرا مختلف شکل فرقی چرخ

اور محور ہے۔ اس مشین میں دھرادو اسطوانوں پر مشتمل ہوتا ہے جن کے محور مشترک ہوتے ہیں اور جو سرور پر جڑے ہوتے ہیں۔ ان اسطوانوں کے نصف قطر مختلف ہوتے ہیں۔ دسی ایک طرف سے ایک اسطوانہ پر اور دوسری طرف سے مخالف سمت میں دوسرے اسطوانہ پر لپیٹی ہوتی ہے رسی کے ڈھیلے حصہ پر ایک چرخ لٹکی ہوتی ہے جس کے ساتھ وزن بندھا ہوتا ہے۔ چھوٹے اسطوانے کے گرد جو رسی لپیٹی ہوتی ہے وہ مشین کو اسی سمت میں گھما سکتی ہے جس سمت میں کہ طاقت گھماتی ہے۔

حسب سابق فرض کرو کہ چرخ کا نصف قطر ب ہے اور محور کے حصوں ا ج اور ج ب کے نصف قطر بالترتیب ا اور ج ہیں جہاں  $ا > ج$  سے چونکہ

چرخ لٹکی ہے اس لئے اس کے گرد گزرنے والی رسی کا تناؤ ت اس کے سب طول پر یکساں ہے اور اس لئے وزن کے تعادل کے لئے  $ت = \frac{ق}{۲}$  و



خط ا ب کے گرد معیار اثر لینے سے مشین کے تعادل کے لئے

$$ق \times ب + ت \times ا = ت \times ج + ج \times ا$$

$$ق = \frac{ج \times ا - ت \times ا}{ب}$$

$$\text{معاویگی} = \frac{ق}{ت} = \frac{ج - ا}{ب - ا}$$

محور کے دو حصوں کے نصف قطر اور ج کو ایک دوسرے کے تقریباً مساوی لینے سے اور اس طرح مشین کا کوئی حصہ مناسب طور پر کمزور بھی نہیں ہوگا ہم مفاد جیلی کو بہت بڑا بنا سکتے ہیں۔

۲۳۰۔ دسٹن کی فرقہ چرخ - اس مشین کے دو قالب ہوتے ہیں اوپر کے

حصہ میں دو چرخیاں تقریباً ایک ہی ناپ کی ہوتی ہیں جو ایک ہی چرخ کی مانند بھرتی ہیں۔ نیچے کے قالب میں ایک چرخ ہوتا ہے جس کے ساتھ وزن و بندھا ہوتا ہے۔

نیچے کی شکل میں مشین کی ایک تراش دکھائی گئی ہے بے سرے والی زنجیر

کا ایک بڑا حلقہ پہلے اوپر کی چرخوں میں سے بڑی چرخ کے گرد پھر نیچے کی چرخ کے گرد اور بعد ازاں اوپر کی چھوٹی چرخ کے گرد گزرتا ہے۔ زنجیر کا باقی حصہ ڈھیلا ٹٹکتا ہے۔ طاقت ق کے لگانے کا طریقہ شکل میں دکھایا

گیا ہے۔ زنجیر کو پھسلنے سے روکنے کے لئے اوپر

کی چرخوں پر دندانے بنے ہوتے ہیں جن کے

اندر زنجیر کی کڑیاں پھنس کر آتی ہیں اور زنجیر کو

پھسلنے سے روکتی ہیں۔

اگر سی کے ان حصوں کا تناؤ جو وزن و کو

سہارا دے ہوتے ہیں ت ہو تو چونکہ یہ حصے تقریباً

انتصافی ہیں اس لئے زنجیر کا وزن اور نیز نیچے

کی چرخ کا وزن نظر انداز کرنے سے

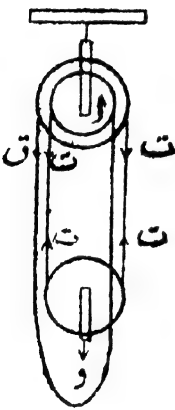
$$۲ \text{ ت} = و - - - (۱)$$

اوپر کے قالب کی بڑی اور چھوٹی چرخوں

کے نصف قطر بالترتیب س اور ر ہوں تو اوپر

کے قالب کے مرکز ا کے گرد معیار اثر لینے سے

$$ق \times س + ر \times ت = ت \times ر$$

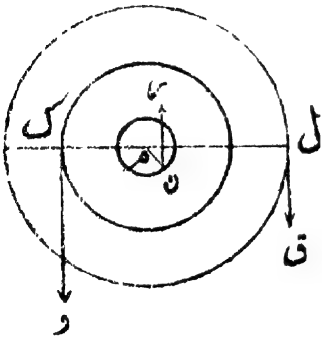


اس لئے  $ق = \frac{ق}{۲} \times \frac{س-ل}{س}$  اور مفاد جیلی  $\frac{ق}{س} = \frac{ق}{س-ل}$

چونکہ س اور ر تقریباً مساوی ہیں اس لئے مفاد جیلی بہت زیادہ ہے۔ فرنی چرخ میں فرنی چرخ اور محور کے ایک بڑے نقص کا بہت اچھی طرح سدباب ہو جاتا ہے وہ یہ کہ اول الذکر میں وزن کو اٹھانے کے لئے مقابلہ بہت کم طول کی رسی کی ضرورت ہوتی ہے۔

۲۳۱۔ چرخ اور محور جبکہ ان کی چلوں پر رگڑ کی قوت کو بھی ملحوظ رکھا جائے۔

فرض کرو کہ دفعہ ۲۲۶ میں سب سے اندر کا دائرہ چول ل یا ب کو تعبیر کرتا ہے جبکہ مشین کو اس کے محور کے ایک سرے سے دیکھا جائے۔ شکل بالا میں اسے بہت بڑھا کر دکھایا گیا ہے۔



چلوں اور ان کے خولوں کے درمیان جو حاصل تعامل ہے اسے انتصابی ہونا چاہیئے کیونکہ یہ قی اور و کو متوازن رکھتا ہے۔ نیز اگر یہ فرض کریں کہ ق وزن و پر عین غالب آنے کے قریب ہے تو حاصل تعامل کو نقطہ تماس ن پر کے عماد کے ساتھ زاویہ لہ (جو رگڑ کا زاویہ ہے) بنانا چاہیئے۔

اس لئے ن چول کے سب سے نیچے مقام پر واقع نہیں ہو سکتا بلکہ اس کا مقام ایسا ہونا چاہیئے جیسے کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس میں ہر ن انتصابی کے ساتھ زاویہ لہ بناتا ہے۔ پس ن پر کا حاصل تعامل انتصابی ہے۔

چونکہ س متعادل رکھتا ہے قی اور و کو

$$س + ق + و = ۰ \quad (۱)$$

نیز ہر کے گرد معیار اٹھ لینے سے

$$ق \times ب - س \times ج + ل \times د = ۰ \quad (۲)$$

جہاں ج چول کا نصف قطر ہے اور ب اور ا برج اور محور کے نصف قطر ہیں۔  
( دیکھو دفعہ ۲۲۶ )

$$\text{اس لئے } ق = \frac{ا + ج \text{ جب } ل}{ب - ج \text{ جب } ل}$$

اگر ق وزن کو سہارنے کے لئے عین کافی ہو یعنی اگر مشین )  
سمت میں حرکت کرنے کے عین قریب ہو تو ل کی علامت بدلنے سے

$$ق = \frac{ا - ج \text{ جب } ل}{ب + ج \text{ جب } ل}$$

اس صورت میں تماس کا نقطہ ن مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط  
کے بائیں طرف واقع ہوگا۔

۲۳۲۔ معمولی ترازو۔ معمولی ترازو میں ایک استوار ڈنڈی ل ب ہوتی ہے جس کے

دونوں سروں سے بلڑے لٹکے ہوتے ہیں۔ یہ ڈنڈی نصاب ہر کے گرد جو اس کے  
باہر ہوتا ہے آزادانہ گھوم سکتی ہے۔ نصاب اور ڈنڈی استوار طریقہ پر ایک دوسرے  
کے ساتھ بیوست ہوتے ہیں اور اگر ترازو اچھی ہو تو نقطہ ہر پر ایک سخت فولادی  
پتھر ہوتا ہے جس کا کنارہ نیچے کی طرف ہوتا ہے اور نصاب کے چھوٹے فرس پر  
ڈکا ہوتا ہے۔

جس جسم کو تولنا مقصود ہو اسے ایک پلڑے میں رکھتے ہیں۔ دوسرے پلڑے  
میں باٹ رکھے جاتے ہیں جن کی مقدار میں معلوم ہوتی ہیں۔ ان وزنوں کو کم و بیش  
کر کے ترازو کی ڈنڈی کو متوازی الافقی محل میں ساکن کیا جاتا ہے۔ اگر ہر ڈنڈی  
پر غود مو اور بازو ہ ل ، ہ ب کے طول مساوی ہوں اور نیز ترازو کا مرکز  
ثقل خط ہر ہر واقع ہو اور پلڑوں کے وزن مساوی ہوں تو جسم کا وزن دوسری  
طرف کے پلڑے کے باٹوں کے مجموعی وزن کے برابر ہوگا۔

اگر جسم کا وزن باٹوں کے وزن کے مساوی نہ ہو تو ترازو کی ڈنڈی حالت  
تعاول میں افق کے ساتھ کوئی زاویہ بنائیگی۔



یعنی (ق + س) (ا + جم - جم جب ط) = (و + س) (ا + جم ط + جم جب ط) + وک جب ط

$$\therefore \text{مس ط} = \frac{(ق - و) \times ۱}{وک + (ق + و + ۲ س) جم}$$

۲۳۳۔ اچھی ترازو کے لئے ضروری شرائط:-

(۱) ترازو سچی ہونی چاہیئے۔ ترازو سچی اس صورت میں ہوگی جبکہ اس کی ڈنڈی کے بازو طول میں مساوی ہوں، پلڑوں کے وزن مساوی ہوں اور ڈنڈی کا مرکز ثقل اس خط پر واقع ہو جو مضاب سے ڈنڈی پر عموداً کھینچا جائے۔ اگر یہ شرائط پوری ہوں تو ظاہر ہے کہ پلڑوں کے اندر مساوی وزن رکھنے سے ڈنڈی افق کے متوازی رہے گی۔ یہ جانچ کرنے کے لئے کہ ترازو سچی ہے یا نہیں پہلے یہ دیکھو کہ جب پلڑے خالی ہوں تو ڈنڈی افق کے متوازی ہے یا نہیں۔ پھر ایک پلڑے میں جسم کو رکھ کر دوسرے پلڑے پر بانوں کی مناسب مقدار رکھو تاکہ ڈنڈی افق کے متوازی ہو جائے۔ اب جسم اور وزنوں کو الجھاؤ پلڑوں کے باہم بدل دو۔ اگر اب بھی یہ ایک دوسرے کا تبادلہ کریں تو ضروری ہے کہ ترازو سچی ہو۔ اگر موخر الذکر حالت میں ترازو کی ڈنڈی افق کے ساتھ کوئی میلان رکھتی ہو تو ترازو سچی نہیں ہے۔

(۲) ترازو کو حساس ہونا چاہیئے۔ اس سے یہ مطلب ہے کہ اگر بانوں اور جسم کے وزنوں میں بہت خفیف سا فرق ہو تو بھی ترازو کی ڈنڈی کو افق کے ساتھ کافی بڑا زاویہ بنانا چاہیئے

ق اور و کے کسی معلومہ فرق کے لئے ترازو افق کے ساتھ جتنا زیادہ میلان رکھے گی اتنی ہی زیادہ حساس سمجھی جائے گی۔ نیز کسی معلومہ میلان ط کے پیدا کرنے کے لئے وزنوں کا فرق ق - و جتنا کم ہوگا اتنی ہی ترازو زیادہ حساس ہوگی پس کسی ترازو کی حساسیت ناپنے کا بہترین معیار مقدار

مس ط یعنی وک + (ق + و + ۲ س) جم

(دیکھو دفعہ ۲۳۳)

کی قیمت ہے۔

پس کسی ترازو کی حساسیت بڑی ہوگی اگر بمقابلہ  $h$  اور  $k$  کے ترازو کی ڈنڈی کے بازو  $L$  کو بڑا بنایا جائے۔ اور ڈنڈی کا وزن  $W$  اتنا کم ہو جتنا کہ مشین کی استواریت اور طول اجازت دیں۔

اگر  $h$  صفر نہ ہو تو ظاہر ہے کہ حساسیت  $Q$  اور  $W$  کی قیمتوں پر یعنی پلڑوں کے اندر کے وزنوں پر سو قوف ہوتی ہے۔ کیمیا کے تجربہ خانہ کی ترازو کے لئے یہ مناسب نہیں ہے اس لئے ایسی ترازوؤں میں  $h$  کو صفر رکھا جاتا ہے یعنی ان میں نقطہ ہر نقطہ پر منطبق ہوتا ہے۔

لہذا ان میں حساسیت کم کے بالعکس بدلتی ہے جہاں  $k$  نقطہ ہر یا  $h$  کے نیچے مرکز ثقل کا فاصلہ ہے۔

لیکن ہم  $h$  اور  $k$  دونوں کو ایک ساتھ صفر نہیں بنا دینا چاہیئے۔ ایسا کرنے سے نقاط ہر اور  $k$  دونوں پر منطبق ہو جائیں گے۔ اس لئے جب پلڑوں میں وزن مساوی ہوں تو ترازو کسی محل میں بھی متعادل رہے گی اور جب یہ وزن برابر نہ ہوں تو ترازو کی ڈنڈی حتیٰ الوسع انتصابی محل اختیار کرے گی۔

(۳) ترازو کو قائم التعادل ہونا چاہیئے اور بہت جلدی اپنے تعادل کے محل کو اختیار کر لینا چاہیئے۔

یہ معلوم کرنا کہ ترازو اپنے تعادل کے محل میں آنے میں کتنا وقت لیتی ہے کلیتاً علم حرکت کا سوال ہے۔ تاہم ہم فرض کر سکتے ہیں کہ قوتوں کا انصباب کے گرد میکانائز جتنا زیادہ ہوگا اتنا ہی کم وقت محل تعادل میں واپس آنے کے لئے درکار ہوگا۔ جب ہر ایک پلڑے میں وزن  $Q$  ہو تو حالت تعادل میں واپس لانے والی قوتوں کا میکانائز ہر کے گرد

$$= (Q + S) (L + h) - (Q + S) (L + h) + W \times k \text{ جب } h \\ = [2(Q + S)h + W \times k] \text{ جب } h$$

اس جملہ کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ  $h$  اور  $k$  کی قیمتیں بڑی سے بڑی ہوں۔



چونکہ ترازو کی حساسیت کم اور کم کے چھوٹا ہونے پر موقوف ہے اور اس کا قانچہ تعادل ہونا ان کے بڑا ہونے کا مقتضی ہے اس لئے ہم دیکھتے ہیں کہ ترازو کا احساس ہونا اور جلدی تولنا ایک حد تک ایک دوسرے کے متقاضی ہیں۔ عملاً یہ متقاضی کوئی زیادہ اہمیت نہیں رکھتا۔ کیونکہ جن ترازوؤں میں بہت حساسیت کی ضرورت ہوتی ہے (مثلاً تجربہ چسانہ کی ترازوؤں میں) وہاں جلدی تولنے کی خوبی کو چھوڑ سکتے ہیں۔

برعکس اس کے تجارتی اغراض کے لئے جن ترازوؤں کو استعمال کیا جاتا ہے ان میں حساسیت کی چند ان ضرورت نہیں ہوتی۔ جہاں تک ممکن ہو سکے حساسیت اور جلد تولنا دونوں خوبیوں کے حصول کے لئے ترازو کی ڈنڈی کے بازوؤں کو ہلکا اور کافی لمبا بنانا چاہیئے اور نیز ڈنڈی سے نصاب کا فاعلہ کافی بڑا ہونا چاہیئے۔

۳۳۵۔ دو ہرے تولنے کے طریقے سے کسی جسم کا وزن ٹھیک ٹھیک معلوم ہو سکتا ہے خواہ ترازو صحیح نہ بھی ہو۔

ایک پلڑے میں جسم رکھو اور دوسری طرف مٹی یا کوئی چیز ڈال کر ڈنڈی کو متوازی الافق کرلو۔ اب جسم کو ہٹا کر اس کی بجائے باٹ رکھ کر دیکھو کہ کتنے وزن کے باٹ ڈنڈی کو حسب سابق متوازی الافق بنانے کے لئے درکار ہوتے ہیں یہ باٹ جسم کے وزن کو تعبیر کرینگے۔

جب کسی چیز کے وزن کو بہت صحت کے ساتھ معلوم کرنا مقصود ہوتا ہے تو نہایت عمدہ ترازوؤں کے باوجود یہی طریقہ استعمال کیا جاتا ہے اس طریقہ کو بورڈ کا طریقہ کہتے ہیں۔

۳۳۶۔ تک۔ معمولی تک جسے رومی تک بھی کہتے ہیں ایک قسم کی مشین

ہوتی ہے جسے اجسام کے تولنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے اس میں ایک سلاخ اب ہوتی ہے جو ایک ثابت نصاب ج کے گرد گھوم سکتی ہے۔

نقطہ ا پر ایک ہک

یا کنڈا ہوتا ہے (بعض

اوقات ایک پلڑا ہوتا

ہے) جس میں تولنے

والا جسم رکھا جاتا ہے۔

بازوج ب

پرایک وزن ق

آویزاں ہوتا ہے جو

ادھر ادھر حرکت

کر سکتا ہے۔ پلڑے

پر کے جسم کا وزن معلوم

کرنے کے لئے یہ

دیکھنا پڑتا ہے کہ ڈنڈی

کو متوازی الافق

کرنے کے لئے وزن ق کو کس مقام پر رکھا جائے۔ بازوج ب پر نشانات

لگے ہوتے ہیں اور وہ نشان جہاں ق ٹھیرنے سے توازن پیدا ہوتا ہے جسم

کے وزن کو تعبیر کرتا ہے۔

فرض کرو کہ تک اور پلڑے کا وزن و ہے اور ڈنڈی کا وہ نقطہ جس میں سے و

عمل کرتا ہے ث ہے ڈنڈی کو بالعموم اس طرح بنایا جاتا ہے کہ ث چھوٹے بازو

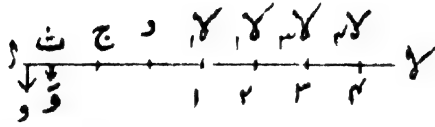
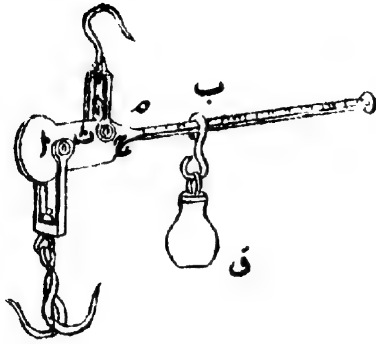
ا ج پر واقع ہوتا ہے۔

جب پلڑے میں کوئی وزن نہ ہو تو فرض کرو کہ وہ مقام جس پر ڈنڈی کو متوازی

الافق کرنے کے لئے ق کو رکھنا پڑتا ہے ہر ہے۔ ج کے گرد معیار اثر لینے سے

$$و \times ث ج = ق \times ج ہ - - - - - (۱)$$

اس شرط سے نقطہ ہر کا مقام معلوم ہو جاتا ہے جو ہماری درجہ بندی کا صفر مقام ہے۔

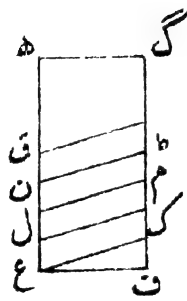
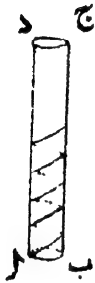






ع ک، ل، م، ن، ط، ..... کو لاؤ۔

اس مستطیل کو اسطوانہ کے گرد اس طرح لپیٹ کر نقطہ ع اسطوانہ کے نقطہ ل پر منطبق ہو جائے اور کنارہ ع ہ خط ل د پر پڑے۔ تب نقطہ ف نقطہ ع سے نقطہ ل پر منطبق ہو جائے گا۔ اور خطوط ع ک، ل، م، ن، ط، ..... اسطوانہ کی سطح پر ایک مسلسل چکر دار خط بن جائیں گے۔ اب اگر ہم فرض کریں کہ اس چکر دار خط کے ہر مقام پر دو صحت تھوڑا سا ابھرتی رہے تو اس سے بیس بیج کی چوڑی حاصل ہو جائیگی ظاہر ہے کہ بیج کی چوڑی اسطوانہ پر



لپیٹی ہوئی ایک ایسی مائل سطح ہے جس کا میلان اس کے ہر نقطہ پر مساوی ہے۔ اور زاویہ ک ع ف کے برابر ہے۔ اس زاویہ کو بالعموم بیج کا زاویہ کہتے ہیں اور دو مسلسل چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کو بیج کے محور کے متوازی ناپا جائے بیج کی گھائی کہتے ہیں۔ بعض مسنفین بیج کی گھائی کی تعریف یوں بھی کرتے ہیں

کہ بیج کی گھائی سے دو فاصلہ مراد ہوتا ہے جو کوئی نقطہ محور کے متوازی طے کرتا ہے جبکہ اس نقطہ کو بیج پر اکائی زاویہ میں سے گھایا جائے۔ اس تعریف کی رو سے

$$\frac{\text{ک ف}}{\pi r} = \text{گھائی}$$

$$\text{نیز مس (بیج کا زاویہ)} = \frac{\text{ف ک}}{\text{ع ف}}$$

دو متواتر چوڑیوں کے درمیان فاصلہ

= اس دائرہ کا محیط جس کا نصف قطر برابر ہے بیج پر کے کسی نقطہ کا محور سے فاصلہ

عملاً چوڑیوں کے بیج کی تراشیں مختلف شکلوں کی ہوتی ہیں۔ لیکن یہاں ہم

صرف اسی صورت پر غور کریں گے جس میں تراش مستطیلی ہو۔

۲۳۹۔ بیج بالعموم ایک ثابت قالب میں عمل کرتا ہے، اس قالب کے اندر بیج کی چوڑی کی شکل والی ایک نمائی کھدی ہوتی ہے اور بیج کی چوڑی اس نمائی میں پھسلتی ہے۔ بیج صرف ایک ہی طرح سے حرکت کر سکتا ہے یعنی یہ اپنے محور کے گرد گھوم سکتا ہے اور ساتھ ہی اپنے طول کے متوازی آگے پیچھے ہٹ سکتا ہے۔ اگر بیج کو انتصاباً رکھا جائے اور اس کی چوٹی پر وزن رکھ دیا جائے تو بیج عام طور پر گھوم کر نیچے اترے گا۔ اس لئے اگر بیج کو متعادل رکھنا مقصود ہو تو اس پر کوئی نہ کوئی قوت لگانی پڑے گی۔ یہ قوت عام طور پر ایک افقی بازو کے ایک سرے پر لگائی جاتی ہے۔ جس کا دوسرا سرا بیج کے ساتھ استوار طور پر بیوست ہوتا ہے۔

۲۴۰۔ ایک چپکنے بیج میں طاقت اور وزن کا رشتہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ چوڑی کے کسی نقطہ کا بیج کے محور سے فاصلہ  $L$  ہے اور  $B$  (=  $L \sin \theta$ ) محور سے اس نقطہ کا فاصلہ ہے، جس پر طاقت  $Q$  لگائی جاتی ہے۔

اب بیج ان قوتوں کے زیر عمل تعادل میں ہے طاقت  $Q$ ، وزن  $W$  اور

قالب اور بیج کی چوڑیوں کے نقاط تماس پر تعادل۔

فرض کرو کہ بیج کی چوڑی کے مختلف نقطوں پر ثابت قالب کی وجہ سے جو

تعادل ہیں وہ  $S$ ،  $S'$ ،  $S''$ ،  $S'''$  ہیں۔

یہ تعادل سب کے سب بیج کی چوڑی پر عمود وار ہوں گے۔ کیونکہ بیج کو چپکنا فرض

کیا گیا ہے، لہذا جب بیج حرکت کرتا ہے تو یہ کوئی کام نہیں کرتے۔

طاقت  $Q$  کی ہر ایک کمزور دش

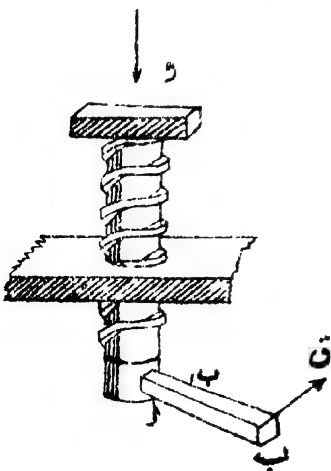
سے بیج دو مسلسل چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ

کے مساوی اور اٹھتا ہے۔ ہر ایک

کمزور دش میں طاقت جو کام برائے نام دیتی

ہے وہ = طاقت  $\times$  اس دائرہ کا محیط جو

طاقت کے بازو کا سر اترتے کرتا ہے اور



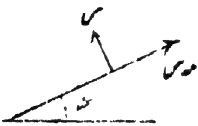
وزن کے خلاف جو کام سرانجام پذیر ہوتا ہے وہ  
 $= w \times$  دو مسلسل چوڑیوں کا درمیانی فاصلہ  
 کام کے اصول کی رو سے یہ دونوں مقداریں مساوی ہیں۔ اس لئے  

$$\frac{w}{Q} = \frac{\pi^2}{\pi^2 \times \text{مس عہ}} \frac{B}{C}$$

اس دائرہ محیط جس کا نصف قطر طاقت کے بازو کے مساوی ہے  
 پیچ کی دو مسلسل چوڑیوں کا درمیانی فاصلہ

۲۴۔ کھردرے پیچ کا تعادل۔ رگڑ کو ملحوظ رکھ کر پیچ کی صورت میں طاقت اور  
 وزن کا رشتہ معلوم کرو۔

دفعہ ۲۴ کی ترقیم کے مطابق فرض کرو کہ پیچ نیچے کی طرف حرکت کرنے کے عین  
 قریب ہے اور بناؤ علیہ رگڑ اوپر کی طرف چڑھنے کے ساتھ عمل کرتی ہے۔  
 قالب کے دباؤ کے انتصابی اجزائے ترکیبی



س (جم عہ + مد جب عہ)، س (جم عہ + مد جب عہ).....  
 ہیں اور ان دباؤں کے افقی اجزائے ترکیبی

س (جب عہ - مد جب عہ)، س (جب عہ - مد جب عہ).....  
 ہیں انتصاباً تحلیل کرنے اور پیچ کے محور کے گرد معیار اثر  
 لینے سے

$$w = (S + P + L + \dots) (جم عہ + مد جب عہ) \dots \dots (1)$$

$$Q \times P = (S + P + L + \dots) (جب عہ - مد جب عہ) \dots \dots (2)$$

$$\frac{Q \times P}{w} = \frac{جب عہ - مد جب عہ}{جم عہ + مد جب عہ} = \frac{جب (عہ - لہ)}{جم (عہ - لہ)}$$

$$\therefore \frac{ق}{و} = \frac{ل}{ب} \text{ مس (عہ - لہ)}$$

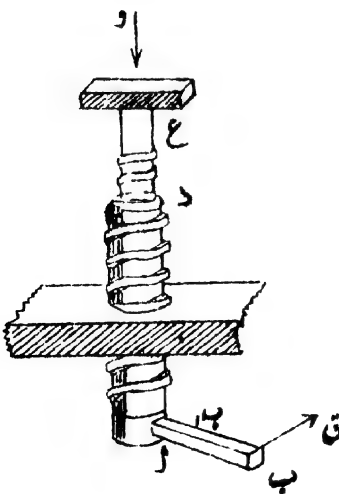
اسی طرح اگر تیج اوپر کی طرف حرکت کرنے کے عین قریب ہو تو مس کی علامت کو بدلنے سے

$$\frac{ق}{و} = \frac{ل}{ب} \times \frac{\text{جب عہ} + \text{مس جم عہ}}{\text{جم عہ} - \text{مس جب عہ}} = \frac{ل}{ب} \text{ مس (عہ + لہ)}$$

اگر طاقت کی مقدار ق اور ق کے درمیان ہو تو تیج متبادل رہے گا لیکن اس صورت میں رگڑ انتہائی رگڑاٹنہ ہوگی۔ یہ بات قابل غور ہے کہ اگر تیج کا زاویہ عہ رگڑ کے زاویہ لہ کے مساوی ہو تو طاقت صفر ہو جائیگی۔ اس صورت میں بغیر کسی بیرونی طاقت کے لگانے کے تیج صرف رگڑ کی وجہ سے جو تیج کی بوڑھی کے ساتھ عمل کرے گی متبادل رہیگا۔ اگر عہ > لہ تو ق منفی ہوگی یعنی تیج خود بخود نیچے نہیں اترے گا بلکہ اس کو نیچے اتارنے کے لئے طاقت لگانی پڑے گی۔

۲۴۲۔ نظری طور پر تیج کی صورت میں تیج کی چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کو خرابی کم کرنے سے مفاد جیسی کو بتنا بڑا چاہیں بنا سکتے ہیں مگر عملی طور پر ایسا کرنا ممکن نہیں کیونکہ اگر جم چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کو بہت کم کر دیں تو چوڑی ان دباؤں کو جو اس پر پڑے ہیں برداشت کرنے کے قابل نہیں رہے گی۔

ہنٹر کے فرتی تیج میں اس نقص کو رفع کر دیا گیا ہے۔ اس مشین میں ایک تیج لڈ ہوتا ہے جو ایک ثابت قالب کے اندر پھرتا ہے۔ تیج لڈ کا اندرونی حصہ کھوکھلا ہوتا ہے اور اس کے اندر ایک نالی کھدی ہوتی ہے۔ اس نالی میں ایک اور چھوٹا تیج د ع حرکت کرتا ہے۔ تیج د ع، ع پر ایک قالب کے ساتھ اس طرف بند ہوتا ہے کہ گھوم نہیں سکتا





بلکہ صرف اپنے طول کی سمت میں حرکت کیسکتا ہے۔

جب طاقت کا بازو ڈب ایک مکمل گردش کرتا ہے تو باہر کا پیچ اپنے دو مسلسل چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کے مساوی فاصلہ اوپر چڑھتا ہے اور ساتھ ہی چھوٹا پیچ داخل اپنے دو مسلسل چوڑیوں کے درمیانی فاصلہ کے برابر بڑے پیچ کے اندر نیچے آتا ہے۔ اس لئے مجموعی طور پر چھوٹا پیچ اور بڑا علیہ وزن دونوں چوڑیوں کے درمیانی فاصلوں کے فرق کے مساوی فاصلہ پر اوپر چڑھتا ہے۔ اس لئے حسب دفعہ ۳۲۰ اگر پیچ چکے ہوں تو کام کے اصول سے

$$\frac{9}{32} = \frac{32}{32} \text{ اس سے } 32 \text{ اس سے } 32 \text{ اس سے}$$

اس دائرہ کا محیط جو طاقت کے بازو کا سرا مرسم کرتا ہے

دونوں پیچوں کی گھائیوں کا فرق

دونوں پیچوں کی مستقل چوڑیوں کے درمیانی فاصلوں کے فرق کو حسب منشاء کم کرنے سے ہم متین کو کمزور کرنے کے بغیر مفاد جیل کو جتنا بڑا چاہیں بنا سکتے ہیں۔

۳۴۴-۲- فائدہ - دات یا لوہے کا ایک پیر ہوتا ہے جسکی دو مستوی سطحیں ایک تیز دہار پر ملتی ہیں۔ فائدہ لکڑیوں یا دیگر سخت چیزوں کو چیرنے کے کام آتا ہے ہتھوڑی سے اس کے اوپر سے رخ پر مسلسل ضربیں لگانے سے اس کی تیز دہار کو اندر دھکیلا جاتا ہے۔

فائدہ کے عمل کی تحقیق دراصل علم حرکت کا سوال ہے۔

ہاں ہم اس مسئلہ پر صرف سکونی نقطہ

نظر سے غور کریں گے یعنی یہ دیکھیں گے کہ

اس کے اوپر کے رخ پر کس قدر یکساں

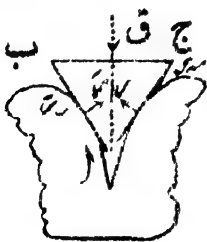
طاقت لگانے سے اسے تعادل میں رکھا

جاسکتا ہے۔ ساتھ ہی شکل میں اب ج

ایک ایسے فائدہ کی تراش ہے جس کے رخ

اس کے قاعدہ ب ج کے ساتھ مساوی

میلان رکھتے ہیں۔



فرض کرو کہ زاویہ ج ا ب = ۴۰

فرض کرو کہ اس کے اوپر کے رُخ پر قوت قی لگائی گئی ہے، مہر اور مہر خانہ کے اُن نقطوں پر عمادی تعادل ہیں جہاں یہ لکڑی سے مس کرتا ہے۔ مہر، مہر اور مہر رگڑ کی قوتیں ہیں جو کہ خانہ کے نیچے اترنے کے عین قریب ہونے کی صورت میں اوپر کی طرف عمل کرتی ہیں۔ نیز فرض کرو کہ قوت قی، خط ب ج کے وسطی نقطہ پر ب ج کے علی القواہم سمت میں عمل کرتی ہے اور خانہ کا وزن بمقابلہ قی کے بہت چھوٹا ہے اور اس لئے نظر انداز ہو سکتا ہے۔

بج کی سمت میں اور اس کی عمودی سمت میں تحلیل کرنے سے

مسرح جب  $\frac{ع}{۲}$  - مرحم  $\frac{ع}{۲}$  = مسرح جب  $\frac{ع}{۲}$  - مسرحم  $\frac{ع}{۲}$  " " " (۱)

اگر چہ کہ تو ق مثبت ہوگا

اگر چہ کہ تو ق منفی ہوگا اور فائدہ اوپر نکلنے کے قریب ہوگا اگر اس کی بالائی سطح پر اوپر کی طرف قوت لگائی جائے۔  
اگر چہ کہ تو فائدہ بغیر کسی قوت لگانے کے عین پھنسا رہیگا۔

۲۴۵۔ سطح مائل۔ جیل طاقت کے نقطہ نظر سے سطح مائل ایک ایسی اسٹوڈر سطح مستوی کو تعبیر کرتی ہے جو افق کے ساتھ کوئی میلان رکھتی ہو۔

سطح مائل دزنی اجسام کو اٹھانے کے لئے کام میں لائی جاتی ہے۔ سطح مائل پر ایک ذرہ کے تعادل کے مسئلہ پر اس سے قبل دفات ۸ تا ۸۰ میں بحث ہو چکی ہے۔ معلوم کر دیکھو درسی سطح مائل پر سطح مذکورہ کے متوازی قوت کے زیر عمل ایک جسم کو اوپر کی طرف کھینچنے میں کس قدر کام کرنا پڑتا ہے۔

دفعہ ۸ کے مطابق قوت ق، جو جسم کو سطح مستوی کے اوپر کھینچنے کے لئے عین کافی ہو = و (جب ع + م جم ع)

اس لئے وہ کام جو اس کو اس سے ج تک لیجانے میں کیا جاتا ہے

$$= ق \times ل ج = و \times ل ج جب ع + م \times و \times ل ج جم ع = و \times ب ج + م \times و \times ا ب =$$

وہ کام جو سطح مائل کے بغیر جسم کو اتنی ہی اونچائی میں سے اوپر انتہائاً کھینچنے میں کرنا ہوتا ہے + وہ کام جو جسم کو سطح مائل کے مساوی کھر درسی افقی سطح پر مائل سطح کے قاعدہ کے برابر فاصلہ میں سے کھینچنے میں کرنا پڑتا ہے۔

۲۴۶۔ دفعہ قبل سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ طاقت جو کام انجام دیتی ہے وہ اس کام سے زیادہ ہوتا ہے جو کہ دزن کے خلاف عمل میں آتا ہے۔ یہ بات ہر مشین کے لئے درست ہے۔ اس اصول کو حسب ذیل الفاظ میں بیان کیا جاسکتا ہے۔

کسی مشین میں طاقت جو کام انجام دیتی ہے وہ مساوی ہوتا ہے اس کام کے جو وزن کے خلاف کیا جائے مگر اس کام

کے جو مشین کی مزا حسنتوں کے خلاف کیا جائے معہ اس کام کے  
جو مشین کے جزوی حصول کے اوزان کے خلاف کیا جائے۔  
کسی مشین میں وزن کے خلاف کام کو کل کام سے جو نسبت ہوتی ہے مشین  
کی استعداد کہلاتی ہے۔ پس

$$\text{استعداد} = \frac{\text{مشین کا مفید کام}}{\text{مشین پر کا کل کام}}$$

فرض کر دو کہ رگڑ کے نہ ہونے کی صورت میں جو طاقت درکار ہوتی ہے وہ ق  
بے اور دراصل طاقت ق لگائی جاتی ہے۔ تب دفعہ ۲۱۱ کی نو سے

وزن کے خلاف جو کام کیا جاتا ہے وہ  
= ق × وہ فاصلہ جس میں سے ق کا نقطہ عمل حرکت کرتا ہے اور وہ کام جو  
مشین پر صرف ہوا

= ق × وہ فاصلہ جس میں سے ق کا نقطہ عمل حرکت کرتا ہے  
پس تقسیم کرنے سے

$$\text{استعداد} = \frac{\text{ق}}{\text{ق}} = \frac{\text{طاقت جب کہ رگڑ موجود نہ ہو}}{\text{طاقت جب کہ رگڑ موجود ہو}}$$

ہم نہ تو کبھی مزا حسنت کی قسم کی قوتوں سے پورے طور پر نجات حاصل کر سکتے ہیں،  
اور نہ ہی مشین کو ایسا بنا سکتے ہیں کہ اس کے پرزے بالکل بے وزن ہوں اس کا نتیجہ  
یہ ہوتا ہے کہ ان دو وجوہ سے کچھ نہ کچھ کام ضرور ضائع ہوتا ہے۔ پس کسی مشین کی  
استعداد کبھی اکائی تک نہیں پہنچ سکتی۔ لیکن استعداد اکائی کے جس قدر قریب  
ہوگی اتنی ہی مشین زیادہ اچھی سمجھی جائے گی۔

کوئی مشین ایسی نہیں جس کی مدد سے کام پیدا کیا جاسکے اور عملاً مشین خواہ کتنی  
بھی بے رگڑ اور کم وزن کیوں نہ ہو کچھ نہ کچھ کام ہمیشہ ضائع ہوتا ہے۔ مشین کا فائدہ صرف  
اس قدر ہوتا ہے کہ اس کی مدد سے طاقت کے اتار کو زیادہ موثر بنایا جاسکتا ہے اور ساتھ  
ہی قوت کے عمل کرنے کے لئے جو فاصلہ درکار ہوتا ہے اس میں بھی نسبتاً مناسب

فاصلہ سے کمی کی جا سکتی ہے۔

۲۴۷۔ عملی طور پر مشینوں کے چلنے میں رگڑ کا اثر اس قدر زیادہ اور اہم ہوتا ہے کہ نظری تحقیقات زیادہ مفید ثابت نہیں ہوتی اور کسی خاص مشین کی صورت میں نتائج کو نظری تحقیقات پر نہیں بلکہ تجربہ پر مبنی کرنا پڑتا ہے۔ اس کا طریقہ ہمہ قسم کی مشینوں کے لئے یکساں ہے۔

رفتاری نسبت تجربہ سے معلوم ہو سکتی ہے۔ کیونکہ سب مشینوں میں یہ نسبت ان فاصلوں کی کسر کے مساوی ہوتی ہے جو بالترتیب طاقت اور وزن ایک ہی وقت میں طے کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ نسبت  $N$  کے مساوی ہے۔

نیز فرض کرو کہ جو وزن اٹھایا جاتا ہے وہ  $W$  ہے۔ تب نظری طاقت  $Q$  جب کہ رگڑ بالکل نہ ہو  $\frac{Q}{W}$  ہوگی۔ تجربہ سے طاقت کی وہ حقیقی قیمت  $Q'$  معلوم کر دو جو وزن  $W$  کو اٹھانے کے لئے عملاً عین کافی ہونی ہے تب حقیقی مفاد و مصلیٰ  $\frac{Q'}{Q}$  ہوگا اور مشین کی استعداد دفعہ ۲۴۶ کی رو سے  $\frac{Q'}{Q}$  ہوگی۔

۲۴۸۔ مثال کے طور پر تجربہ خانہ کے ذریعہ چرخ اور محور پر غور کرو جس پر کچھ تجربہ کئے گئے تھے۔ تجربہ کے وقت مشین ابھی حالت میں نہیں تھی اور قبل ازاں صاف نہیں کی گئی تھی اور اس کے یا اس کی چرخوں کے سہاروں کے مقاموں پر کوئی چکنائی کی چیز نہیں لگائی گئی تھی۔

دفعہ ۲۴۹ کی ترقیم کے مطابق  $\frac{Q}{W}$  اور  $\frac{Q'}{Q}$  کی قیمتیں  $\frac{1}{4}$ ،  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{3}{4}$  اور  $\frac{1}{3}$  لیجئے

$$\text{تھیں۔ پس رفتاری نسبت کی قیمت } N = \frac{2}{1 - \frac{Q'}{Q}} = 9$$

اس قیمت کی تصدیق تجربہ سے بھی کی گئی کیونکہ یہ دیکھا گیا ہے کہ جب  $Q$  فاصلہ

۹ لیچ نیچے اترتا ہے تو دھڑا ایک لیچ اوپر جڑھتا ہے

$Q$  کی قیمت پڑے میں رکھے ہوئے باٹوں سے دریافت کی گئی تھی اور پڑے

کا وزن بھی قوت ق میں شریک کر لیا گیا تھا۔ اس طرح بوجھ و کے لئے اس چرخ کی وزن بھی جس کے ساتھ بوجھ و بندھا ہوا تھا و کی قیمت میں شامل کر لیا گیا تھا۔ ق اور و کی جو متناظر قیمتیں گرام وزن میں حاصل ہوئیں وہ ذیل کی جدول میں درج ہیں۔ اس میں ق کی وہ قیمتیں درج ہیں جو بوجھ و کو اٹھانے کے لئے عین کافی نہیں۔ تیسرے کالم میں ق کی (یعنی اُس طاقت کی جو رگڑ کے نہ ہونے کی صورت میں درکار ہوتی) متناظر قیمتیں دکھائی گئی ہیں۔

و	ق	ق = $\frac{ق}{و}$	د = $\frac{ق}{ق}$	م = $\frac{و}{ق}$
۵۰	۲۸	۵۵۵۵	۶۲	۱۵۷۹
۱۰۰	۳۶	۱۱۱۱	۳۱	۲۵۷۸
۱۵۰	۴۵	۱۶۶۶	۳۶	۳۵۷۳
۲۰۰	۶۰	۲۶۶۷	۴۶	۴۵۷۷
۲۵۰	۹۰	۵۰	۵۶	۵
۳۰۰	۱۱۹	۷۲۶۲	۶۱	۵۵۶۶
۳۵۰	۱۳۷	۹۴۶۴	۶۴	۵۵۷۸
۴۰۰	۱۷۵	۱۱۶۶۷	۷۷	۶
۴۵۰	۲۰۳	۱۳۸۵۸	۷۸	۶۵۱۶
۵۰۰	۲۳۲	۱۶۱۱۱	۷۹	۶۵۲۵

چوتھے کالم میں د یعنی استعداد کی قیمتیں مندرج ہیں اور آخری کالم میں مفاد حیل کی م کی متناظر قیمتیں مندرج کی گئی ہیں۔

اوپر کے نتیجوں کو مربع دار کاغذ پر مرتب کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ ق اور و کی متناظر قیمتیں تقریباً ایک ہی خط مستقیم پر واقع ہوتی ہیں جو تیسرے اور آخری نقطہ میں سے گزرتا ہے پس ق اور و کا رابطہ اس شکل کا ہے  $ق = و + ب$

جہاں ۱ اور ب مستقل ہیں۔

نیز ق = ۴۵ جبکہ و = ۱۵۰ اور ق = ۲۳۲ جبکہ و = ۱۴۵۰

اس لئے  $\frac{1}{4} = \frac{1}{1450}$ ، ب = ۲۳۲ تقریباً اس لئے ق = ۲۳۲ + ۱۴۵۰

نیز ق =  $\frac{1}{4} = \frac{1}{1450}$  و

$$\text{لہذا د} = \frac{\text{ق}}{\frac{1}{4} = \frac{1}{1450}} = \frac{1450 \times \text{ق}}{1}$$

$$\text{اور م} = \frac{\text{و}}{\frac{1}{4} = \frac{1}{1450}} = \frac{1450 \times \text{و}}{1}$$

ان سے د اور م کی قیمتیں و کی کسی قیمت کے جواب میں حاصل ہو سکتی ہیں۔ جیسے جیسے و بڑھتا جاتا ہے د اور م کی قیمتیں بھی بڑھتی جاتی ہیں اگر و کی تمام قیمتوں کے لئے د کی مذکورہ بالا قیمت کو درست تسلیم کیا جائے تو د کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جبکہ و کی قیمت لانا بہت بڑی ہو جائے اور اس وقت د تقریباً ۷۷ ہوگا۔ پس اس مشین میں جو کام کیا جاتا ہے اس کا کم از کم ۲۳ فیصدی ضائع ہو جاتا ہے۔

پس مفاد چلی کی بڑی سے بڑی قیمت =  $\frac{1}{1450}$  تقریباً ۷

اگر استعمال سے پہلے مشین کو اچھی طرح صاف کر کے چکنا بنالیا جاتا تو بالضرور مقابلہ اس سے بہت اچھے نتائج حاصل ہوتے۔

۲۴۹۔ دفوا قبل کی مثال کے مانند دیگر مشینوں میں بھی حقیقی استعداد اکائی سے بہت کم ہوتی ہے۔

جن مشینوں کی استعداد بہت کم ہوتی ہے ان سے عموماً ایک عملی فائدہ حاصل ہوتا ہے۔ یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ جن مشینوں میں رگڑ کی مقدار قوت کی مقدار پر منحصر نہیں ہے ان میں کسی طاقت کے موجود نہ ہونے کی صورت میں وزن خود بخود نیچے نہیں اترے گا بشرطیکہ استعداد  $\frac{1}{4}$  سے کم ہو۔ ہر قسم کی مشینوں کی مثال ایک ایسا بیج ہو سکتا ہے جس کا زاویہ چھوٹا ہو اور جس کی طاقت دفنہ ۲۴۱ کی طرح افق

کے متوازی عمل کرے یا ایک سطح مائل ہو سکتی ہے جس میں طاقت سطح مائل کے ساتھ اوپر کی طرف عمل کرے۔

اُن مشینوں میں جن میں رگڑ کی مقدار طاقت پر موقوف ہوتی ہے ایسا کوئی عام قاعدہ نظری طور پر ثابت نہیں کیا جاسکتا اور ہر ایک صورت پر جدا گانہ غور کرنا چاہیے لیکن جن مشینوں میں قوت کا رگڑ کی مقدار پر کم اثر پڑتا ہے ان کے لئے ہم تقریبی طور پر یہ اصول قرار دے سکتے ہیں کہ وزن نیچے نہیں اترے گا بشرطیکہ استعداد  $\frac{1}{2}$  سے کم ہو ایسی مشینوں کے بارے میں کہتے ہیں کہ یہ بازگشت یا الٹ مار نہیں کرتی۔

مثلاً دفعہ ۳۰ کی معمولی فرنی چرخی کی استعداد  $\frac{1}{2}$  سے کم ہوتی ہے اور طاقت کی عدم موجودگی میں یعنی جبکہ مشین کو چھوڑ دیا جائے اور رسی کو ڈھیل کر دیا جائے تو بھی بوجھ و خود بخود نیچے نہیں اترے گا۔ مشین کے عدم بازگشت ہونے کی خوبی سے بہت حد تک مشین کی کم استعدادی کی تلافی ہو جاتی ہے۔

فرنی چرخ اور محور میں مفاد اصلی اکثر زیادہ ہوتا ہے اور بناءً علیہ استعداد بالعموم  $\frac{1}{2}$  سے کافی زیادہ ہوتی ہے، لیکن چونکہ اس میں وزن خود بخود نیچے اتر سکتا ہے، اس لئے اسے عملی طور پر ہمیشہ فرنی چرخی سے زیادہ سودمند مشین تصور نہیں کیا جاسکتا۔ جو طالب علم عملی طور پر مشینوں کے استعمال کے متعلق مزید واقفیت حاصل کرنا چاہتا ہے وہ سررا برٹ بال کی کتاب ”تجربی حرکیات“ کا مطالعہ کرے۔

## مثالیں

۱۔ ایک چرخ اور محور کے مرکز نقل کا فاصلہ اس کے محوری خط سے  $\frac{1}{2}$  ہے، ثابت کرو کہ مشین ایسی حالت میں ساکن رہ سکتی ہے جس میں اس کے محوری خط اور مرکز نقل میں سے گزرنے والی سطح مستوی سمت انتصابی کے ساتھ زاویہ  $\frac{1}{2}$  سے کم زاویہ بنائے جہاں جب  $\frac{1}{2}$  ہے جب کہ اس میں ب محور کا نصف قطر اور ذرگڑ کا زاویہ ہے۔

۲۔ ایک ترازو کے بازو مساوی طول کے ہیں اور ڈنڈی پر مختلف وزن ہیں، اگر ایک جسم کو باری باری سے ہر ایک بازو میں رکھ کر توازن قائم کر دو کہ اس کا اصلی وزن اس کے ظاہری وزنوں کے حسابی اوسط کے مساوی ہوگا۔



۳۔ ایک ترازو کے بازو غیر مساوی طول کے ہیں لیکن جب ڈنڈی کے سروں پر کوئی وزن نہ ہو تو ڈنڈی افق کے متوازی رہتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر کسی جسم کو باری باری سے دونوں پلڑوں میں رکھ کر توا لاجائے تو اس کا اصلی وزن اس کے ظاہری وزنوں کا منبذی اوسط ہوگا۔

نیز ثابت کرو کہ اگر کوئی دوکاندار اس ترازو کے دونوں پلڑوں میں باری باری سے کوئی چیز تول کر دے تو خود اس کو نقصان ہوگا۔

۴۔ ایک ترازو کے پلڑوں کے وزن غیر مساوی ہیں اور ڈنڈی کے بازوؤں کے طول بھی غیر مساوی ہیں۔ اگر ایک دوکاندار کسی خریدار کو کوئی شے مساوی حصوں میں دونوں پلڑوں سے طول کر دے تو ثابت کرو کہ اسے خود نقصان ہوگا اگر ڈنڈی کا مرکز ثقل بے بازو کے اندر ہو۔

۵۔ ایک معمولی تک کی درجہ بندی اس مفروضہ کی بنا پر کی گئی ہے کہ اس کا اپنا وزن ق ہے اور محرک راکب کا وزن و ہے۔ مگر یہ دونوں مفروضے غیر صحیح ہیں۔ اگر دو جسموں کے اصلی وزن سہ اور سہ ہوں اور ظاہری وزن سہ + لا اور سہ + ما ہوں تو ثابت کرو کہ قابل حرکت وزن اور تک کے وزن بالترتیب ان کی مفروضہ فیمتوں سے بقدر  $\frac{2}{3}$  (لا - ما) اور

$\frac{2}{3}$  (لا - ما) -  $\frac{1}{3}$  (سہ ما - سہ لا) کے کم ہیں جہاں  $سہ = سہ + سہ + لا - ما$  اور سہ اور لا بالترتیب وہ خالصے ہیں جو لصاب سے (دونوں ایک ہی سمت میں) سلاخ کے مرکز ثقل تک اور شے کے نقطہ آویزش تک ناپے گئے ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ اگر کسی جسم کا اصلی وزن سہ ہو تو اس کا ظاہری وزن ہوگا

$$سہ + \frac{سہ (لا - ما) + سہ ما - سہ لا}{سہ - سہ}$$

۶۔ ثابت کرو کہ بیچ کی استعداد بڑی سے بڑی ہوگی جب کہ اس کا زاویہ ۵۴° - ۵۶° ہو۔ رگڑ کی موجودگی میں کسی بوجھ کو اٹھانے کے لیے جو طاقت درکار ہوتی ہے وہ

$$= و \times \frac{1}{3} \text{ مس (و + ل)}$$

اور جب رگڑ موجود نہ ہو تو طاقت

$$= 9 \times \frac{1}{11} \text{ مس ع}$$

مطلوبہ استعداد ان کی نسبت ہوتی ہے۔ پس

$$\text{استعداد} = \frac{\text{مس ع}}{\text{مس (ع + ل) - جب (۲ ع + ل) - جب ل}}$$

$$= \frac{۲ \text{ جب ل}}{۱ - \text{جب (۲ ع + ل) + جب ل}}$$

استعداد کی قیمت بڑی سے بڑی ہوگی جب  $۲ ع + ل = ۹۰$

۷۔ چرخوں کے دوسرے نظام میں ہر دو قالب میں دو چرخیاں ہیں۔ بتاؤ کہ ۳۰ پونڈ کا بوجھ اٹھانے کے لئے کتنی طاقت درکار ہوگی؟ اگر رگڑ کی وجہ سے کوئی طاقت اُس وزن کا جو یہ رگڑ کی عدم موجودگی میں اٹھا سکتی ہے صرف ۴۵ گنا وزن اٹھا سکے تو بتاؤ کہ کتنی طاقت درکار ہوگی۔

[۷۵ پونڈ،  $\frac{۲}{۳}$  ۱۶۶ پونڈ]

۸۔ چرخوں کے دوسرے نظام میں رفتاری نسبت ۸:۱ ہے، رگڑ اس قدر ہے کہ طاقت کا صرف ۵۵ فیصد حصہ مفید کام انجام دے سکتا ہے۔ بتاؤ کہ کتنی طاقت ہینڈ ویٹ وزن اٹھانے کے لئے درکار ہوگی۔

(جواب  $\frac{۱۳}{۲۲}$  ہینڈ ویٹ)

۹۔ ایک پیچ جاک میں بوجھ کی قیمتیں بالترتیب ۱۵۰، ۱۸۰، ۲۱۰، ۲۴۰

اور ۲۷۰ پونڈ ہیں اور طاقت ق کی تناظر قیمتیں ۲۰۰، ۲۲۰، ۲۵۰، ۲۸۰ اور ۳۱۰ پونڈ وزن ہیں۔

یہ فرض کر کے کہ  $۱ + ب + و$ ، ا اور ب کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

[۵۵۳، ۵۹۷]

۱۰۔ چرخوں کے دوسرے نظام میں مزاحمت و اور طاقت ق کی تناظر قیمتیں حسب ذیل ہیں، وزن میں نیچے کے قالب کا وزن بھی شامل ہے۔

$$9 = 145, 145, 145, 145, 145, 145, 145, 145, 145, 145$$

$$ق = 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52$$

نیز نیچے کے طالب میں پانچ رسیاں ہیں۔ ق اور و کے درمیان تقریبی رشتہ معلوم کرو اور استعداد اور مفاد حیل کی متناظر قیمتیں معلوم کرو۔  
ق، ق، استعداد اور مفاد حیل اور و کی ترتیبیں بھی بنو

$$[ق = 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42]$$

۱۱۔ ایک حالہ پر سکے بوجھ اور طاقت کی قیمتیں ذیل کی جدول میں دکھائی گئی ہیں

$$بوجھ (رٹن اکائیوں میں) ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۰، ۱۱$$

$$طاقت (پونڈ وزن میں) ۹، ۲۰، ۲۸، ۳۷، ۴۲، ۴۵، ۵۱$$

طاقت اور وزن کا رشتہ تقریبی طور پر معلوم کرو اور ۵ اور ۱۰ ان بوجھ کے لئے استعداد چھو کرو۔ یہ معلوم ہے کہ رفتار کی نسبت ۵ ہے۔

$$[ق = 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42]$$

۱۲۔ ایک بیج جاک کی گھاٹی ۱۵ بیج ہے اور طاقت ۱۵ بیج بلے بیرم کے سرے پر علی القوام لگائی جاتی ہے، بوجھ کی قیمتیں ٹنوں میں اور طاقت کی متناظر قیمتیں پونڈوں میں جدول ذیل میں دکھائی گئی ہیں۔

$$بوجھ ۱، ۲، ۵، ۷، ۹، ۱۰، ۱۱$$

$$طاقت ۲۴، ۳۲، ۴۶، ۵۷، ۶۳، ۷۳، ۸۳$$

طاقت اور بوجھ کا رشتہ تقریبی طور پر معلوم کرو اور اس کی استعداد ۴ اور ۹ ٹن بوجھ کے لئے معلوم کرو

$$[ق = 185 + 55 + 95 + 59 + 49]$$

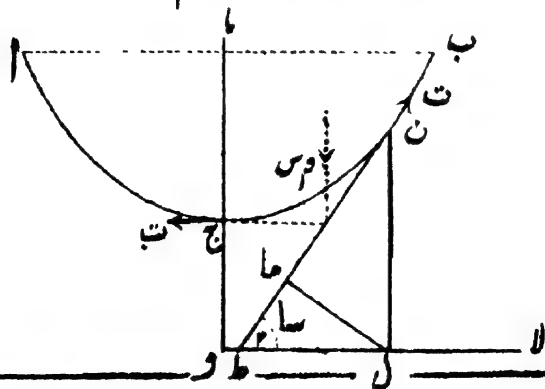
# تیرھواں باب

## رسیوں اور زنجیروں کا تعادل

۲۵۰۔ کامل طور پر مڑ سکنے والی رسی اس رسی کو کہتے ہیں جس کی کسی عمادی تراش پر کاغذ کا ایک قوت پر مشتمل ہو جس کی سمت رسی کے ماس کی سمت ہو۔ اس تراش کو اتنا چھوٹا فرض کرنا چاہیے کہ رسی محض ایک مخنی خط متصور ہو سکے۔ رسی اپنے کسی نقطہ پر مڑنے کے خلاف کوئی مزاحمت پیش نہیں کر سکتی اس لئے اس کی شکل میں کوئی استواریت نہیں ہے اگر کسی زنجیر کی کڑیاں بہت چھوٹی اور چکنی ہوں تو اسے بھی مڑ سکنے والی رسی تصور کیا جاسکتا ہے۔

ساتویں باب میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ کسی رسی میں جو مکمل طور پر مڑ سکنے والی نہ ہو یا تار کی صورت میں کسی عمادی تڑاؤ پر گئے تعامل صرف ایک ماسی قوت میں تحویل نہیں ہو سکتے بلکہ ایک جفت اور ایک پُر قوت میں تحویل ہو گئے ہیں۔

۲۵۱۔ ایک کیساں دزنی انکھیں سی جاؤ بہ ارض کے زیرِ عمل آزادانہ ٹٹک رہی ہے۔  
جس مخنی کی شکل یہ اختیار کرتی ہے اس کی مسادات معلوم کرو۔



فرض کرو کہ مخنی کا سب سے پختہ نقطہ ج ہے، اور ن رسی پر کا کوئی اور نقطہ ہے، ج ن قوس کا طول س ہے، فرض کرو کہ ن پر کا تناؤ ت اور ج پر کا تناؤ ت ہے۔

تب رسی کا حصہ ج ن، تناؤں ت اور ت اور اس حصہ کے وزن  $\times$  س کے زیر عمل متعادل ہے جہاں و رسی کے اکائی طول کا وزن ہے۔ اگر ن پر کے مماس کا میلان افق کے ساتھ سا ہو تو

$$\text{ت جم سا} = \text{ت} \quad (۱)$$

$$\text{ت جب سا} = \times \text{س} \quad (۲)$$

فرض کرو کہ سب سے پختہ نقطہ پر کا تناؤ و رسی کے طول ج کے وزن کے مساوی ہے، تب ت = و ج

$$\text{لہذا} \quad \text{مس سا} = \frac{\text{و س}}{\text{ت}} = \frac{\text{س}}{\text{ج}} \quad (۳)$$

یعنی  $\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{س}}{\text{ج}}$  بشرطیکہ لا اور ما کے محور انتصابی اور افقی ہوں تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ج}} \times \frac{1}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ج}} \times \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right]}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ج}} = \frac{\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}}}{1 + \left( \frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} \right)^2}$$

حکمل کرنے سے لو کہ  $\left[ \frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} + 1 + \left( \frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right] = \frac{\text{فرلا}}{\text{ج}}$  مستقل

اگر ما کا محور ج میں سے گزرے تو  $\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} = 0$  جبکہ لا = اس لئے مستقل بالاصغر ہے۔

$$\therefore \frac{ل}{ج} = \sqrt{\left(\frac{فر}{لا}\right)^2 + 1} + \frac{فر}{لا}$$

$$\text{اب} - \frac{فر}{لا} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{فر}{لا}\right)^2 + 1} + \frac{فر}{لا}} = \frac{ل}{ج}$$

اس لئے تقریب کرنے سے

$$\frac{فر}{لا} = \frac{1}{2} \left[ \frac{ل}{ج} - \frac{ل}{ج} \right] \quad (۴)$$

$$\text{تکمل کرنے سے} \quad \frac{ل}{ج} = \frac{1}{2} \left[ \frac{ل}{ج} + \frac{ل}{ج} \right] + 1$$

اگر مبداء انتط ج سے فاصلہ ج نیچے لیا جائے تو ما = ج، جب لا = ۰، اس لئے (۵)۔

ان محوروں کے لحاظ سے منحنی کی مساوات ہے

$$\frac{ل}{ج} = \frac{1}{2} \left[ \frac{ل}{ج} + \frac{ل}{ج} \right] = ج، \text{ جہز } \frac{ل}{ج} \quad (۵)$$

اس منحنی کو سادہ زنجیرہ کہتے ہیں۔ اور ولا کو اس کا مرتب کہتے ہیں۔

مساواتوں (۳) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$س = ج، مس = سا = ج، \frac{فر}{لا}$$

$$= \frac{ل}{ج} = \frac{1}{2} \left[ \frac{ل}{ج} - \frac{ل}{ج} \right] = ج، \text{ جہز } \frac{ل}{ج} \quad (۶)$$

ان دو مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{ل}{ج} = ج + س \quad (۷)$$

اس نتیجہ کو مساوات (۳) کے ساتھ ملانے سے

$$\frac{ل}{ج} = ج + س = ج، مس = سا \quad (۸)$$

اگر ن سے معین ن ل کھینچا جائے اور ل ما عمود ہوں ط پر تو زاویہ  
صال ن = سا

اور اس لئے (۸) سے

ل ما = ج = وج

اور ن ما = س = قوس ج ن  
اب (۱) سے حاصل ہوتا ہے

ت = وج = قس سا = و ما

یعنی زنجیرہ کے کسی نقطہ ن پر کتنا ذرہ سی کے اس طویل کے وزن کے مساوی ہوتا  
ہے جو نقطہ ن اور مرتب کے درمیان عمودی فاصلہ کے برابر ہو مقدار ج کو جس سے  
زنجیرہ کا ناپ متعین ہوتا ہے اس کا مبدل کہتے ہیں۔

۲۵۲۔ ج کی تمام قیمتوں کے لئے لا کی چھوٹی قیمتوں تک منحنی کی شکل اس مساوات  
سے تقریباً حاصل ہوتی ہے  $ج = [۱ - ۵, ۱] = ۱$ ۔

یہ ام مساوات (۵) کی بائیں جانب کو لا کی صعودی قوتوں میں پھیلانے سے ظاہر  
ہے، لہذا منحنی کے سب سے پچھلے نقطہ کے قرب میں منحنی کی شکل مکمل کی جاتی ہے۔

ج کے مقابلہ میں لا کی بڑی قیمتوں کے جواب میں  $ج = ۱$  کی قیمت نظر انداز ہو سکتی

ہے اس لئے اس صورت میں منحنی کی شکل قوت نما منحنی سے ملتی ہے۔

۲۵۳۔ مشتق ۱۔ ایک یکساں زنجیر کا طول ۱ ل ہے، اس کے سروں کو دو نقطوں سے  
جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اور جن کا درمیانی فاصلہ ۱ ہے باندھ دیا گیا ہے، اگر ل،

۱ سے بقدر ایک چھوٹی مقدار کے بڑا ہو تو ثابت کرو کہ زنجیر کا تناؤ اس کے طول  $۱ + \frac{۱}{۲(۱-۱)}$

کے وزن کے مساوی ہوگا اور جھوک یعنی زنجیر کے دونوں سروں کو ملانے والے خط سے سب

سے پچھلے نقطہ کی گہرائی تقریباً  $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲(۱-۱)}$  ہوگی۔

چونکہ ل سے تھوڑا سا بڑا ہے اس لئے زنجیر کا تناؤ لازماً بہت بڑا ہوگا اور بناؤ علیہ ج بہت بڑا ہوگا۔

$$\text{تب دفعہ ۲۵ کی مسادات (۶) ہو جاتی ہے ل} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right]$$

قوت غنائی مسئلہ سے پھیلانے سے حاصل ہوتا ہے:

$$ل = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right] = \frac{1}{2} \left[ \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right]$$

پس پہلے تقریب تک

$$ل - 1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right]$$

یعنی سب سے پہلے نقطہ پر کا تناؤ زنجیر کے اس قدر طول کے وزن کے مساوی ہے۔  
اب دفعہ ۲۵ کی مسادات (۵) کی رو سے زنجیر کے سرے کا معین

$$ل = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right]$$

$$ل = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right]$$

اس لئے سب سے پہلے نقطہ کا جھوک

$$ل - 1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right]$$

اس سے آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر سب سے پہلے نقطہ کا جھوک ۱ ہو تو وہاں تناؤ تقریباً زنجیر کے طول  $\frac{1}{2}$  کے وزن کے مساوی ہوگا۔

مشق ۲۔ ایک پتنگ زمین سے بلندی ۱ پر آ رہی ہے اور ڈوری کا طول ل چھوڑا جا چکا ہے۔ یہی کا آدرا زمین کے ساتھ بند ہے۔ ثابت کرو کہ پتنگ پر ڈوری کا میلان زمین کے ساتھ  $\frac{1}{2}$  مست ہے اور ڈوری کے تناؤ پتنگ اور زمین والے



سردوں پر بالترتیب

۱م  $\frac{ل^۲ + ۲ھ^۲}{۲ھ}$  اور ۲م  $\frac{ل^۲ - ۲ھ^۲}{۲ھ}$  ہیں جہاں ۲م ڈوری کے اکائی طول کا وزن ہے۔  
 دفعہ ۲۵۱ کی شکل کے مطابق ۱ن ڈوری کا پتنگ والا سرا ہے اور ۲ج زمین والا سرا۔  
 اس لئے ۱ن = ۲م + ۲ج

لہذا مثلث لی مان سے

$$(۲م + ۲ج) ل = ۲ل ما + ۲مان = ۲ج + ۲ل$$

$$\therefore ۲ج = \frac{ل^۲ - ۲ل^۲}{۲ھ} \text{ اور } ۱ن = ۲ج + ۲م = \frac{ل^۲ + ۲ل^۲}{۲ھ}$$

$$\text{نیز جرم سا} = \frac{۲ج}{۲ج + ۲م} = \frac{ل^۲ - ۲ل^۲}{ل^۲ + ۲ل^۲} \text{ اس لئے مس سا} = \frac{۲ل^۲}{ل^۲ + ۲ل^۲}$$

نیز ۱ن اور ۲ج پر مطلوبہ تناؤ ہیں ۲م  $\times$  ۱ن اور ۲م  $\times$  ۲ج۔

مشق ۳۳۔ ایک یکسان وزنی رستی جس کا طول ۹۰ اینچ ہے دو چکنی میخوں پر سے جو مختلف بلندیوں پر ہیں لٹک رہی ہے رسی کے جو حصے انتصاباً ٹٹک رہے ہیں ان کے طول بالترتیب ۳۰ اینچ اور ۳۳ اینچ ہیں۔ ثابت کرو کہ زنجیرہ کا راس کل رستی کو ۵:۳ میں تقسیم کرتا ہے۔  
 نیز میخوں کا درمیانی فاصلہ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ میخوں کے زنجیرہ کے راس ۲ج سے فاصلے بالترتیب ۱م اور ۲م ہیں، گویا

$$۲م + ۲س = ۹۰ - ۳۰ = ۶۰$$

اگر زنجیرہ کا مبدل ۲ج ہو تو دفعہ ۲۵۱ کی مساوات (۷) کی رُو سے ۲س + ۲ج = ۳۰  
 اور ۲س + ۲ج = ۳۳

چونکہ چکنی میخ پر گزرنے سے رسیوں کے تناؤ میں کوئی فرق نہیں آتا اس لئے  
 دفعہ ۲۵۱ کی آخری خاصیت کی رُو سے رسی کے دونوں سروں کو زنجیرہ کے مرتب پر  
 واقع ہونا چاہیئے۔

$$\text{اس لئے آسانی سے } ۱۰ = ۲س، ۱۴ = ۲م \text{ اور } ۲۰ = ۲ل$$

$$\frac{۲}{۵} = \frac{۳۰ + س}{۳۳ + پ}$$

لہذا

نیز اگر میخوں کے فصلے لا اور لام ہوں تو

$$۳۰ = \frac{۱}{۲} \text{ جز } \frac{لا}{ج} \quad \text{اور} \quad ۳۳ = \frac{۱}{۲} \text{ جز } \frac{لام}{ج}$$

پس میخوں کے درمیان کل افقی فاصلہ

$$= ۲۰ \text{ جز } \left[ \frac{۲۷۳۳}{۲۰} + \frac{۲۷۳}{۲} \right] \text{ جز}$$

مشق ۴۔ ایک یکسان زنجیر کا طول ۲ ل اور وزن ۱۰ ہے، اسے دو نقطوں (ا) اور (ب) سے جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں لٹکایا گیا ہے۔ اب اس کے وسطی نقطہ د سے ایک وزن ق لٹکایا گیا ہے، اگر ا ب = ۲۰ تو تعادل کی حالت میں د کی گہرائی (ب) کے نیچے معلوم کرو

فرض کرو کہ ج اس زنجیرہ کا سب سے پچلا نقطہ ہے جس کا ایک حصہ د ہے فرض کرو

کہ اس کا مبدل ج ہے نیز فرض کرو کہ قس ج = د = س اور د کا سین = ۱

تو ق = د پر کے تناؤ کا انتصابی جزو ترکیبی = ۲ است جب سا (دفعہ ۲۵۱)

$$۲ = \frac{ق}{ل} \times ۱ = \frac{س}{۱} = \frac{س}{ل}$$

نیز دفعہ ۲۵۱ کی مساوات (۷) کی رو سے

$$س + ج = ۲ = ۱ + (س + ل) = ۱ + ج + ۱ = (۱ + ل) = ۲ \quad \dots \dots (۱)$$

جہاں ۱ مطلوبہ گہرائی ہے

$$\text{ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے } س = \frac{ل}{د} \times ق \text{ اور } ۱ = \frac{ل}{۲} \times \frac{ق + د}{و} - \frac{۱}{۲} \quad \dots \dots (۲)$$

نیز اگر د کا فصلہ لا ہو تو دفعہ ۲۵۱ کی مساواتوں (۵) اور (۶) سے

$$\begin{aligned} \text{ما} + \text{س} &= \text{ج}, \text{و} \frac{\text{ل}}{\text{ج}}, \text{اور} \text{ما} + \text{ھ} + \text{س} + \text{ل} = \text{ج}, \text{و} \frac{\text{ل} + \text{ھ}}{\text{ج}} \\ \therefore \frac{\text{ل}}{\text{ج}} + 1 &= \frac{\text{ل} + \text{ھ}}{\text{س} + \text{ما}} \end{aligned}$$

(۱) اور (۲) سے قیمتیں درج کرنے سے ہمیں ھ کی قیمت حاصل ہو سکتی ہے۔

**مشق ۵۔** ایک زنجیرہ طول ۱۱ ل ہے، اسے دو چھوٹی چکنی چرخوں پر سے جو ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے فاصلہ ۲ ل پر واقع ہیں لٹکایا گیا ہے متبادل کے محل معلوم کرو اور نیز بتاؤ کہ یہ قائم ہیں یا غیر قائم۔

چونکہ ایک طرف تو یہ آزاد حصہ ۱۱ ل کے وزن کے سادہ سیب اور دوسری طرف یہ زنجیر کے اُس حصہ کے وزن کے سادہ سیب ہیں کا طول اتنا سا با مرتبہ تک کے فاصلہ کے

سادہ سیب ہے (بوجب دہ ۲۵۱)

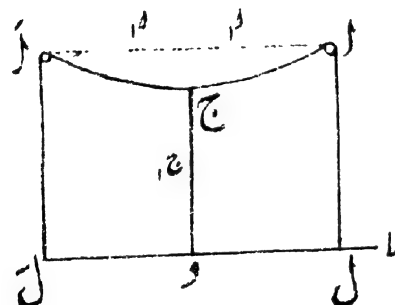
اس لئے ظاہر ہے کہ سرے کی اور

نیز دووں زنجیرہ کے مرتب پر

واقع ہیں۔

اس لئے قوس ج ۱۱ خطا ل

$$\frac{\text{ج}}{۲} = \left[ \frac{\text{ل}}{\text{ج}} - \frac{\text{و}}{\text{ج}} \right]$$



$$\frac{\text{ج}}{۲} + \left[ \frac{\text{ل}}{\text{ج}} + \frac{\text{و}}{\text{ج}} \right] = \text{ج}, \text{و} \frac{\text{ل}}{\text{ج}} \quad (۱)$$

جہاں ج، زنجیرہ کا تبدل ہے۔

مساوات (۱) کو جبریہ طور پر حل نہیں کیا جاسکتا لیکن اگر ل، اور ل کی قیمتیں متبادل دی ہوئی

ہوں تو ترکیبی حل حسب ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J} \text{ لا رکھو، تب } \frac{1}{J} = \frac{1}{J} \times \frac{1}{J} \text{ (۲)}$$

منحنی ما = دولا اور خط مستقیم ما =  $\frac{1}{J}$  لا کھینچو۔ نقطہ ق اور س  
(جہاں منحنی اور خط مستقیم ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں) ان کے فاصلے مساوات (۲) کے  
تقریبی حل ہیں اور اس لئے  $\frac{1}{J} = \frac{1}{J}$  سے ج کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔ ظاہر ہے کہ یہ  
حل حقیقی، منطقی یا خیالی ہونگے

بہوب اس کے کہ  $\frac{1}{J} \leq \frac{1}{J}$  مس ن دلا

جہاں و ن ماس ہے منحنی کا  
نقطہ و ہے۔

اب ن اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J} \text{ مس ن دلا } = \frac{1}{J} \text{ فرما}$$

$$= \frac{1}{J} = \frac{1}{J}$$

اس لئے ن کے محدود (۱) ہیں  
پس مس ن دلا = و

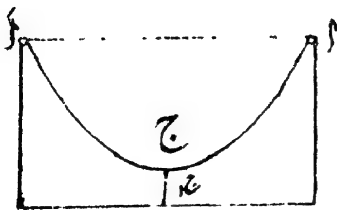
پس زنجیروں کا دو ایک یا نہ ہونا اس بات پر منحصر ہے کہ بالترتیب  $\frac{1}{J} \leq \frac{1}{J}$  ہو

ایک منحنی تقریباً ایسا ہوگا جیسا کہ پہلی

شکل میں دکھایا گیا ہے، اور دوسرا منحنی تیسری  
شکل میں دکھایا گیا ہے۔

پہلی صورت میں ج کی قیمت صریحاً دوسری  
صورت میں ج کی قیمت سے بڑی ہوگی۔

تبادل قائم یا غیر قائم۔ دفعہ ۴۴ کی  
مشق ۲ کی رو سے



$$\frac{\text{ج، لا} + \text{س}}{\text{س}} = \text{ریجنر کے مرکز نقل کی بلندی اس کے مرتب کے اوپر}$$

$$\therefore \text{اس کی گہرائی} \Delta \text{ کے نیچے} = \text{ج، لا} + \text{س} = \frac{\text{ج، لا} + \text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{ج، لا} + \text{س}}{\text{س}}$$

اس لئے  $\Delta$  کے نیچے کل ریجنر کے مرکز نقل کی گہرائی

$$\frac{\text{ج، لا} + \text{س}}{\text{س}} = \frac{\frac{1}{2} \times 12 + \frac{\text{ج، لا} + \text{س}}{\text{س}} \times \text{س}}{\text{س}} = \frac{\text{ج، لا} + \text{س}}{\text{س}}$$

$$\text{اب صورت بالا میں } \Delta = 12, \text{ ج، لا} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{لا}} \right)$$

$$\text{س} = \frac{1}{\text{ج}} \left( \frac{1}{\text{ج}} - \frac{1}{\text{لا}} \right)$$

$$\text{اور } \Delta = \text{س} + \text{ج، لا} = \frac{1}{\text{ج}}$$

اس لئے کل ریجنر کے مرکز نقل کی گہرائی  $\Delta$  کے نیچے

$$\frac{\Delta}{\text{ج}} = \frac{\Delta}{\text{ج}} \times \frac{1}{\text{ج}} = \frac{\Delta}{\text{ج}} \times \left[ \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{لا}} \right] - \frac{1}{\text{لا}}$$

$$\frac{\Delta}{\text{ج}} = \frac{\Delta}{\text{ج}} \times \frac{1}{\text{ج}} = \frac{\Delta}{\text{ج}} \times \left[ \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{لا}} \right] - \frac{1}{\text{لا}}$$

اس لئے ج، جتنا بڑا ہوگا اتنی ہی مرکز نقل کی گہرائی  $\Delta$  کے زیادہ نیچے ہوگی۔ اس لئے ممکن منحنیوں کی پہلی شکل قائم ہے اور دوسری غیر قائم۔

مشق ۶۔ معلوم طول ل کی ایک یکساں دندار دسی دو نقطوں ف اور ق کے ساتھ بندھی ہے، ف سے ق کا افقی فاصلہ اور انحصالی فاصلہ ک ہے

یہ سی بحالت سکون جس زنجیرہ کی شکل اختیار کرتی ہے اس کے تبدیل ج کی قیمت معلوم کرو۔  
فرض کرو کہ مرتب ولا اور زنجیرہ کے سب سے پہلے نقطہ ج میں سے گزرنے والے  
انتصابی خط کے لحاظ سے نقطہ ن کے محدود (۱، ۱) ہیں۔ (دیکھو دفعہ ۲۵۱)  
دفعہ مذکورہ کی مساواتوں کی رو سے

$$(۱) \quad \frac{ج}{۲} = م = \left[ \frac{۱}{جو} + \frac{۱}{جو} \right] \dots \dots \dots$$

$$(۲) \quad \frac{ج}{۲} = م + ک = \left[ \frac{۱+۵}{جو} + \frac{۱+۵}{جو} \right] \dots \dots \dots$$

$$(۳) \quad \text{اور ل} = س - س = \frac{ج}{۲} - \left[ \frac{۱+۵}{جو} - \frac{۱+۵}{جو} \right] \frac{ج}{۲} \dots \dots \dots$$

$$(۴) \quad \text{ل} + ک = س - نو = \frac{ج}{۲} - نو = \frac{ج}{۲} - \frac{۱}{جو} (۱ - \frac{۵}{جو}) \dots \dots \dots$$

$$(۵) \quad \text{اور ل} - ک = س - ج = \frac{ج}{۲} + ج - \frac{۱}{جو} = \frac{ج}{۲} (۱ - \frac{۵}{جو}) \dots \dots \dots$$

$$\therefore \text{ل} - ک = ج = \left[ \frac{۱}{جو} + ۲ - \frac{۵}{جو} \right] \text{ جس سے}$$

$$(۶) \quad \text{ل} - ک = ج = \left[ \frac{۱}{جو} - \frac{۵}{جو} + ۲ \right] \dots \dots \dots$$

اس مساوات کو جبریہ طور پر حل نہیں کیا جاسکتا۔ لیکن ترسیبی حل  $\frac{۱}{جو} = لا$  رکھنے سے  
حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اس لئے (۶) سے حاصل ہوتا ہے

$$(۷) \quad \dots \dots \dots \times \frac{\text{ل} - ک}{۱} = ج$$

اس لئے لا وہ نقطہ ہے جہاں خطوط مستقیم

$$Y_{\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}} \pm = M$$

مخنی ما = جمیزلا سے ملتے ہیں۔

سخنی کھینچے سے ہیں لاش کی دوسرا دی اور مخالف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور اس لئے

جاء کی دو مساوی اور مخالف قیمتیں ملتی ہیں بشرطیکہ  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$  یعنی بشرطیکہ  $l$  بڑا ہو طول  $l$  صفر سے۔

چونکہ ج کی قیمت تقرب کے کسی مطلوبہ درجہ تک معلوم ہو سکتی ہے اس لئے مساوات (۴) سے لاکھ اور مساوات (۱) سے ماکہ قیمت حاصل ہوتی ہے۔ پس حل مکمل ہے۔

ظاہر ہے کہ ج کی صرف مثبت قیمت لینی چاہیے کیونکہ ج کی منفی قیمت سے منفی ہو جائیگا۔

(۶) میں اوپر کی علامت لینے سے اور

بالا - ک = لا رکھنے سے ہمیں چیز لا = لا کو حل کرنا ہے جہاں لا ایک تقریبی حل ہے۔

۴ = ۴ + ۴ رکھو جہاں ۵ بہت چھوٹا ہے

تو جبر (۱+۲) = (۱+۲) (۱+۲)

یعنی جنرل  $a$  + د جنرل  $a$  + ..... =  $(a + d)$  ٹیلر کے مسئلے سے

اس لئے د کے مربعوں کو نظر انداز کرنے سے

$$d = \frac{L - 1 \text{ جہز لا}}{L - 2 \text{ جہز لا} - 1 \text{ جہز لا}} = \frac{L - 1 \text{ جہز لا}}{L - 2 \text{ جہز لا} - 1 \text{ جہز لا}}$$

پس لا + د دوسری تقریبی قیمت ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک تار کا وزن ۱۵ پونڈ فی گز ہے۔ اس کے سرے دو نقطوں سے جن کے درمیان افقی فاصلہ ۱۰ فٹ ہے بند ہے ہیں اور تار کے جھوک یعنی سب سے نیچے نقطے کی گہرائی ۱ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ تار کا بڑے سے بڑا تناؤ تقریباً  $\frac{1}{4}$  پونڈ وزن ہے۔

۲۔ ایک تار برقی کا نظام لوہے کے تار نمبر ۸ سے جس کا وزن ۴۷ پونڈ فی ۱۰۰ گز ہے بنا ہے کھمبوں کے درمیان فاصلہ ۵۰ فٹ ہے اور وسط میں تار کا جھوک ۱ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ سرور پر اس کا تناؤ ۲۰۵ پونڈ وزن کے مساوی ہے۔

۳۔ ایک تار ۱۲۰۰ فٹ نصف قطر والے سختی کے گرد کھمبوں پر بند ہوا ہے اور ہر دو متصل کھمبوں کے درمیان ۱۰ گز کا فاصلہ ہے اور ہر متصل کے وسط میں کھمبوں کے درمیان تار کا جھوک ۶ اینچ ہے۔ اگر تار کا وزن  $\frac{1}{4}$  پونڈ فی گز ہو تو ثابت کرو کہ ہر ایک کھمبے پر حاصل افقی کھینچاؤ تقریباً ۱۸۰ پونڈ وزن ہو گا۔

۴۔ محض مکونیات کے اصولوں کی مدد سے ثابت کرو کہ عام زنجیر کے نقاط ان اور ق پر کے تماس جس نقطہ پر ملتے ہیں وہ قوس ن ق کے مرکز ثقل آت میں سے گزرنے والے انتصابی خط پر واقع ہوتا ہے۔

۵۔ ایک یکساں وزنی زنجیر کو جس کا طول ۱۵۵ فٹ ہے دو نقطوں سے جو افقی سطح مستوی میں ۱۵۰ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہیں لٹکایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ سب سے نیچے نقطہ پر کا تناؤ کل زنجیر کے وزن کا تقریباً ۰.۸ گنا ہے۔

۶۔ اگر ایک جکساں زنجیر کو اس کے سرور پر سے لٹکایا جائے اور اسکی کڑیوں کی کوئی تعداد ایک ہی انتصابی سطح مستوی میں چکنے افقی تاروں پر آزادانہ حرکت کر سکے تو ثابت کرو کہ ان سلسل کڑیوں کے درمیان زنجیر کے حصے ایک ہی زنجیر کی قوس ہیں۔



۷۔ اگر سب بلندوں پر ہوا کی رفتار وہی ہو اور اس کا اثر جو ایک پتنگ کی ڈوری پر پڑتا ہے نظر انداز نہ سکتا ہو تو ثابت کرو کہ جیسے جیسے پتنگ اوپر چڑھتا ہے ویسے ویسے اسے قائم رکھنے کے لئے جو قوت درکار ہوتی ہے اس میں کمی ہوتی جاتی ہے۔

۸۔ ایک یکساں زنجیر کا طول ۲ ل اور وزن ۵ ہے اسے دو نقطوں ل اور ب سے جو ایک ہی افقی خط پر واقع ہیں لٹکایا گیا ہے۔ زنجیر کے وسطی نقطہ د سے ایک وزن ق لٹکایا گیا ہے اور اس نقطہ کی گہرائی خط ل ب کے نیچے ۴ ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک سرے پر کشاؤ  $\frac{1}{2} [ \frac{2}{3} + \frac{5}{6} ]$  ہے۔

۹۔ ایک ناقابل کھینچاؤ رسی کا طول ۲ ل ہے اور فی اکائی طول وزن ۴ ہے اس میں کو ایک ہی بلندی پر کے دو نقطوں سے جن کا درمیانی فاصلہ ۲ د ہے لٹکایا گیا ہے۔ سہارے کے نقطوں کے نیچے رسی کے سب سے نیچے نقطہ کی گہرائی معلوم کرنے کی سادہ باتیں چاہئیں کرو۔

۱۰۔ ایک ذہنی یکساں رسی کا طول ل ہے، اس کے ایک سرے کو ثابت نقطہ ل سے باندھ دیا گیا ہے اور دوسرے سرے ب کو افقی قوت کے ساتھ جو رسی کے طول د کے وزن کے مساوی ہے کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ ل اور ب کے درمیان افقی اور انحصائی فاصلے بالترتیب  $\frac{1}{3}$  اور  $\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{3}}$  ہیں۔

۱۱۔ ایک یکساں زنجیر کو جس کا طول ل ہے ایک ہی افقی خط پر کے دو نقطوں ل اور ب سے اس طرح لٹکانا منظور ہے کہ سروں پر کے تناؤ وسطی نقطہ پر کے تناؤ کا  $\frac{1}{2}$  گنا ہوں ثابت کرو کہ فاصلہ ل ب ہوگا  $\frac{L}{\frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{3}}}$  لو کہ  $[ \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{3}} ]$ ۔

اگر ل = ۱۰۰ فٹ اور  $n = 3$  تو جدولوں کی مدد سے ثابت کرو کہ طول تقریباً ۳۳ و ۶۲ فٹ ہوگا۔

۱۲۔ ایک جہاز کو پانی میں اتارنے کے لئے اس کے پچھلے حصہ سے ایک زنجیر انتصافاً لٹکی ہوئی زمین تک پہنچتی ہے اور رسی کا باقی حصہ جہاز کی مخالف سمت میں ۸۰ گز کے فاصلہ تک

زمین پر بڑا ہے۔ اس کے دوسرے سرے کے ساتھ ایک وزنی لنگر بند است جس کو ہلانے کے لئے ۲۵ ٹن کی افقی قوت درکار ہوتی ہے زنجیر کا انتصابی حصہ ۵ فٹ لمبا ہے۔ بتاؤ کہ زنجیر کا وزن فی فٹ کیا ہونا چاہیے کہ جب جہاز کی متوازی الافقی حرکت سے کل زنجیر زمین پر سے اٹھ آئے تو متاثر لنگر کو کھینچ سکنے کے لئے عین کافی ہو۔

[ ۶۸۵۶ پونڈ ]

۱۳۔ ایک کشتی کو ایک ۲۰ فٹ لمبی یکساں زنجیر کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے۔ زنجیر کا ایک سر کشتی کے پچھلے حصہ کے نقطہ ب سے اور دوسرے سرے کو ایک کھیمے کی چوٹی ا سے جو ب سے ۱۲ فٹ اونچی ہے باندھ دیا گیا ہے۔ پانی کی روکشتی پر  $\frac{1}{2}$  پونڈ وزن کی قوت لگاتی ہے اور زنجیر کا وزن  $\frac{1}{2}$  پونڈ فی فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ ب کا فاصلہ ا سے گزرنے والے انتصابی خط سے ۳۰ فوٹ  $\frac{5}{8}$  فٹ ہے۔

۱۴۔ ایک تار ۴۰ اگز لمبا دو نقطوں کے درمیان ٹنگ رہا ہے۔ نقطوں کے درمیان فاصلہ افقاً ۳۸ اگز اور انتصاباً ۵۰ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ سب سے پچھلے نقطہ پر تار تقریباً ۴۹۵ پونڈ وزن ہے۔ تار کا وزن فی فٹ نصف پونڈ ہے۔

۱۵۔ ایک رسی جس کا طول ل ہے دو نقطوں کے درمیان رجوا ایک ہی انتصابی خط میں بہنیں ہیں) اس طرح ٹنگ رہی ہے کہ سہارے کے نقطوں پر رسی انتصابی خط کے ساتھ بالترتیب عم اور ب کے زاوے بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ک ایک نقطہ کی بلندی ہو دوسرے نقطہ کے اوپر اور زنجیرہ کا اس سہارے کے درمیان نہ ہو تو

$$ک \text{ جم } \frac{عم}{۲} = ل \text{ جم } \frac{عم}{۲}$$

۱۶۔ طول ۲ ل والی وزنی زنجیر کا ایک سر ایک نقطہ ل کے ساتھ بندھا ہے اور دوسرا سر ایک وزنی چھلے کے ساتھ بندھا ہے جو ا میں سے گزرنے والی کھردری افقی سلاخ پر پھسل سکتا ہے۔ اگر چھلے کا وزن زنجیر کے وزن کا ن گنا ہو تو ثابت کرو کہ ا سے چھلے کا بڑے سے بڑا فاصلہ

$$\frac{۲ل}{۲} \text{ فوٹ } [۲ + ل + ا + د] \text{ ہوگا}$$



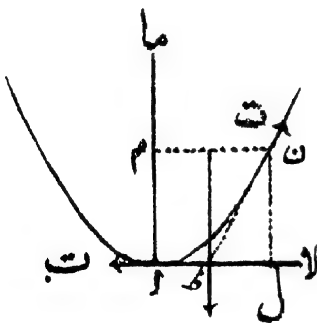
[دفعہ ۸۹ اور دفعہ ۴۴ کی مشق ۲ کو استعمال کرو]

۲۰۔ ایک یکساں رسی کا طول ۱۸ فٹ اور وزن ۳ پونڈ ہے۔ اس کے سرے ایک سلاح کے سرے کے ساتھ بند ہے ہیں سلاح کا وزن ۲ پونڈ ہے۔ یہ دونوں ایک چکنے افقی میز پر ساتھ پڑے ہیں۔ جب رسی کے وسطی نقطہ کو میز کے اوپر سے ۱ بلندی تک اٹھایا جائے تو میز پر کا دباؤ عین صفر ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سلاح کا طول ۱۶ لوک ۲ فٹ ہے اور اٹھانے میں جو کام انجام ہوتا ہے وہ  $\frac{1}{2}$  (۱۵ + ۴ لوک ۲) فٹ پونڈ ہے۔

۲۱۔ ایک تار برقی کا کسی معلومہ شے کا بنا ہوا ہے اور اس کا طول دو مساوی الارتفاع کھیلوں کے سرے کے ساتھ جن کا درمیانی فاصلہ ۵ ہے بندھا ہے۔ اگر سرے کے نقطوں پر تار کے تناؤ کم سے کم ہوں تو ثابت کرو کہ  $l = \frac{5}{2}$  جہاں  $l$  مساوات کے مسئلہ ۱ سے حاصل ہوتا ہے۔

۲۲۔ ایک رسی جاؤ بہ ارض کے زیر عمل لٹک رہی ہے اس کو اس طرح وزنی بنایا گیا ہے کہ اس کے ہر جزو کا وزن اس جزو کے افقی ظل کے طول کے متناسب ہے۔ ثابت کرو کہ رسی مکانی کی شکل میں اٹکتی ہے۔

فرض کرو کہ رسی کے کسی نقطہ پر تناؤ  $T$  ہے اور رسی کے سب سے نیچے نقطہ پر تناؤ  $T_0$  ہے۔  $n$  پر تاس  $n$  ط اور  $l$  میں سے گزرنے والے افقی اور انتصابی خطوں پر  $n$  سے عمود  $l$  اور  $n$  م نکالو۔



چونکہ رسی  $l$  کے ہر جزو کا وزن  $n$  پر اس کے ظل کے متناسب ہے اس لئے ظاہر ہے کہ  $l$  کے مرکز ثقل کا فاصلہ  $n$  کے مرکز ثقل کے فاصلہ کے مساوی ہے یعنی  $l$  کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والا انتصابی خط  $n$  کی یعنی  $l$  کی

تصنیف کرتا ہے۔ نیز چونکہ اس انتصابی خط کو لازماً ط میں سے بھی گزرنا چاہیئے

$$\text{اس لئے} \quad \text{ا ط} = \text{ط ل} = \frac{\text{ل}}{\text{پ}}$$

اب ن ط ل قوس ان کے لئے قوتوں کا مثلث ہے۔

اس لئے اگر رسی کے افقی مفصل کے فی اکائی طول کا وزن و ہو تو

$$\frac{\text{ن ط}}{\text{ن ل}} = \frac{\text{ب}}{\text{ط ل}} = \frac{\text{ان کا وزن}}{\text{ن ل}} = \frac{\text{و ل}}{\text{ل}}$$

اگر ت رسی کے افقی مفصل کے طول ج کا وزن ہو تو

$$\frac{\text{و ج}}{\frac{\text{ل}}{\text{پ}}} = \frac{\text{و ل}}{\text{ل}} \text{ یعنی } \text{لا} = ۲ ج، ۱$$

یعنی منحنی دتر خاص ۲ ج، ۱ کا مکافی ہے۔

$$\text{نیزت} = \frac{\text{و ل}}{\text{ل}} \times \text{ن ط} = \frac{\text{و ل}}{\text{ل}} \times \frac{\text{ل}}{\text{پ}} \times \frac{\text{ل}}{\text{ا}} = \frac{\frac{\text{و ل}}{\text{ل}} + \frac{\text{ل}}{\text{ا}}}{\frac{\text{ل}}{\text{پ}}}$$

$$= \frac{\text{و ل} + \frac{\text{ل}^2}{\text{ا}}}{\frac{\text{ل}}{\text{پ}}} = \frac{\text{و ل} + \frac{\text{ل}^2}{\text{ا}}}{\frac{\text{ل}}{\text{پ}}}$$

چونکہ ط میں سے گزرنے والا انتصابی خط ہم ن کی تصنیف کرتا ہے اس لئے

یہ خط مستقیم ان کی بھی تصنیف کرتے گا۔ پس منحنی ایسا ہے کہ اس کے دو ناسوں کے نقطہ تقاطع میں گزرنے والا محور کے متوازی خط دتر تناس کی تصنیف کرتا ہے اور یہ مکافی کی ایک اساسی خاصیت ہے۔ لہذا بغیر کسی قسم کے تحلیلی طریقہ کو استعمال کرنے کے یہ ظاہر ہے کہ منحنی مکافی ہے۔

۲۵۵۔ جب زنجیر کو بہت زور سے کھینچا جائے تو یہ بالآخر تقریب کے درجہ اول تک مکافی بن جاتا ہے۔

چونکہ ج، رسی کے اُس حصہ کا طول ہوتا ہے جس کا وزن سب سے بچلے نقطہ پر کے تناؤ کے مساوی ہو اس لئے ج، بہت بڑا ہو گا۔



اس لئے ہمیں دفعہ ۲۵ کی صورت حاصل ہوتی ہے لہذا معلق پل کی زنجیر کی شکل تقریباً مکانی کی شکل سے ملتی ہے سہارے والی سلاخوں کے درمیانی فاصلے اور تمام سلاخوں اور زنجیروں کے وزن جس قدر کم ہونگے اتنا ہی اس کی شکل مکانی کے زیادہ مشابہ ہوگی۔

مشق ۱۔ ایک معلق پل کا کل وزن ۲۰۰ ٹن ہے جو اس کے تمام افقی فصل جس کا طول ۵۰ فٹ ہے مساوی طور پر منقسم ہے اور اس کی بلندی ۲۰ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ زنجیر کے سب سے نیچے نقطہ پر اور سہارے کے مقاموں پر تناؤ بالترتیب  $\frac{1}{4}$  اور  $\frac{1}{2}$  ۲۱۲ ٹن ہیں۔

مشق ۲۔ ایک زنجیر کا فصل ۳۰ فٹ ہے اور سہارے کے مقاموں سے سب سے نیچے نقطہ کی گہرائی ۱۰ فٹ ہے وزن جو فصل پر مساوی طور پر منقسم ہے فی فٹ نصف ٹن کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک سرے پر کا تناؤ ۳۷۵ و ۹۳ ٹن وزن ہے۔

مشق ۳۔ ایک زنجیر کا طول ۱۰ اور وزن ۱۰ ہے، اس کو دو نقطوں A اور B سے جو افقی خط میں واقع نہیں ہے کھینچ کر لٹکایا گیا ہے زنجیر کے وسطی نقطہ C کی گہرائی انتصافاً خط AB کے نیچے ک ہے۔ ثابت کرو کہ زنجیر کا تناؤ تقریباً  $\frac{1}{8}$  ٹن ہے۔

[A, B اور C اب انتصافاً کھینچو جن میں سے ہر ایک  $\frac{1}{4}$  کو تعبیر کرے A اور B دونوں میں سے A اور B و A اور B پر کے مماسوں کے متوازی کھینچو۔ تب A و A اور B اور C و بالترتیب A, B, C پر کے تناؤ T, S, T اور T کو تعبیر کرتے ہیں

$$\text{چونکہ } W_1 + W_2 = 2 \times W \text{ و } C + B = 2 \times A$$

$$T + T = S + 2T = 2T + \frac{W}{2}$$

$$\text{نیز } T = \frac{T + T}{2} = \frac{2T + \frac{W}{2}}{2} \text{ و } C \text{ زنجیر کے خواص کی رو سے}$$

$$T \text{ کو ساقط کرنے سے } 2T + 2T = (T + T) + \frac{2W}{2} \text{ و}$$

لیکن انتہا میں  $T = T$  اس لئے مساوات بالا سے حاصل ہوتا ہے





پروقتوت سہے ۔

اسی طرح سے ق پر کے تناؤ کا جزو تخیلی محور ولا کی سمت یہاں

$$= \text{ف} (\text{س} + \text{مف س}) = \text{ف} (\text{س}) + \text{مف س} \times \text{ف} (\text{س}) + \dots \text{ٹیلر کے معادلہ سے}$$

$$= \text{ست} \frac{\text{ف}}{\text{فوس}} + \text{مف س} \frac{\text{ف}}{\text{فوس}} (\text{ت} \frac{\text{ف}}{\text{فوس}}) + \dots$$

فوس ن ق پر ولا کی سمت میں عمل کرنے والی قوتوں کو مساوی کرنے سے

$$\text{ت} \frac{\text{ف}}{\text{فوس}} = \text{م} \times \text{مف س} \times \text{لا} + \text{ت} \frac{\text{ف}}{\text{فوس}} + \text{مف س} \times \frac{\text{ف}}{\text{فوس}} (\text{ت} \frac{\text{ف}}{\text{فوس}}) + \dots$$

+ مف س کے مربے اور بالا تر قوتوں والی رقیں

مف س پر تقسیم کرنے اور اختصار کرنے سے اور مف س کو بہت چھوٹا بنانے سے یہ یعنی ق کون کے بہت قریب لانے سے

$$\frac{\text{ف}}{\text{فوس}} (\text{ت} \frac{\text{ف}}{\text{فوس}}) + \text{م} \times \text{لا} = \dots (۱)$$

اسی طرح سے قوتوں کو محورا کے متوازی تحلیل کرنے سے

$$\frac{\text{ف}}{\text{فوس}} (\text{ت} \frac{\text{ف}}{\text{فوس}}) + \text{م} \times \text{ما} = \dots$$

اگر قوتیں لا اور ما اور نیز کمیت م کی قیمتیں رسی کے ہر ایک نقطہ کے لئے معلوم ہوں تو ان دو مساواتوں سے کسی لفظ پر ست کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے ۔

نیز رسی کی شکل کے لئے تفرقی مساوات معلوم ہو جاتی ہے ۔

۲۵۸ - مشق ۱ - فرض کرو کہ رسی یکساں ہے اور دفعہ ۲۵۱ کی مانند جاؤں ارض کے زیر عمل

آزادانہ ٹاک رہی ہے لہذا اگر محور متوازی الافق اور انحصاری ہوں تو لا = ۰ اور ما = ج

اس لئے مساوات (۱) اور (۲) یہ شکل اختیار کرتی ہیں

$$\frac{\text{ف}}{\text{فوس}} (\text{ت} \frac{\text{ف}}{\text{فوس}}) = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ف}}{\text{فوس}} (\text{ت} \frac{\text{ف}}{\text{فوس}}) = \text{م} \times \text{ج}$$

پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے  $\text{ت} \frac{\text{ف}}{\text{فوس}} = \text{م} \times \text{ج}$  مستقل = م ج گ (فرض کرو) یعنی

رسی کے تمام طول میں افقی تناؤ مستقل ہے ۔

دوسری مساوات میں ت کی قیمت مندرج کرنے سے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} (\text{گ فرلا}) = ۱$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{فرلا}^۲}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{فرس}} \times \frac{۱}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{فرلا}} + ۱$$

دفعہ ۲۵۱ کی تفرقی مساوات بھی یہی ہے۔

مشق ۲۔ فرض کرو کہ رسی کو اس طرح وزن بنایا گیا ہے کہ ہر جزو کا وزن افقی ظل کے طویل کے متناسب ہے (جیسا کہ معلق پل کی صورت میں ہوتا ہے)

تب لا = ۰، صاف س = - لا صف لا

اس لئے مساوات (۱) اور (۲) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} (\text{ت فرلا}) = - \text{ اور } \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} (\text{ت فرلا}) = \text{لام فرلا}$$

$$\text{ت فرلا} = \text{مستقل} = \text{گ اور } \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} (\text{گ فرلا}) = \text{لام فرلا}$$

$$\text{یعنی گ فرلا} = \text{لام}$$

تکمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۲۵۱ کے مطابق منحنی مکانی ہے اگر رسی کے افقی طول کی کیت م کسی طرح بدلے تو بھی اسی طرح حاصل ہو سکتا ہے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} (\text{گ فرلا}) = \text{م ج}$$

اگر م ج صاف س کے مقام کی رقوم میں معلوم ہو تو اس مساوات سے منحنی کی شکل حاصل ہوتی ہے نیز اگر رسی کے منحنی کی شکل معلوم ہو تو اسی مساوات سے کیت کا تغیر بھی معلوم ہو سکتا ہے۔

۲۵۹۔ یکساں طاقت کا ذخیرہ۔ فرض کرو کہ ہم یہ معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ ذخیرہ کی مساوات کیا ہوگی اگر رسی کی کیت اس کے ہر ایک نقطہ پر اس کے تناؤ کے متناسب

ہو۔ اس صورت میں رسی کی طاقت ہر نقطہ پر اس قوت کے مناسب ہوتی ہے جسے برداشت کرنی پڑتی ہے۔

اس صورت میں لا = ج اور ما = ج اور م ج ت یعنی م = لہ ج جہاں لہ کوئی مستقل ہے۔

تب دفعہ ۲۵ کی ساداتیں ہو جاتی ہیں

ت فرلا = گ اور فرس (ت فرلا) = لہ ج (۱)۔  
ت کی قیمت مندرج کرنے سے

$$\text{فرس} - \left( \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \right) = \text{لہ ج} - \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \text{لہ ج} - \left( \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} \right) = \text{لہ ج} - \left( 1 + \left( \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right) \right)$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}}{1 + \left( \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right)} = \text{لہ ج}$$

تکمل کرنے سے مس فرلا = لہ ج لا + گ

اگر ہم رسی کے سب سے نچلے نقطہ کو مبدائیں تو فرلا = ج جبکہ لا = ج اور اس لئے گ = ج۔

$$\therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \text{مس} (\text{لہ ج لا}) = \text{مس} \left( \frac{\text{لا}}{\text{لا}} \right) \text{ اگر } \frac{1}{4} = \text{لہ ج}$$

تکمل کرنے سے ما = لہ ج جم لا = لہ ج قط لا

تکمل کا مستقل صفر ہے کیونکہ لا اور ما ایک ساتھ صفر ہوتے ہیں

اس سختی کے دو انتصابی متقارب ہیں  $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$

رسی کی کیفیت کی تبدیلی کا قانون :-

$$(۱) \text{ سے } \text{ت} = \text{گ} \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} = \text{گ} \left( ۱ + \left( \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right) = \text{گ} \text{قط} \frac{\text{لا}}{\text{و}}$$

اس لئے  $\text{س} = \text{لوک مس} \left( \frac{\text{لا}}{\text{و}} + \frac{\pi}{2} \right)$  اگر  $\text{س}$  کو  $\text{ب}$  سے نچلے نقطہ سے ناپا جائے۔

$$\therefore \text{و} \frac{\text{س}}{\text{و}} + \text{و} \frac{\text{س}}{\text{و}} = \text{مس} \left( \frac{\text{لا}}{\text{و}} + \frac{\pi}{2} \right) + \text{م} \left( \frac{\text{لا}}{\text{و}} + \frac{\pi}{2} \right) = ۲ \text{قط} \frac{\text{لا}}{\text{و}}$$

$$\therefore \text{ت} = \text{گ} \frac{۱}{۲} \left( \text{و} \frac{\text{س}}{\text{و}} + \text{و} \frac{\text{س}}{\text{و}} \right)$$

اس لئے کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ  $\text{ب}$  سے نچلے نقطہ سے  $\text{س}$  ہے کیفیت فی اکائی طول ایسے بدلتی ہے جیسے

$$\frac{۱}{۲} \left( \text{و} \frac{\text{س}}{\text{و}} + \text{و} \frac{\text{س}}{\text{و}} \right) \text{ یعنی ایسے بدلتی ہے جیسے}$$

$$\text{جز} \left( \frac{\text{س}}{\text{و}} \right)$$

۲۶۰۔ اگر رسی ایک ہی سطح مستوی میں واقع نہ ہو اور تو توں کے اجزاء ترکیبی محوروں کے متوازی لا، ما، مے ہوں تو تعادل کی مساواتیں دفعہ ۲۵۷ کے مطابق حسب ذیل ہوں گی

$$\text{فرس} - \left( \text{ت} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \right) + \text{م} \text{لا} = ۰$$

$$\text{فرس} - \left( \text{ت} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \right) + \text{م} \text{ما} = ۰$$

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرس}} (\text{ت فری}) + \text{م مے} = .$$

$$(۱) \quad \text{اس لئے} \quad \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} + \text{م لا} = .$$

$$(۲) \quad \text{ت} \quad \frac{\text{فر۲ا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر۲ا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} + \text{م ما} = .$$

$$(۳) \quad \text{ت} \quad \frac{\text{فر۲ی}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر۲ی}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} + \text{م مے} = .$$

ان مساواتوں کو بالترتیب  $\frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}}$ ،  $\frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}}$ ،  $\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$  سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$\text{اور مماثلات} \quad \left(\frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\right)^2 = ۱$$

$$\text{اور بناءً علیہ} \quad \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} =$$

$$= \frac{۱}{۳} \times \left[ \left(\frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فر۱ا}}{\text{فرس}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}\right)^2 \right] =$$

کو استعمال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} + \text{م (لا فر۱ا + ما فر۱ا + مے فری)} = .$$

$$\text{ت} = \text{گ} - \text{م (لا فر۱ا + ما فر۱ا + مے فری)}$$

پس اگر یہ دونی قوتیں ایسی ہوں جن کا ماس کی گتہت کوئی جزو ترکیبی نہ ہو تو تناؤ

مستقل ہوگا۔

فیہ اگر ہم مساوات (۱)، (۲) اور (۳) سے ت اور  $\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}}$  کو ساقط کر دیں تو

$$\begin{aligned} & \text{لا} \left[ \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} - \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \right] + \text{ما} \left[ \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} - \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \right] \\ & + \text{مے} \left[ \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} - \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \right] = 0 \\ & \text{یعنی لا} + \text{ما} + \text{مے} = 0 \end{aligned}$$

جہاں (لا، مے، نہ) اس منحنی کے ثنائی عماد (Binormal) کی سمتیہ جوہر التمام ہیں جس میں رسی واقع ہے۔

اس لئے کسی نقطہ ن پر جو حاصل بیرونی قوت عمل کرتی ہے اس کی سمت ن پر کے ثنائی عماد کی سمت پر علی القواہم ہوتی ہے۔

اگر ہم (۱) (۲) اور (۳) کو  $\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$ ،  $\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$ ،  $\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$  سے بالترتیب ضرب دے کر جمع کریں تو

$$\frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \text{م} = 0$$

جہاں ر انحناء کا نصف قطر ہے اور م بیرونی قوت کا جزو تحلیل ہے۔ صدر عماد کی سمت میں جس کی سمتیہ جوہر التمام ہیں

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}، \frac{\text{فری}}{\text{فرس}}، \frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$$

دفعہ ہذا کی مساواتوں کو ایک دفعہ اور تکمیل کرنے سے

$$\text{ت} \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} + \text{ک م لا فرس} = \text{ا}$$

$$\text{ت} \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} + \text{ک م ما فرس} = \text{ب}$$

$$\text{ت} \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} + \text{ک م مے فرس} = \text{ج}$$

اس لئے اُس مخفی کی مساواتیں جس میں رسی واقع ہے یہ ہیں

$$\frac{1-ک م لا فرس}{فرس} = \frac{ب-ک م ما فرس}{فرس} = \frac{ج-ک م مے فرس}{فرس}$$

جہاں ۱، ب، ج مستقل ہیں۔

۲۶۱۔ رسی جو ایک چکنی سطح پر معلومہ قوتوں کے زیر عمل پڑی ہے۔  
فرض کرو کہ رسی کے کسی نقطہ پر سطح کا دباؤ مسا ہے اور اس نقطہ پر سطح کا جو عماد  
اُذر کی طرف کھینچا جائے اس کی سمتی جیوب التمام (ل، م، ن) ہیں۔ تب تعادل کی  
مساواتیں ہیں

$$\frac{فرس}{فرس} - (ت \frac{فرس}{فرس}) + م لا - سا ل = ۰ \quad (۱)$$

$$\frac{فرس}{فرس} - (ت \frac{فرس}{فرس}) + م ما - سا م = ۰ \quad (۲)$$

$$\frac{فرس}{فرس} - (ت \frac{فرس}{فرس}) + م مے - سا ن = ۰ \quad (۳)$$

نیز سطح کی مساوات معلوم ہے جو فرض کرو یہ ہے

$$ت (لا، ما، ی) = ۰ \quad (۴)$$

$$\text{چونکہ } ل \frac{فرس}{فرس} + م \frac{فرس}{فرس} + ن \frac{فرس}{فرس} \text{ متناسب ہے}$$

$$\frac{جفت لا}{جفت لا فرس} \times \frac{جفت فرس}{جفت ما} + \frac{جفت فرس}{جفت ما فرس} \times \frac{جفت فرس}{جفت ی} \times \frac{فرس}{فرس}$$

کے نچلاؤ صفحہ کے مساوی ہے۔

مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) کو دفعہ ۲۹ کی طرح بالترتیب  $\frac{فرلا}{فرس}$ ،  $\frac{فرما}{فرس}$ ،  $\frac{فری}{فرس}$  سے ضرب دینے اور جمع کر کے تکمیل کرنے سے

ت = گ - م (لا فرلا + ما فرما + مے فری) (۵)

= گ - قہ اگر بیرونی قوتیں تو لا تفاعل قہ کے ذریعہ دی ہوئی ہوں۔

نیز اگر مساواتوں (۱)، (۲) اور (۳) میں سے ہم  $\frac{فرت}{فرس}$  اور  $\frac{فرت}{فرس}$  کو سا قہ کر دیں تو

(ت  $\frac{فرلا}{فرس}$  + م لا) (  $\frac{فرما}{فرس}$  ن -  $\frac{فری}{فرس}$  م ) + ..... = .....

ت = گ کی مندرجہ بالا قیمت مندرج کرنے سے ہمیں مساوات (۴) کی مدد سے اس منحنی کی مساوات معلوم ہو سکتی ہے جو رسی سے بنتا ہے۔

۲۹۲۔ اگر دفعہ ۱ قبل میں رسی پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں تو لا = ما = مے = .....

اور اس لئے (۵) سے ت = مستقل = گ

اس لئے (۱)، (۲) اور (۳) سے

$$\frac{فرلا}{فرس} = \frac{فرما}{فرس} = \frac{فری}{فرس}$$

$$\frac{ل}{س} = \frac{م}{ا} = \frac{ن}{ی}$$

$$\frac{فرلا}{فرس} = \frac{فرما}{فرس} = \frac{فری}{فرس}$$

$$\frac{جفت}{جفت} = \frac{جفت}{جفت} = \frac{جفت}{جفت}$$

$$\frac{جفت}{جفت} = \frac{جفت}{جفت} = \frac{جفت}{جفت}$$

یعنی

اس لئے رسی کا منحنی ایسا ہے کہ ہر نقطہ پر اس کا سدر عا د سطح کے عا د پر منطبق ہوتا ہے  
یعنی رسی کے ہر نقطہ پر کالٹنمی ستوی سطح کے عا د میں سے گزرتا ہے۔ اس قسم کے منحنی



کوسطح کا تقسیم ارضی منحنی کہتے ہیں اور یہ ایسا ہوتا ہے کہ اس کا کوئی جزو ن ف سطح پر ن اور ق کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہوتا ہے۔

## مشائیں

۱۔ یکساں طاقت کے زنجیرہ میں ثابت کردہ

$$لا = وسا، س = وک { فسا + مس سا }، جم سا جز س = ۱$$

اور  $r = 1$  جہز  $\frac{r}{1}$  جہاں  $r$  انحناء کا نصف قطر ہے اور  $s$  محور  $LA$  کے ساتھ دھامس کا میلان ہے۔

اس لئے ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر فی اکائی طول کی کمیت ایسے بدلتی ہے جیسے اس نقطہ پر انحناء کا نصف قطر

۲۔ ٹیکمان طاقت کے ذخیرہ کا فصل - ۵ فٹ اور اس کا کل وزن ۶۰۰ پونڈ ہے۔ مادہ کی کثافت ۸۰ پونڈ فی مکعب فٹ ہے۔ اور اس کی تراش پر نی مرلج ایچ تناؤ ۲۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے سختی کی مساوات معلوم کرو۔ اور سب سے پختلے اور اوپر کے نقطہ پر اس کی تراشوں کے رتبے معلوم کرو۔

$$\left[ \frac{1}{36} = \text{لوک} \cdot \text{قط} \frac{0}{36}, 15 \text{ اعم} \frac{25}{36}, 15 \text{ اقم} \frac{25}{36} \text{ مرلج ایچ} \right]$$

۳۔ اگر ایک رسی کے ہر ایک لفظ پر کثافت ایسے پڑے جیسے اس منحنی کا لطف قطر انحناء میں یہ لٹک رہی ہو تو ثابت کر دو کہ منحنی یکساں طاقت کا زنجیرہ ہوگا۔

ہم۔ ثابت کر دکھا اگر معلق پل کی سلاخوں کے وزن کو بھی ملحوظ رکھا جائے لیکن باقی پل کے وزن کو نظر انداز کر دیا جائے تو معلق پل کے منحنی کی شکل زنجیرہ کا قایم ظل ہوگی۔ سلاخوں کو انتصابی اور ایک دوسرے متساوی الفاصل فرض کیا گیا ہے۔

۵۔ ایک رسی کی کثافت کسی نقطہ پر  $\frac{1}{J} \frac{dB}{ds}$  قطباً  $\frac{1}{J}$  ہے جہاں  $t$  تناؤ ہے رسی کے پچلے نقطہ پر اور  $s$  فاصلہ ہے متغیر نقطہ کا اس نقطہ سے۔ رسی کے منحنی کی شکل معلوم کرو۔

[اضف قطر اكا دائره]

۶۔ ایک غیر متجانس مادی جس کی تراشیں کا رقبہ کسی نقطہ پر اس کے تناؤ کے بالکل عکس ہے، جاذبہ ارض کے زیر عمل لٹک رہی ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی شکل ایک مکافی کی قوس ہے جس کا محور انتصالی ہے۔

۸۔ ایک یکساں رسی مکانی کی شکل میں لٹک رہی ہے جس کا واسکےس ہے۔ اس پر عمل کرنے والی قوتیں ہر نقطہ پر عماد کی سمت میں ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر کی قوت بالکس ایسے بدلتی ہے جیسے (س ن) ۲ اور تناؤ مستقل ہے۔

۲۶۔ مکی استاذ پذیرسی جو ایک چکنے مستوی منحنی پر ساکن ہے۔ فرض کرو کہ  $Q$  سی کا کوئی جزو  $W$  میں ہے جہاں  $Q$  کا طول  $s$  ہے اور  $W$  منحنی پر کوئی ثابت نقطہ ہے۔

فرض کرو کہ ن اور ق پر کے متنازعہ بالترتیب ت اور ث + م ت  
ہیں اور ان پر کے ماس کسی ثابت خط کے ساتھ زاوے سا اور سا + م سا  
بناتے ہیں۔

نیز فرض کر دو کہ سخنی کا جو تعامل رسی کے جزو ن ف پر عمل کرتا ہے وہ فی اکائی طول سہارے کے مساوی ہے پس اس جزو پر کا تعامل صرف س ہے اور یہ ن پر

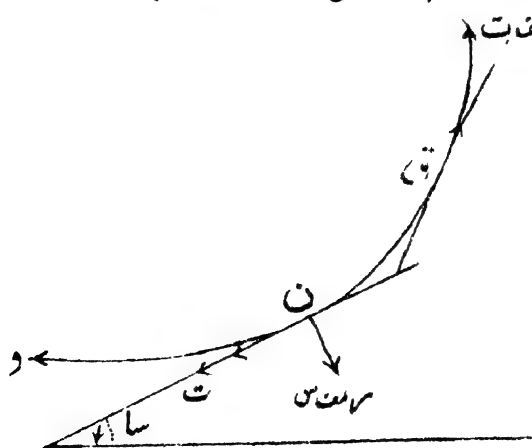
کے عباد کی سمت میں باہر کی طرف عمل کرتا ہے

نہ پر کے نہ اس  
اور عمو کی استوں میں تحلیل  
کرسنے سے

$$x(t + \Delta t)$$

بحرہٴ ماہیت

(زیت + مف + ت) جب مف ساء = صراف مف س



اس لئے مف سا کی درجہ اوّل کی قیّموں تک جم مف سا = ۱ اور جب مف سا = مف سا

ت = مف ت = ت یعنی مف ت = ۰ " " " (۱)

ت مف سا = مف سا جو انتہائی صورت میں ہو جاتا ہے

ت = سر =  $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$  = سر \* (۷) جہاں نقطہ ن پر نصف قطر انحناء کی قیمت ہے۔

(۱) سے حاصل ہوتا ہے ت = مستقل

اس لئے ہلکی رسی کا تناؤ جو ایک چکنے منحنی پر ساکن ہو ہر جگہ مستقل ہوتا ہے۔

نیز (۲) سے حاصل ہوتا ہے  $\text{سر} = \frac{1}{\infty}$  یعنی عمادی تعادل ایسے بدلتا ہے جیسے منحنی کا انحناء۔

۴۶۴۔ وزنی رسی جو ایک چکنے منحنی پر ساکن ہے۔

اگر وہ خط جس سے سانا پنا جائے افقی ہو اور اسے لا کا محور مانا جائے تو ہمیں دفعہ ماقبل کی قوتوں کے علاوہ ن پر عمل کرنے والی انتصابی قوت و مف سا کو بھی شریک کرنا پڑے گا۔

اس لئے دفعہ ماقبل کی مساواتوں کی بجائے ہمیں ذیل کی مساواتیں ملیں گی

(ت + مف ت) جم مف سا = ت + و مف سا \* جب سا

اور (ت + مف ت) جب مف سا = مف سا + و مف سا \* جم سا  
ان سے حسب سابق حاصل ہوتا ہے

مف ت = و مف سا \* جب سا = و مف سا " " " (۱)

ت =  $\frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}}$  = سر + و جم سا " " " " (۲)

(۱) سے حاصل ہوتا ہے ت = گ + و اگر و کو مستقل فرض کیا جائے۔

اس لئے اگر تہ اور تہ تناؤ ہوں ان نقطوں پر جن کے معین ما اور ماہ ہیں تو

$$تہ - تہ = د (ما - ما)$$

یعنی اگر ایک وزنی یکساں رسی ایک چکنے منحنی پر ساکن ہو تو اس کے کسی دو نقطوں پر کے تناؤں کا فرق ان نقطوں کے معینوں کے فرق کے برابر طول دانی رسی کے وزن کے مساوی ہوتا ہے۔

جب تہ معلوم ہو جائے تو (۲) سے تعادل حاصل ہوتا ہے

$$سہ = \frac{تہ}{ر} - د جم سا$$

جہاں ر منحنی کا نصف قطر انتخاب ہے ن پر۔

۲۶۵ - مشق - ایک یکساں وزنی رسی ایک ایسے چکنے زنجیرہ پر مٹنا کلا بڑھی ہے جس کا محور انتصابی اور اس اوپر کی طرف ہے۔ کسی نقطہ پر دباؤ اور رسی کا تناؤ معلوم کرو۔

دفعہ ماقبل کی ساداتیں اس صورت میں ہو جاتی ہیں

$$\frac{فرت}{فرس} + د جب سا = ۰ - - - - - (۱)$$

$$سہ = \frac{تہ}{ر} + د جم سا - - - - - (۲)$$

$$\text{لیکن } س = ج مس سا \text{ یعنی } \frac{فرت}{فرس} = - د جم جب سا$$

$$تہ = - \frac{د جم جب سا}{جم سا} + د = د جم [قط سا - قط سا]$$

جہاں سا آزاد سروں میں سے کسی ایک سرے پر کے ماس کا میلان ہے۔

اس لئے (۲) سے حاصل ہوتا ہے



(ت + مفت ت) حجم مفت سا = ت + مدرسا × مفت س

اور (ت + ت) جیپ ٹا = سٹا

لیکن حجم مف سا = ۱ اور جب مف سا = مف سا جبکہ مف سا کے مربعوں کو قطر انداز کیا جائے۔

اس لئے ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرت} = \frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} \quad \text{اور} \quad \text{ت} = \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \text{سر}$$

سر کو سا قط کرنے سے  $\frac{\text{فرت}}{\text{ت}} = \text{مہ فرسا}$

∴  $\text{روک ت} = \text{م سا} + \text{مستقل}$

یعنی ت = ر موسا

اگر سا ایک ایسے خط سے ناپا جائے جو رستی کی اُس سمت کے متوازی ہو جہاں

یہ معنی کو چھوڑتی ہے تو ت = ت۔ جبکہ سا = ۔

اس لئے  $t = t$  اور  $t = t$  دو مسا

اس سے کسی نقطہ پر کا تناؤ سرے پر کے تناؤ اور اس زاویہ کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے جو سرے پر کے ماس اور نقطہ کے ماس کے درمیان بنتا ہے۔

۲۶۔ بطور عددی مثال کے اس رسی پر غور کرو جو ایک کھمبے کے گرد ایک مکمل گردش میں سے لپٹی ہوئی ہے۔ اگر معمولی موج کی رسی کو آہنوس کے کھمبے کے گرد لپیٹا جائے تو  $\frac{1}{2}$  تقریباً

اس لئے  $\frac{t}{T} = \frac{\pi \times \frac{1}{2}}{\pi} = \frac{1}{2}$  (۲۷۱۸)  $\frac{1}{2}$  تقریباً ۲۳ =

یعنی رسی کا تناؤ کھینچے کے گرو ایک دفعہ لیٹھنے سے تقریباً ۲۳ گنا ہو جاتا ہے اگر اسے دو دفعہ

لیٹا جائے تو تناؤ ۳۵ گنا ہو جاتا ہے -

۲۶۸ - وزنی رستی - اگر رسی وزنی ہو اور اس کا وزن فی اکائی طول ۱ ہو اور  
سرا کو افقی سمت سے ناپا جائے تو دفعہ ماقبل کی مساواتوں کی بجائے مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

(ت + مف ت) = جم مف سا = ت + مہ مف س + ۱ مف س جب سا

(ت + مف ت) جب مف سا = مہ مف س + ۱ مف س جم سا  
اس لئے انتہا میں

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} = \text{مہ سا} + ۱ \text{ جب سا} \quad (۱)$$

$$\text{ت} = \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = \text{مہ سا} + ۱ \text{ جم سا} \quad (۲)$$

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرس}} - \text{مہ ت} = \frac{\text{فرسا}}{\text{فرس}} = ۱ \text{ (جب سا - مہ جم سا)}$$

چونکہ ہماری شکل میں س اور سا ایک ساتھ بڑھتے ہیں اس لئے  $\frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = ر$

$$\therefore \frac{\text{فرت}}{\text{فرسا}} - \text{مہ ت} = ۱ \text{ (جب سا - مہ جم سا)}$$

اس خطی تقریبی مساوات کو حل کرنے کے لئے ہم حسب قاعدہ دو - مہ سا  
سے ضرب دیتے ہیں - تب تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت دو - مہ سا} = \text{گ} + ۱ \text{ (جب سا - مہ جم سا) دو - مہ سا فرسا}$$

چونکہ ہمیں وہ معجزی جس پر رسی ساکن ہے سے معلوم ہے اس لئے ہم سا کو ر کی  
رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں اور بائیں طرف کے تکملہ کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں -

۲۶۹ - ایک یکساں انکج رسی جس کا طول ۱ ہے انتہائی تناؤ کی حالت میں ایک  
ثابت کھردرے اسطوانہ پر جس کا محور افق کے متوازی اور جس کا نصف قطر

۱۔ سے ٹنک رہی ہے ثابت کرو کہ دو انتصابی حصوں میں سے بڑے حصہ کا طول ہے

$$\frac{1}{1 + m^2} + \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

فرض کرو کہ بڑے اور چھوٹے حصے بالترتیب افقی قطر اب کے سروں اور ب سے ٹنک رہے ہیں اور ان کے طول بالترتیب  $m$  اور  $m^2$  ہیں۔ نیز فرض کرو کہ حرکت سے ب کی طرف شروع ہونے والی ہے۔ تب اگر کسی نقطہ  $n$  پر تناؤ  $t$  ہو اور  $l$  کے محاذی مرکز پر زاویہ  $\theta$  بنتا ہو تو ہمیں دفعہ ما قبل کے مطابق حاصل ہوتا ہے۔

(ت + مف ت) حجم مف ط - ت - م م مف س - م ج حجم مف س =

اور (ت + مف ت) جب مف ط - س مف س + م ج جب ط مف س =

$$\therefore \frac{1}{\text{فرط}} = \frac{\text{فرت}}{m + m^2} + \text{م ج حجم ط}$$

$$\text{اور } \frac{1}{\text{فرت}} = \text{س} - \text{م ج جب ط}$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{فرت}}{\text{فرط}} - \text{م ت} = \text{م ج ا (حجم ط + م جب ط)}$$

$$\therefore \text{ت و س} = \text{م ج ا (حجم ط + م جب ط)} - \text{و س ط فرط}$$

$$= \text{م ج ا و س} - \left[ \frac{(1 - m^2) \text{جب ط} - 2 \text{م حجم ط}}{1 + m^2} \right] + \text{گ}$$

$$\text{اگر ط} = \text{ت} = \text{م ج با} \text{ اور اگر ط} = \text{ت} = \text{م ج با}$$

$$\therefore \text{م ج با} = \text{م ج ا} - \frac{m^2}{1 + m^2} + \text{گ}$$



$$\text{اور } م \text{ ج } م \times \text{و} - \text{و} = \text{م ج } \frac{\text{و}^2}{\text{و} + \text{و}} + \text{گ}$$

$$\text{اس لئے } م \text{ و} - \text{و} = \text{و} = \frac{\text{و}^2}{\text{و} + \text{و}} (1 + \text{و} - \text{و})$$

$$\text{نیز } \text{و} + \text{و} + \text{و} = 1$$

نہذا نتیجہ مطلوبہ حاصل ہوتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک واحد قابل حرکت چرخ جس کا وزن وہی طاقت  $Q$  کے ذریعہ جو ایک ہلکی رسی کے ایک سرے پر لگا ئی گئی ہے ساکن ہے۔ رسی کو چرخ کے نیچے سے گزار کر ایک ثابت نقطہ کے ساتھ باندھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر رسی کے اس حصہ کے محاذی جو چرخ سے مس کرتا ہے مرکز پر زاویہ  $\theta$  بنے تو  $Q(1 - 2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \text{و}$

۲۔ ایک ہلکی رسی وہ کھردری میخوں  $L$  اور  $B$  پر سے گزار دی گئی ہے جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں جن کا درمیانی فاصلہ  $2$  ہے۔ رسی کے سروں کو ایک وزن  $J$  کے ساتھ باندھا گیا ہے۔ انتہائی تعادل کی حالت میں  $L$   $B$  کے محاذی  $J$  پر زاویہ قائمہ بنتا ہے ثابت کرو کہ  $J$  کا افقی فاصلہ  $L$   $B$  کے وسطی نقطہ سے  $\frac{1}{2} \sin(3\theta)$  ہے جہاں  $\theta$  مرکز کی قدر ہے۔

۳۔ ایک وزنی ذرہ ایک ہلکی انکلیج رسی کے حلقہ کے ساتھ بندھا ہے اور رسی کا یہ حلقہ ایک انتصابی سطح مستوی میں ایک ثابت کھردری چرخ پر سے گزرتا ہے۔ اگر رسی کے سیدھے حصے ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ  $\theta$  بنائیں تو ثابت کرو کہ انتہائی تعادل کے لئے سمت انتصابی کے ساتھ ان کے سیلان مستقیم  $\frac{1}{2} \sin(3\theta)$  ہیں۔

۴۔ ایک انتصابی سطح میں چار گول کھردری کھونٹیاں اس طرح لگائی گئی ہیں کہ ان سے ایسا مربع بنتا ہے جس کے اضلاع افقی اور انتصابی ہیں۔ ان میخوں میں سے ہر ایک بیچ پر سے ایک رسی گزرتی ہے جس کے ایک سرے سے وزن  $W$  بندھا ہے اور

رسیوں کے دوسرے سروں کو ایک دوسرے کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو اس گره کے ساتھ باندھا جاسکتا ہے تاکہ یہ گره مربع کے مرکز پر رہے  $2\sqrt{2}$  و  $\frac{\pi}{4}$  جب  $\frac{\pi}{4}$  ہے۔

۵۔ تین مساوی طور پر کھردری بیخیں  $A, B, C$  جن کی تراشیں گول اور مساوی ہیں ایک ایسے مساوی الاضلاع مثلث  $ABC$  کے کونوں پر لگی ہیں کہ  $B, C$  افقی خط ہے اور  $A$  اس کے اوپر ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ایک رسی کے ایک سرے سے وزن  $W$  باندھ کر رسی کو ان بیخوں پر سے گزارا جائے تو رسی کے دوسرے سرے سے زیادہ سے زیادہ وزن  $W$  سہارا جاسکتا ہے جہاں سرگڑ کی قدر ہے۔

۶۔ ایک دائرہ ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح ساکن ہے کہ یہ ایک رسی کی وجہ سے کامل طور پر کھردری انتصابی دیوار کو دبا رہا ہے رسی کا ایک سر دیوار کے ایسے نقطہ سے جو دائرہ کے اوپر ہے بندھا ہے۔ اور دوسرے سرے سے وزن  $Q$  ٹنگ رہا ہے۔ رسی اور دائرہ کے درمیان رگڑ کی قدر صفر ہے۔ اگر دائرہ کا وزن  $W$  ہو اور رسی اور دیوار کے درمیان زاویہ  $\theta$  بنے تو ثابت کرو کہ جب دائرہ پھسلنے کے عین قریب ہو تو  $Q = (1 + \mu) W$  (۱ + جمٹ) و  $\mu = 0.2$  ق

۷۔ ایک بے وزن رستی ایک ہی سطح مستوی میں ایک کھردرے کرہ پر تنی ہوئی ہے۔ کرہ کا نصف قطر  $R$  ہے۔ ثابت کرو کہ سطح مستوی کا فاصلہ مرکز سے  $R$  جب  $D$  سے زیادہ نہیں ہو سکتا۔ جہاں  $D$  رگڑ کا زاویہ ہے۔

۸۔ اگر ایک وزنی یکساں رسی ایک ہی انتصابی مستوی میں بہت سے چکے بیخوں کے گرد گزرتی ہو اور اس کے سرے آزادانہ ٹٹکتے ہوں تو ثابت کرو کہ یہ سرے ایک ہی افقی خط میں واقع ہونگے۔

۹۔ ایک یکساں وزنی رسی ایک چکے مکانی پر جس کا محور انتصابی اور راس اوپر کی طرف ہے اس طرح ساکن ہے کہ اس کے سرے وتر خاص کے سروں پر ہیں

ثابت کرو کہ اس نقطہ پر جس پر مماس افقی کے ساتھ زاویہ قائمہ بنتا ہے سطحی پر دباؤ

$$\frac{P}{2} (\text{جم}^2 + \text{جم}^2) \text{ ہوگا جہاں } P \text{ رسی کے اکائی طول کا وزن ہے۔}$$

۱۰۔ ایک کھردرے دائرہ پر جو انتصاباً ثابت ہے ایک رسی پڑی ہے جس کے محاذی دُور کے مرکز پر زاویہ قائمہ ہے۔ اگر رسی پھسلنے کے عین قریب ہو تو ثابت کرو کہ اس کے اوپر والے سرے کا دائرہ کے بالاتر نقطہ سے زاویائی فاصلہ غیر مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{جم} (ع + ب - د) = \frac{\text{جم} (د - ب - ع)}{\text{جم} (ع - د)}$$

جہاں د رگڑ کا زاویہ ہے اور ع اس سمت میں ناپا گیا ہے جس میں رسی پھسلتی ہے۔

۱۱۔ ایک یکساں وزن دار رسی ایک ایسے کھردرے انتصابی دائرہ کی اوپر کی سطح پر ساکن ہے جس کا نصف قطر د ہے رسی کے سرے آزادانہ لٹک رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر رسی کا ایک سر دائرہ کے سب کے اوپر کے نقطہ پر ہو تو بڑے سے بڑا طول جو

$$\text{آزادانہ لٹک سکتا ہے} = \frac{2\pi r + (1 - \pi r^2)}{1 + \pi r^2} \text{ ہے۔}$$

۱۲۔ ایک وزنی زنجیر کا طول ل ہے۔ اس کا کچھ حصہ ایک کھردرے میز پر پڑا ہے اور باقی حصہ اس کے چلنے کے لئے گزر کر جو نصف قطر د کے ایک اسطوانہ کی شکل کا ہے آزادانہ نیچے لٹک رہا ہے اگر میز اور رسی کے درمیان رگڑ کی قدر نہ ہو تو ثابت کرو کہ میز پر چھوٹے سے چھوٹا طول ہے

$$\frac{1}{1 + \pi} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \right]$$

۱۳۔ ایک وزنی یکساں زنجیر ایک کھردرے خطہ ویر پر پڑی ہے جس کا محور انتصابی اور راس اوپر کی طرف ہے۔ زنجیر کا ایک سر اس پر اور دوسرا قرن پر ہے اگر تعادل

$$\text{انتہائی ہو تو ثابت کرو کہ } (1 + \pi) = 2\pi$$

۳۴۔ ایک وزنی یکساں رسی ایک کھردرے زنجیرہ پر پڑی ہے جس کا محور انتصابی ہے اور رائس اوپر کی طرف ہے۔ رگڑہ کی قدر  $\mu = 0.3$  سے معلوم ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ اگر رسی کا ایک سرانہ زنجیرہ کے رائس پر ہو اور رسی انتہائی تعداد کی حالت میں ہو تو اس کا طول زنجیرہ کے مبدل کے مساوی ہوگا۔

۳۵۔ ایک رسی ایک کھردرے نصف دائرہ پر ساکن ہے اور اس پر ایک مستقل کشش کی قوت اس کے ایک سرے کی طرف عمل کرتی ہے اور رگڑہ حرکت کو روکنے کے لئے

عین کافی ہے۔ ثابت کرو کہ رگڑہ کی قدر  $\mu = \frac{3}{2} = 1.5$  سے حاصل ہوتی ہے۔

۳۶۔ ایک انکھیج رسی جس کا طول ۲ ل ہے دو مساوی چکنی سترچرخیوں پر سے گزرتی ہے جن کے مرکز ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ ۲ ب ہے۔ اگر چرخوں کا نصف قطر ۱ ہو اور ایک چرخ سے رسی کا جو حصہ مس کرتا ہے اس کے محاذی مرکز پر زاویہ ذ بنے تو ثابت کرو کہ  $b + 4$  جم ذ

$$= \text{مم} \frac{4}{3} \quad (\text{ا جب ذ} + \text{ل} - \text{ذ}) \text{ لوک مس فہ}$$

۳۷۔ ایک رسی جس کا طول ل ہے دو مچھوٹی کھردری سیخوں پر جو ایک دوسرے سے ۲ ل فاصلہ پر ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں ٹنگ رہی ہے۔ اگر رسی کا ایک آزاد سر اور دوسرے سر سے اتنا نیچے ہو جتنا ممکن ہے تو میخ پر تاس کی سمت کا میلان طہ سمت انتصابی کے ساتھ مساوات  $\frac{ل}{۲}$  جب طہ لوک مم  $\frac{۲}{۳} = \text{جم طہ} +$  جز  $\{ \mu - \pi \} \text{ طہ} \}$  سے حاصل ہوتا ہے۔

یہ ثابت کرو کہ انتصابی حصوں کے طولوں کی نسبت  $\mu = 0.3$  :  $\mu = 0.2$  ہے اور سیخوں کے درمیان رسی کا حصہ ۱۲ مم طہ + لوک مم  $\frac{۲}{۳}$  ہے۔

۳۸۔ مرکزی قوتیں۔ ایک انکھیج رسی ایک سطح مستوی میں ایسی قوتوں کے

زیر عمل تقادل میں سے جو ہی کے ہر جزو پر ایک معلوم نقطہ سے اس جزو کے  
فاصلہ کے کسی تقاضے کے متناسب ہیں اور وہ کی طرف یا اسے باہر کی طرف  
عمل کرتی ہیں۔ تقادل کا معنی معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ن ق رسی کا کوئی

جزوم مفرد ہے جہاں قوس

جان کے طول میں کوٹھنی پر کے کسی

نقطہ ج سے ناپا گیا ہے۔ نیز فرض

کروکن اور قی پر کے تناؤ بالترتیب

ت اور ت + مفت ہیں

اور ن اور ق پر کے محاسن ایک

نماہتہ خط و لائن کے ساتھ جوڑا ویسے

بنائے ہیں وہ بالترتیب سا اور

۱۔ مفت سہا ہیں۔

فرض کرو کہ ن پر جو قوت عمل کرتی ہے وہ فی اکائی طویل ف کے مساوی

یہی فن ہے کہ کئی تفاعل (r) پس و سے قوسن کے

مختلف نقطوں پر عمل کرنے والی قوتوں کو فن × مٹس کے مساوی سمجھا جاسکتا

ہونے کی نسبت میں عمل کرتی ہے کیونکہ انتہا میں ہم مفہم کو بہت چھوڑ دیتے ہیں

کریں گے۔ جزدون ق پر عمل کرنے والی خواتین کو ماس اور عماد کی سمیتوں میں تحلیل

کرنے

(ت + مت ت) جزم مت سا - ت + ف × م مت س جزم ف = ۰ " " (۱)

(تہ + ہفت) جب ہفت سا۔ ف م ہفت س جب ف م . " (۲)

جہاں مہمکیت ہے رسی کی فی اکائی طول

جمہ صفاۃ ۱ اور جب صفاۃ = صفا رکھنے سے اور صفا کو لا انتہا

چھوٹا لینے سے ان مساداتوں سے انتہا میں حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرت} = \text{ف} \times \text{م} \times \text{ف} = \text{ف} \times \text{م} \times \frac{\text{فرز}}{\text{فرس}} \quad (۳)$$

$$\text{اور ت} = \text{ف} \times \text{م} \times \text{ج} \times \text{ف} = \text{ف} \times \text{م} \times \frac{\text{فرز}}{\text{فرع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ر}} = \text{ف} \times \text{م} \times \frac{\text{فرز}}{\text{فرع}} \times \frac{\text{ع}}{\text{ر}} \quad (۴)$$

جہاں ع عمود ہے و سے ن پر کے ماس پر اور ل نصف قطر انخا ہے  
(۳) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ت} = \text{ک} \times \text{م} \times \text{ف} \times \text{فر} + \text{م} \quad (۵)$$

اور (۳) اور (۴) کو حل کرنے سے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{ت}} = \frac{\text{فرع}}{\text{ع}}$$

اور اس لئے  $\text{ت} \times \text{ع} = \text{مستقل} = \text{ب} \quad (۶)$   
یسی کے کسی محدود حصہ کے تقابل پر غور کرنے سے مساوات (۶) باسانی حاصل ہو سکتی تھی نقطہ کے گرد ج ن پر عمل کرنے والی سب قوتوں کا معیار اثر و کے گرد لینے سے ظاہر ہے کہ مرکزی قوتیں سب کی سب نقطہ و میں سے گزرتی ہیں اور اس لئے ان کا کوئی معیار اثر و کے گرد نہیں ہے۔ اس لئے و کے گرد ن اور ج پر کے تناؤں کے معیار اثر مساوی ہیں۔ اس لئے

$$\text{ت} \times \text{ع} = \text{ت} \times \text{ب} \times \text{ع} = \text{مستقل} \quad (۷)$$

جہاں ت تناؤ ہے ج پر اور ع عمود ہے و سے ج پر کے ماس پر۔  
مساوات (۶) اور (۷) سے تقابل کی سب شرائط حاصل ہوتی ہیں، اولاً فرض کرو کہ قوت ف معلوم ہے، تب (۵) سے ت حاصل ہوتا ہے اور (۶) میں درج کرنے سے ہمیں ع اور ر کا رشتہ یعنی منحنی کی مساوات ملتی ہے

$$\frac{1}{\text{ع}} = \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}^2} \left( \frac{\text{فرز}}{\text{فرع}} \right)^2$$

ع کو ان دو رشتوں میں سے ساقط کرنے سے ہمیں مخنی کی مساوات (ر، ط) میں حاصل ہوتی ہے۔

اس جواب میں تین اختیاری مستقل ہونگے۔ ان میں سے دورستی کے سروں کے محدود معلوم ہونے سے اور باقی ایک ان سروں کے درمیان رسی کا طول معلوم ہونے کی بنا پر معلوم ہو سکتے ہیں۔

اب فرض کرو کہ رسی کی شکل دی ہوئی ہے گویا ہمیں مخنی کے ع اور ر کا رشتہ معلوم ہے تب مساوات (۶) سے ہمیں ت کی قیمت ر کی قوم میں ملتی

ہے اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے  $F = \frac{1}{m} \frac{فرست}{فرز}$  جس سے  $F$  کی قیمت ر کی رقوم میں ملتی ہے۔

۲۷۱۔ مشق ۱۔ ایک رسی کے ہر جزو پر قوتوں کے مبادیے  $\frac{1}{r}$  کے تناسب مل جاتی ہے اور ر فاصلہ ہے مبادیے سے کسی جزو کا۔ ثابت کرو کہ بحالت سکون رسی قلب کی شکل میں ہوگی۔

قلب کی مساوات ہے  $r = l(1 + حجم)$

اس لئے  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{r}$  (فرز)  $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  جب ط

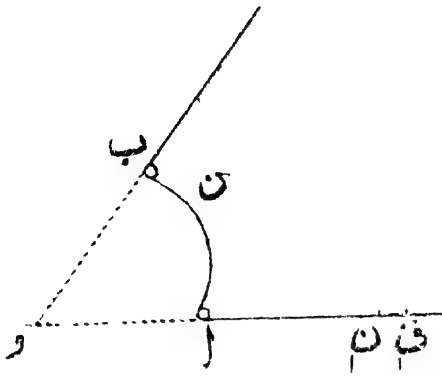
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left[ \frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2} \right] = \frac{1}{r} \left[ \frac{r_2^2 + r_1^2}{r_1 r_2} \right] = \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1 r_2 r}$$

اس لئے مساوات (۶) سے حاصل ہوتا ہے  $t = \frac{1}{r} \times \frac{فرست}{فرز} = \frac{1}{r} \times \frac{فرست}{فرز} = \frac{فرست}{فرز r}$

تب مساوات (۳) سے  $F = \frac{1}{m} \times \frac{فرست}{فرز} = \frac{فرست}{فرز m}$

مشق ۲۔ ایک لامتناہی رستی دو چھوٹے چکنے حلقوں  $l$  اور  $b$  میں سے گزرتی ہے اور اس کے ہر جزو پر جو قوت عمل کرتی ہے وہ ایک ثابت نقطہ  $o$  سے باہر کی طرف عمل کرتی ہے اور  $o$  سے اس جزو کے فاصلہ کے کعب کے بالعکس بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ حلقوں کے درمیان رسی کا جو حصہ ہے وہ دائرہ کی قوس کی شکل کا ہے۔

فرض کرو کہ رسی کے سیدھے  
حصہ کے کسی نقطہ ن پر تناؤ جس کا نا صلا  
مرکز و سہ لا ہے تہ ہے۔  
تہ (تہ + مت تہ)



$$+ \frac{م}{لا} = تہ - تہ = ۰$$

جس سے حاصل ہوتا ہے  $\frac{فرت}{لا} = \frac{م}{لا}$

اور تہ = تہ +  $\frac{م}{لا}$  + ک (۱)

چونکہ سرچا لائنا ہی پر رسی کا تناؤ صفر ہونا چاہئے نہ ک = ۰

اس لئے اگر  $لا = ۱$  تو لا پر تناؤ  $\frac{م}{لا}$  ہوگا۔ اب چونکہ رسی لڑ پر ایک چکنے حلقہ میں سے

گزرتی ہے اس لئے لڑ پر اس کے تناؤ میں تبدیلی نہیں ہوتی اس لئے لڑ کے سنجی حصہ

بدلتی اس کا تناؤ  $\frac{م}{لا}$  ہے۔

سنجی حصہ کے لئے دفعہ گزشتہ کی مساوات (۵) سے حاصل ہوتا ہے

$$تہ = - \left( \frac{م}{لا} - فرت \right) = \frac{م}{لا} + م$$

نیز جب  $ر = لا$  تو تہ =  $\frac{م}{لا}$  جس سے م = ۰

تہ مساوات (۶) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{ع} = \frac{م}{لا \times ب} = \frac{ل}{لا} \quad \text{جاں لہ کوئی مستقل ہے}$$

$$\therefore \frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا} \left( \frac{فرت}{لا} \right) = \frac{۱}{ع} = \frac{۱}{لا}$$



$$\therefore \tau = \frac{F \cdot r}{I} = \text{جب } \frac{r}{R} + \text{ج}$$

$\therefore r = \text{لجب} (\tau - \text{ج})$  جو دائرہ کی مسادات ہے۔

اگر ابتدائی خط  $OL$  ہو اور  $OB = B$  اور  $\angle AOB = \theta$  تو  
دو نقطے  $(A, \theta)$  اور  $(B, \theta)$  منحنی پر ہیں اس لئے مساوات بالا ہو جاتی ہے

$$r = \frac{A \cdot \sin \theta}{\sin \theta} + \frac{B \cdot \sin \theta}{\sin \theta} \text{ جب } \tau$$

## مثالیں

اگر رسیاں قطب سے مرکزی قوت  $F$  کے زیر عمل ذیل کے منحنیوں کی شکلیں اختیار کریں تو  
قوت کا قانون معلوم کرو۔

۱۔ مکافہ جبکہ ماسکہ قطب ہے  $[F \propto r^{-2}]$

۲۔ مساوی الزوایا لولبی  $r = A \cos \theta$   $[F \propto r^{-2}]$

۳۔ قائم زاہ جبکہ مرکز قطب  $[F \propto r^{-1}]$

۴۔ اٹیرن  $r = A \cos \theta$   $[F \propto r^{-2}]$

۵۔  $r \cos \theta = A$   $[F \propto r^{-2}]$  اور جاذبی اگر  $n < 1$

۶۔ اگر چند مرکزی قوتوں کے زیر عمل رسی تعادل میں ہو تو رسی کے کسی جزو  $n$  فی پر حاصل  
تعادل  $W$  کی سمت میں چوکا جہاں  $W$  قوت کا مرکز ہے اور  $P$  نقطہ تقاطع ہے  $n$   
اور  $Q$  پر کے ماسوں کا۔

۷۔ ایک متجانس رسی ایک ایسی مرکزی انذفاعی قوت سے کے زیر عمل ساکن رہے جو فاصلہ کے  
مرجع کے بالعکس بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ رسی کی شکل ان دو منحنیوں میں سے ایک ہے

$$\frac{ل}{ر} = ۱ + \text{قطاعہ جسم (ط جب ع)} \quad \text{یا} \quad \frac{ل}{ر} = ۱ + \text{قطر عمہ جسم (ط جب ع)}$$

۸۔ ایک رسی کا طول لا متناہی ہے۔ اس کا ایک سر ایک ثابت نقطہ کے ساتھ بندھا ہے رسی ایک چھوٹے پچھلے ثابت حلقہ میں سے گزر کر لا متناہی تک جاتی ہے اس پر مرکز و سے ایک اندفاعی قوت جو بالعمک متناسب ہے فاصلہ کی  $n$  دین قوت کے عمل کرتی ہے ثابت کرو کہ رسی کے سختی حصہ کی مساوات ہے

$$\frac{۲-۵}{۲-۵} = ۱ + \text{جسم (ن-۲) ط}$$

اگر  $n = ۲$  تو ثابت کرو کہ سختی حصہ مساوی الزوایا لولہی ہے۔

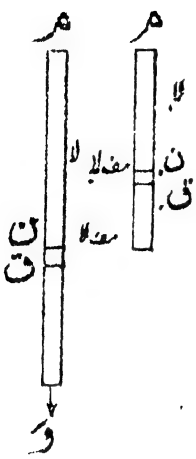
۹۔ ایک رسی ایک مرکزی اندفاعی قوت کے زیر عمل ایک مستوی سختی کی شکل میں ساکن ہے۔ اگر کسی نقطہ پر قوت انحناء کے متناسب ہو تو ثابت کرو کہ سختی مکانی ہے۔

۲۷۲۔ قابل کھینچاؤ رسیاں۔ قابل کھینچاؤ رسی کے متبادل کی مساواتیں باب ۲۷۲ کے گذشتہ حصہ کی طرح بنائی جاتی ہیں رسی کے کسی جزو کا اس جزو کے پچھلے پچھلے اور نہ کھینچے ہوئے طولوں کے درمیان فرقہ کے کھیلے کے ذریعہ مربوط ہوتا ہے۔ ثابت قابل غور ہے کہ وزنی پچھلے ار رسی کی کثافت کھینچاؤ کے بعد یکساں نہیں رہتی خواہ وہ کھینچاؤ سے پہلے یکساں ہو۔

۳۴۔ ایک یکساں قابل کھینچاؤ رسی کا وزن و اور طبعی طول  $l$  ہے رسی کو ایک ثابت نقطہ سے لٹکایا گیا ہے اور اس کے وہ سر سے سر کے سے وزن و لٹکایا گیا ہے۔ اگر پچھلے کی قدر  $l$  ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا کل کھینچاؤ  $\left[\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳}\right] \times$  ہوگا۔

فرض کرو کہ گہرائی  $la$  اور  $la +$  مفت لا پر متناؤت اور  $la +$  مفت لا نیز فرض کرو کہ اس حصہ کا غیر کھینچی ہوا طول  $la$  اور کھینچی ہوا طول  $la$  ہے۔ اس لئے اس حصہ کا وزن جس کا کھینچی ہوا طول مفت  $la$  ہے  $\frac{۲}{۳} \times$  مفت  $la$  ہوگا۔

اس جزو کے متبادل کے لئے



$$ت = ت + م + ت + \frac{و}{ل} \times فزلا$$

یعنی  $\frac{فرت}{فزلا} = \frac{و}{ل} \dots \dots (1)$

نیز ہنگ کے کلیہ کی رو سے

$$ت = ل \frac{م + لا - م + لا}{م + لا}$$

اس لئے  $\frac{فزلا}{فزلا} = 1 + \frac{ت}{ل} \dots \dots (2)$

(1) اور (2) سے  $\frac{فزلا}{فزلا} = \frac{و}{ل}$

$\therefore \frac{فزلا}{فزلا} = \frac{و}{ل} + 1 \dots \dots (3)$

اب جب لا = ل تو ت = و اور اس لئے (2) سے

$$\frac{فزلا}{فزلا} = 1 + \frac{و}{ل}$$

اس لئے (3) سے  $1 + \frac{و}{ل} = 1 + \frac{و}{ل}$

$\therefore \frac{فزلا}{فزلا} = \frac{و}{ل} + 1 + \frac{و}{ل} + 1$

$\therefore لا = ل \times \frac{و}{ل} + \frac{لا}{ل} + (1 + \frac{و}{ل}) \dots \dots (4)$

چونکہ لا اور لا ایک ساتھ صفر ہوتے ہیں اس لئے تکمل کا مستقل صفر ہے۔  
(4) سے کسی بغیر کھینچنے طول کے جواب میں کھینچا ہوا طول حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے اگر لا = ل

$$\text{توکل کھنچاؤ} = \frac{د}{ل} \frac{ل}{۲} \frac{د+و}{ل} = \frac{ل}{د} [ \frac{د}{۲} + و ]$$

۲۷۔ ایک وزنی پکیاں پکڑا رسی جاذبہ ارض کے زیر عمل معمولی زمینہ کی شکل میں لٹاک رہی ہے مگر بن کھینچی رسی کا طول ج ہو اور اس کا وزن سب سے بچلے نقطہ پر کے تناؤ کے مساوی ہو اور اس تناؤ کو پچک کے مقیاس کے ساتھ نسبت ک ہو تو رسی کی شکل کی مساواتیں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ رسی پر ایک نقطہ (لا، ما) ایسا ہے جس کا قوسی فاصلہ سب سے بچلے نقطہ سے س ہے، فرض کرو کہ اُس نقطہ پر تناؤ ت ہے۔ اگر قوس س کا طول بغیر کھنچاؤ کے س ہو تو

$$\frac{ت}{ل} = \frac{فرس - فرس}{فرس}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{فرس}{فرس} = 1 + \frac{ک}{د} \times \frac{ت}{ت} \quad (۱)$$

جہاں د رسی کے بن کھینچے اکائی طول کا وزن ہے۔ تب دفعہ ۲۷ کی مساواتیں حسب ذیل ہو جاتی ہیں

$$\begin{aligned} & - \frac{ت}{فرس} + \left\{ \frac{ت}{فرس} + \frac{فرس}{فرس} \left( \frac{فرس}{فرس} \right) \right\} = \frac{فرس}{فرس} \\ & - \frac{ت}{فرس} + \left\{ \frac{ت}{فرس} + \frac{فرس}{فرس} \left( \frac{فرس}{فرس} \right) \right\} = \frac{فرس}{فرس} \end{aligned}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{فرس}{فرس} \left( \frac{فرس}{فرس} \right) = \dots \quad (۲)$$

$$\text{اور} \quad \frac{فرس}{فرس} \left( \frac{فرس}{فرس} \right) = \frac{د}{فرس} \quad (۳)$$

ان سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{مستقل} = \text{و ج}$$

اور  $\text{ت} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{و س}$  کیونکہ س اور س ایک ساتھ صفر ہوتے ہیں

ان کو مربع کر کے جمع کرنے سے  $\text{ت} = \text{و ج} + \text{و س}$

$$\text{اس لئے (۱) سے } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \frac{\text{و ج} + \text{و س}}{\text{فرس}} = \frac{\text{و ج}}{\text{فرس}} + \frac{\text{و س}}{\text{فرس}} = \frac{\text{و ج}}{\text{فرس}} + \frac{\text{و س}}{\text{فرس}} \quad (۳)$$

$$\text{فرس} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} \times \text{فرس} = \frac{\text{و ج} + \text{و س}}{\text{فرس}} \times \text{فرس} = \frac{\text{و ج} + \text{و س}}{\text{فرس}} \times \text{فرس} = \frac{\text{و ج} + \text{و س}}{\text{فرس}} \times \text{فرس} \quad (۵)$$

اور م ج لینے اور جمع کرنے سے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} = 1 + \frac{\text{و ج}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{و ج} + \text{و س}}{\text{فرس}}$$

ان مساواتوں کو تکمیل کرنے سے

$$\text{لا} = \text{ک س} + \text{و ج} + \text{و س} = \left[ \frac{\text{و ج} + \text{و س}}{\text{فرس}} \right] \times \text{فرس} \quad (۶)$$

$$\text{ما} = \text{ل} + \frac{\text{و ج}}{\text{فرس}} + \frac{\text{و س}}{\text{فرس}} = \text{و ج} + \text{و س} \quad (۷)$$

$$\text{اور س} = \text{س} + \frac{\text{و ج}}{\text{فرس}} + \frac{\text{و س}}{\text{فرس}} = \left[ \frac{\text{و ج} + \text{و س}}{\text{فرس}} \right] \times \text{فرس} = \text{و ج} + \text{و س} \quad (۸)$$

اس مفروضہ پر کہ لا اور ما، س کے ساتھ صفر ہوتے ہیں۔

(۷) سے س، ما کی رقوم میں اور پھر (۶) اور (۸) سے لا اور س، ما کے تفاضلاتوں کے طور پر معلوم ہوتے ہیں۔

مساواتوں (۴) اور (۵) سے

$$\frac{\text{مس سا}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر نا}}{\text{ج سا}}$$

اور اس لئے (۸) سے

$$\text{س} = \text{ج سا} + \frac{\text{ک ج ا}}{۲} [\text{قط سا} \times \text{مس سا} + \text{لوک} (\text{قط سا} + \text{مس سا})]$$

اگر ہم س = ج، جبزء رکھیں تو مساواتیں (۶) د (۷) اور (۸) حسب ذیل ہو جاتی ہیں

$$\frac{\text{لا}}{\text{ج}} = \text{ع} + \text{ک جبزء}$$

$$\frac{\text{با}}{\text{ج}} + ۱ + \frac{\text{ک}}{۲} = \text{جبزء} + \frac{\text{ک}}{۲} \text{ جبزء} ۲$$

$$\text{اور } \frac{\text{س}}{\text{ج}} = \text{جبزء} + \frac{\text{ک}}{۲} + \frac{\text{ک}}{۲} \text{ جبزء} ۲$$

۵۷۵۔ مشق۔ امتداد پذیر سی کو بہت آہستہ آہستہ ایک پہیہ کے گرد لپیٹا جا رہا ہے پہیہ پھسلنے کے عمل کو روکنے کے لئے کافی ٹھکرا رہا ہے۔ سی کے دوسرے سرے کے ساتھ ایک وزن و بند رہا ہے جو زمین پر پہیہ کے مرکز سے گہرائی ل پر ہے اس حالت میں سی کا لٹکنے والا حصہ انحصاری ہے اور بغیر کھنچاؤ کے ہے۔ ثابت کرو کہ وزن کو زمین پر سے عین اٹھانے کے لئے پہیہ کو کھنچنے میں جس قدر کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$\text{ل و۔ ل ل لوک} \left[ ۱ + \frac{۲}{\text{ل}} \right]$$

ہے جہاں سی کے وزن کو نشر انداز کیا گیا ہے۔

س عمل کے کسی آن میں فرض کرو کہ سی کے انحصاری حصہ کا طول بغیر کھنچاؤ کے ہے

اور اس کا تاؤ ت ہے۔ تب ہک کے کلیہ سے

$$\text{دست} = \frac{\text{ل} - \text{لا}}{\text{لا}} \quad (۱)$$

اگر ل، ل + ۱ معطی ہو جائے جہاں پہیہ کا نصف قطر ہے اور معطی وہ نوازیہ ہے

جس میں سے پہلے کو گھنایا جا۔ مے تو

$$\frac{\text{ل} - \frac{\text{ل}}{\text{ل} + \text{مفت طہ}}}{\text{ل} + \text{مفت طہ} - \text{لا}} = \frac{\text{ل}}{\text{ل} + \text{مفت طہ}}$$

جس سے مفت ت = ل =  $\frac{\text{ل} \times \text{مفت طہ}}{\text{لا}}$

اس لئے اس لا انتہا پھوٹے کھنچاؤ میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$\frac{\text{ت} \times \text{لا} \times \text{مفت ت}}{\text{ل} \times \text{مفت ت}} = \frac{\text{ت} \times \text{لا}}{\text{ل}}$$

اس لئے وزن کے اوٹھ آنے تک کل کام جو انجام پذیر ہوتا ہے یعنی جبکہ ت مساوی ہو جائے ہے دے دے

$$= \frac{\text{ل} \times \text{ت} \times \text{فرت}}{\text{ت} + \text{ل}} = \text{ل} [\text{ت} - \text{ل} \text{وک} (\text{ت} + \text{ل})] = \text{ل} - \text{ل} \text{وک} \frac{\text{و} + \text{ل}}{\text{ر}}$$

## مثالیں

اجب ایک یکساں پچکدار رسی اب جاذبہ الارض کے زیر عمل لٹک رہی ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا بالائی حصہ پچکلے نصف کی نسبت دو چند کھنچ جاتا ہے۔

اگر اس پر کوئی نقطہ ن ایسا ہو کہ ان : ن : ب = ۴ : ۱ : ۱ تو ثابت کرو کہ اس سے اوپر والے اور پچکلے حصوں کے کل کھنچاؤ مساوی ہونگے۔

۴۔ ایک وزنی پچکدار رسی کا طبعی طول ۲ ل ہے۔ اگر اس کو ایک سرے سے آزادانہ لٹکایا جائے تو اس کا طول ۳ ل ہو جاتا ہے۔ یہ رسی ایک پچکلے میز پر جس کی چوڑائی ۲ ل ہے اس طرح پڑی ہے کہ اس کے سرے نیچے لٹک رہے ہیں۔ رسی کا کل کھنچاؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ رسی کا جو حصہ میز سے مس کرتا ہے اس کا تناؤ رسی کے وزن کا

۱۔ ل۔ گنا ہے۔

۳۔ ایک پچکدار رسی جس کی کثافت بغیر کھنچاؤ کے یکساں اور جس کا طول ل ہے ابتداءً ایک افقی سطح مستوی پر پڑی ہے۔ تب رسی کو اس کے ایک سرے سے اس کے محدود طول کی سمت میں آہستہ آہستہ بڑھنے والی قوت کے ساتھ اس طرح کھینچا گیا ہے کہ امراع ہمیشہ لا انتہا چھوٹا رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب قوت  $\frac{1}{2}$  ہو تو رسی کا

تناوب  $\frac{1}{2}$  فٹ  $\frac{1}{2}$  ہوگا جہاں رسی کا وزن ہے، لہٰذا پچک کی قدر ہے، مگر رگڑ کی قدر ہے اور  $\frac{1}{2}$  فٹ  $\frac{1}{2}$  م۔ و۔

۴۔ ایک دوزنی پچکدار رسی کا وزن و اور بغیر کھنچاؤ کے طول ج ہے۔ یہ ایک چکنی دوسری سطح مائل پر پڑی ہے جس کے رخوں کے میدان افق کے ساتھ بالترتیب  $\alpha$  اور  $\beta$

ہیں۔ ثابت کرو کہ رسی کا فل کھنچاؤ  $\frac{W \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta}$  جب  $\alpha$  جب  $\beta$  ہے۔

۵۔ ایک پچکدار رسی ایک کھردری سطح مائل پر پڑی ہے اور اس کا اوپر کا کنارہ سطح پر

ثابت کر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا کھنچاؤ حدود  $\frac{W \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta}$  جب  $\alpha$  جب  $\beta$  کے اندر

واقع ہوگا جہاں  $\alpha$  سطح مائل کا میدان ہے،  $\beta$  رگڑ کا زاویہ ہے، و رسی کا وزن ہے اور ل اس کی پچک کا متناہی ہے۔

۶۔ ا۔ ب ایک پچکدار رسی ہے جس کا طبعی طول ۱۰ فٹ ہے۔ اس کی کثیت ۵ پونڈ

ہے اور اس کی پچک کا مقیاس ۸۰ پونڈ وزن ہے۔ اس رسی کو اس کے ایک سرے

اسے لٹکا دیا گیا ہے اور اس کے دوسرے سرے سے ۱۰ پونڈ کثیت کا وزن

باندھا گیا ہے۔ اگر اسے آہستہ آہستہ کھینچے دیا جائے تو بتاؤ کہ اس کے آخری محل

میں اس کا طول کیا ہوگا نیز ثابت کرو کہ وسطی نقطہ پر کثافت کھنچاؤ کے بعد ۳:۴ کی نسبت سے کم ہو جاتی ہے۔

۷۔ اگر ایک یکساں پچکدار رسی کو ایک سرے سے ثابت کر دیا جائے اور اس کے ہر ایک



نقطہ ف پر ایک قوت ف اس کے طول کی سمت میں ایسی عمل کرے کہ ن پر کاستنا و اس کے آزاد سرے سے اس کے فاصلہ کے متناسب ہو تو ثابت کرو کہ  $\frac{F}{n}$  (جہاں ف ثابت سرے پر ف کی قیمت ہے) بغیر کھینچاؤ کی صورت میں ثابت سرے سے ن کے فاصلہ کے متناسب ہوگا۔

۸۔ ایک یکساں رسی جس کا وزن و اور لچک کا مقیاس ل ہے تنی ہوئی حالت میں ایک کھردرے افقی میز پر جس کی رگڑ کی قدر م ہے پڑی ہے۔ اگر ہر نقطہ پر یہ سکرٹسٹے کے عین قریب ہو تو بتاؤ کہ اس کا کھینچا ہوا طول اس کے بن کھینچے طول کا  $(1 + \frac{m}{L})$  گنا ہے۔  
۹۔ ایک یکساں وزن ل لچکدار رسی کو جس کا طبعی طول ۲ ل ہے اس قدر کھینچا گیا ہے جتنا ممکن ہے اور یہ انتہائی تعادل کی حالت میں ایک کھردری سطح مائل پر پڑی ہے۔ ثابت کرو کہ رگڑ کی سمت رسی کے اس نقطہ پر بدل جاتی ہے جس کا طبعی فاصلہ اوپر کے سرے سے  $\frac{1}{2} [1 + \frac{m}{L}]$  ہے جہاں درگڑ کا زاویہ ہے اور  $\mu$  سطح کا میلان ہے افق کے ساتھ۔

۱۰۔ ایک یکساں شہتیر جس کا طول ل ہے ایک سطح مائل کے خط میلان اعظم پر پڑا ہے۔ سطح مائل کا میلان افق کے ساتھ  $\alpha$  ہے۔ شہتیر پیش کے اضافہ کے زیر اثر پھیلتا اور پھر ٹھنڈا ہو کر سکڑتا ہے۔ بتاؤ کہ شہتیر کے کون سے نقطے ان دونوں عملوں کے اتناؤ میں ثابت رہتے ہیں نیز ثابت کرو کہ فی الجملہ کل شہتیر سطح مائل پر  $\frac{1}{2} [1 + \frac{m}{L}]$  سے کم و فاصلہ نیچے اترتا ہے جہاں تیش کے انتہائی تغیر کے لئے طول میں فی اکائی طول کا اضافہ ہے اور درگڑ کا زاویہ ہے۔

۱۱۔ ایک لچک دار رسی کا طبعی طول و اور وزن م ج ہے۔ اس رسی کا ایک سرا ایک چلنے افقی میز کے ایک نقطہ کے ساتھ بندھا ہے اور یہ میز پر یکساں زاویائی رفتار سے گئے ساتھ گھوم رہی ہے۔ ثابت کرو کہ کھینچا ہوا طول

$$\frac{1}{\omega^2} \left( \frac{L}{m} \right) \left\{ 1 + \frac{m}{L} \right\} \text{ ہے جہاں لچک کا مقیاس ہے۔}$$

۱۲۔ ایک ہلکا لچکدار بند ہے جس کا مول بغیر کھینچاؤ کے ۲ و ہے۔ اس کو چار کھوری چار سینٹوں  
 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' کے گرد جو ایک ایسے مربع کے کونوں پر لگی ہیں جس کا ہر ضلع ۱ و ہے  
 لپیٹا گیا ہے۔ اگر اس کو 'ا' اور 'ب' کے درمیان کسی نقطہ 'ن' پر پکڑ دیا جائے اور  
 'ا' 'ب' کی سمت میں کھینچا جائے تو ثابت کر دو کہ بند 'ا' اور 'ب' کے گرد وقت واحد

میں پھسلنے لگے گا اگر  $\frac{ان}{ن ب} = \frac{۲}{۳}$

۱۳۔ ایک وزن 'ن' ایک دوسرے وزن 'ق' کو ایک ہلکی لچکدار رسی کے ذریعہ تھامے  
 ہوئے ہے جو کہ ایک کھردرے ستیرا ستوا نے پر سے گزرتی ہے جس کا محور افقی ہے۔  
 ثابت کر دو کہ رسی کے اس حصہ کا کھینچاؤ جو اسطوانہ سے مس کرتا ہے

۱ و کوک  $\frac{ق + ل}{ن + ل}$  ہے جہاں 'ا' اسطوانہ کا نصف قطر ہے، 'مہ' رگڑ کی قدر ہے اور 'لہ'  
 لچک کا مقياس ہے۔

۱۴۔ ایک لکڑی ایک ہلکے لچکدار تار کے ذریعہ چھت سے ٹنک رہی ہے تار کا مقياس 'س'  
 لکڑی کے وزن کے نصف کے مساوی ہے۔ ثابت کر دو کہ چھت تک چڑھنے میں لکڑی  
 جو کام کرتی ہے وہ اس کام سے ایک تہائی کم ہے جو تار کے بے لچک ہونے کی صورت  
 میں لکڑی کو کرنا پڑتا۔

۱۵۔ ایک وزنی لچکدار رسی کا طبعی طول 'ل' اور کمیت 'م' ہے رسی کو ڈھیلے طور  
 پر لپٹ کر ایک افقی میز پر رکھا گیا ہے۔ اگر رسی کے ایک سرے کو آہستہ سے انتصاباً اتنا  
 اوپر اٹھایا جائے کہ کل رسی کھل کر میز سے عین اوپر اٹھ آئے تو ثابت کر دو کہ ایسا کرنے

میں  $\frac{۱}{۲} م ج ل$  [  $ا + \frac{۲}{۳} م ج ل$  ]

کام کرنا پڑے گا جہاں 'لہ' رسی کی لچک کی کا مقياس ہے۔

[جب رسی کا ایک سرا فاصلہ لا اور پکڑا جائے اور اگر رسی کا لا طول بن کھینچی  
 حالت میں لا طول کے مساوی ہو تو دندہ ۳، ۲ کی رو سے لا + لا +  $\frac{۲}{۳} م ج ل$  نیز اوپر  
 کے سرے پر کا تناؤ ست =  $\frac{۱}{۲} م ج ل$ ، پس طویل کے لا سے لا + نصف لا ہو جائے

میں جو کام ہوتا ہے وہ = ت مفت ل = مریج ل [۱ +  $\frac{\text{مریج}}{\text{ت}}$  ل] مفت ل - اس کو حدود  
صفر اور ل کے اندر مکمل کرنے سے ہمیں نتیجہ بالا حاصل ہوتا ہے

۱۶ - ایک یکساں لچکدار رسی ایک افقی سطح مستوی پر اپنی طبعی حالت میں ساکن ہے  
اور اس کا ایک سر اکٹارد کے ساتھ بندھا ہے۔ اگر رسی کو اس نقطہ سے آزادانہ لٹکنے دیا  
جائے تو ثابت کرو کہ بخاندانی توانائی بالقوہ میں

$$\frac{1}{4} \frac{v^2}{L} + \frac{1}{2} \omega^2 L \text{ کی کمی واقع ہوگی جہاں } \omega \text{ رسی کا وزن ہے، } L \text{ اس کا طبعی طول ہے}$$

اور لہ یک کا مقیاس ہے۔

## رسیوں اور زنجیروں پر متفرق مثالیں

(۱) ایک رسی کا طول ل اور وزن و ل ہے۔ اس کے وسطی نقطہ ج کے ساتھ ایک  
سطح قہرین بڑا ہے جس کا وزن و ب ہے۔ رسی دو چکنی میخوں پر جو ایک ہی خط افقی میں  
واقع ہیں اس طرح منشا کا ایک رک رہی ہے کہ رسی کے سرے انتساباً ایک رک رہے ہیں  
ثابت کرو کہ زنجیر کا مدلل ج ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$B = L - \frac{1}{2} \left[ B + \frac{1}{2} \left( \frac{B}{L} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

جہاں ۲ میخوں کا درمیانی فاصلہ ہے اور ل کی کم سے کم قیمت جس کے لئے تقابل ممکن

$$\text{ہے اس وقت ہوتی ہے جبکہ } \frac{1}{L} - \frac{1}{(L+B)} = \frac{1}{2} \frac{B}{L^2}$$

نیز ثابت کرو کہ ج پر کا ماس سمت انتصابی کے ساتھ جوازاً یہ طہ بناتا ہے  
وہ مساوات

$$B \text{ مس طہ کوک } \left( \frac{L+B}{L} \times \frac{\text{جم طہ}}{1 + \text{جم طہ}} \right)$$

کے حاصل ہوتا ہے اور اس لئے اس کی بڑی سے بڑی قیمت جم طہ ہے کیوں کہ

۱ منفی نہیں ہو سکتا۔

۲۔ ایک ٹر سکینے والی رسی کا طول ۲ ل اور خطی کثافت ۲ ہے، اس کے وسطی نقطہ کے ساتھ کیت ۲ ۲ کے کا ایک وزنی منکا بندھا ہے۔ رسی کے سرے دو ثابت نقطوں کے ساتھ بندھے ہیں جن کا درمیانی فاصلہ ۲ ک ہے جو ۲ ل سے ذرا سا کم ہے ثابت کرو کہ رسی کے کسی نصف کے زنجیرہ کا مبدل تقریباً  $\frac{1}{2} \left( \frac{2k + k + k}{(l-k)} \right)$  ہے۔

۳۔ دو چکنے مستدیر اسطوانے ہیں جن میں سے ہر ایک کا نصف قطر ۱ ہے ان کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کے محور ایک دوسرے کے متوازی ایک ہی افقی سطح میں واقع ہیں اور ایک دوسرے سے فاصلہ ۲ ب (کے ۱ ۲) پر ہیں۔ ایک رسی اسطوانوں پر متشابہ کھائی گئی ہے اور رسی کے سرے انتصافاً لٹک رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ رسی کا چھوٹے سے چھوٹا ممکن طول ۲ ب + ۲ ل (۲ مسن د۔ د) ہے جہاں درگڑ کی قدر ہے۔  
(دفعہ ۲۶۹ کی سولہویں مشق کے نتیجے کو استعمال کرو)

۴۔ ایک سلاح کو جس کا طول ۲ ب ہے دو وزنی رسیوں کے ذریعہ لٹکا یا گیا ہے جو ایک طرف اس کے سروں کے ساتھ اور دوسری طرف دو ثابت نقطوں کے ساتھ بندھی ہیں ثابت نقطوں کا درمیانی فاصلہ ۲ (۱ + ب) ہے۔ سلاح کا محل متوازی الافقی ہے اور دونوں ثابت نقطے سلاح کے اوپر بلندی ۱ پر واقع ہیں۔ اگر ہر ایک رسی کا طول ۱ ہو تو ثابت کرو کہ سلاح کا تناؤ رسی کے ایک ایسے ٹکڑے کے وزن کے مساوی ہو گا جس کا طول ج مساوات ۱ = ۱ + ۲ ج جبر ۲ ج سے حاصل ہوتا ہے۔

۵۔ ایک سلاح کا طول ۲ ل ہے اس کے سرے ایک وزنی رسی کے سروں کے ساتھ بندھے ہیں جس کا طول ۲ ل ہے۔ اس رسی کے ذریعہ سلاح ایک میخ پر متشابہ لٹک رہی ہے۔ سلاح کا وزن رسی کے وزن کا ۱ گنا ہے اور افقی تناؤ ۱ گنا ہے

ثابت کرو کہ  $M + N = (1 + N) \frac{1}{2} - N \frac{1}{2}$  مگر  $\frac{1}{2}$

۶۔ ایک یکساں زنجیر جس کا طول ۱ ہے دو ثابت نقطوں ۱ اور ۱ سے لٹک

یہی ہے جو ایک ہی افقی خط میں ایک دوسرے سے ۲ لم فاصلہ پر واقع ہیں۔ ثابت کرو  
اگر س ۱ لے تو زنجیرہ کے مرتب کی کم سے کم گہرائی  $\frac{1}{1-2}$  ہوگی جہاں ی مساوات  
ی سز ی = ۱ سے حاصل ہوتا ہے اور س کی متناظر قیمت  $\frac{1}{1-2}$  ہوگی۔

نیز ثابت کرو کہ مرتب کی کسی گہرائی کے جواب میں جو کم سے کم گہرائی سے زیادہ ہو س کی  
دو قیمتیں ہوں گی اور اگر س کو ان دو قیمتوں میں سے بڑی قیمت سے ذرا سا بڑھا دیا جائے تو  
مرتب پیچے اتر جاتا ہے اور اگر س کو ان دو قیمتوں میں سے چھوٹی قیمت سے ذرا سا بڑھا  
دیا جائے تو مرتب اوپر چڑھ آتا ہے۔

۷۔ ایک یکساں زنجیر کے سب سے درمیانوں کے ساتھ بند ہے جس میں سے ایک میخ  
دوسری میخ سے افقی فاصلہ ۱۲ بڑا اور متضالی فاصلہ ۲ ب پر پیچے واقع ہے۔ ثابت  
کرو کہ جیسے جیسے زنجیر کا لول بدلتا ہے تو سب سے اونچے مرتب والے زنجیرہ کا سب ل  
مساوات  $\frac{1}{ج} - \frac{1}{مزر ج} = \frac{ب}{ج} = \frac{1}{قمر ج}$  سے حاصل ہوتا ہے۔

۸۔ ایک یکساں زنجیر جس کا طول ۲ ل ہے دو نقطوں ل اور ب سے جو ایک ہی ہمواری  
میں واقع ہیں ٹک رہی ہے اور زنجیر کے سب سے پچھلے نقطہ کی گہرائی ل ب کے نیچے  
ک ہے۔ اگر فاصلہ ل ب (۱) میں بقدر صف ۱ کے خفیف سا اضافہ کیا جائے تو  
ثابت کرو کہ زنجیرہ کا اس بلندی صف ۱  $\times \frac{ک}{ل-1}$  میں سے اوپر اٹھ آئیگا جہاں  
ساوہ زاویہ ہے جو ل یا ب پر کے اس افقی کے ساتھ بنا۔ تے ہیں۔

۹۔ ایک معلومہ طول ل کی ایک یکساں وزنی زنجیر ہے جس نے ایک سرے کو ایک  
ثابت نقطہ کے ساتھ باندھ دیا گیا ہے۔ زنجیر ایک اور چکنی میخ پر سے جو ا دل الذکر  
ثابت نقطہ کی ہمواری پر اس سے ۲ فاصلہ پر واقع ہے گزرتی ہے۔ ثابت کرو کہ  
تبادل کے دو محل ہو گئے یا کوئی بھی محل نہیں ہوگا مگر جب اس کے کہ

$$\frac{3}{1+1} \sqrt{\frac{3}{1+1}}$$

جہاں لا مساوات  $\frac{+1}{-1} = 0$  تو  $\frac{+1}{-1}$  کی مثبت اصل ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگر تعادل کے دو محل ہوں تو وہ محل جس میں زنجیرو کا مبدل بڑا ہو قائم تعادل کا محل ہوگا۔

۱۰۔ ایک کیساں زنجیر کا طول معلوم ہے۔ اس کے دو سروں کو دو نقطوں کے ساتھ جو ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں باندھ دیا گیا ہے۔ زنجیر ایک اور چکنی میز پر سے گزرتی ہے جو ان دونوں نقطوں کے درمیان واقع ہے۔ ثابت کرو کہ اگر تعادل کا محل صرف تشاکل کا محل ہو تو یہ انتصابی سطح مستوی میں ہٹاؤں کے لئے قائم تعادل کا محل ہوگا لیکن اگر عدم تشاکل کی صورت میں تعادل کا محل ہو تو پہلا محل غیر قائم تعادل کا محل ہوگا۔

۱۱۔ طول  $l$  کی ایک زنجیر کو اس کے سروں پر سے تمام لیا گیا ہے اور اس کو ان نقطوں کو ملانے والے خط کے گرد گھمایا گیا ہے۔ پھر اس کے سروں کو کھینچ کر اس طرح ٹانگا گیا ہے کہ زنجیر تقریباً سیدھی ہو جاتی ہے اور اس کا تناؤ اس کے طول  $h$  کے وزن کے مساوی ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ فی ثانیہ گردشوں کی تعداد  $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$  ہے۔

۱۲۔ ایک وزنی یکساں رسی کو ایک سرے سے لٹکایا گیا ہے اور رسی ہوا کے زیر عمل جو افقی سمت میں یکساں رفتار کے ساتھ چل رہی ہے متعادل ہے۔ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ ہوا رسی کے کسی جزو پر جو عمادی قوت لگاتی ہے وہ جب اس کے متناسب ہے جہاں سا دہ زاویہ ہے جو جزو مذکور کا ماس افقی سمت کے ساتھ بناتا ہے تو ثابت کرو کہ رسی کی شکل  $s = (\text{جم سا} - \text{مس} \cdot g) \times (\text{جم سا} + \text{مم} \cdot g) = \text{مستقل}$  ہے

جہاں  $g$  ایسا مستقل ہے کہ رسی کے آزاد سرے پر سا کی قیمت  $\text{جم} \cdot g$  (مس) ہے۔

۱۳۔ وہ رفتار معلوم کرو جس پر ایک پیتے کے ذریعہ بڑی سے بڑی طاقت منتقل ہو سکے۔ جب ایسا ہو تو ثابت کرو کہ پیتے کی تنے ہوئی طرف اور ڈھیلی طرف کے تناؤں کی نسبت  $(2 + \sqrt{3}) : 3$  ہوگی جہاں  $m$  رگڑ کی قدر ہے اور  $\mu$  چرخی اور پیتے کے درمیان تماس کا زاویہ ہے۔

[اگر چرخ کا نصف قطر ۱ ہو اور فی اکائی طول کثیت ۴ ہو اور سہ پیتے کی زاد فی زفا رہو  
تو ابتدائی علم حرکت کی رو سے

$$\begin{aligned} \text{م نصف س} \times \text{سہ} ۱ &= (\text{ت} + \text{مف ت}) \text{ جب مف ط} - \text{م نصف س} \\ \text{اور} &= (\text{ت} + \text{مف ت}) \text{ جم مف ط} - \text{ت} - \text{م نصف س} \end{aligned}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{فرت}}{\text{وط}} = \text{سہ س} - \text{سہ م سہ} ۱$$

$$\text{لہذا س} = ۱ \text{ دو م سہ} ۱ \text{ م سہ} ۱$$

اس لئے اگر ت اور ت سروں پر کے تناؤ ہوں تو ہمیں آسانی سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ت} = \text{و سہ ط} (\text{ت} - \text{م سہ} ۱) + \text{م سہ} ۱$$

اس لئے طاقت جو منتقل ہوتی ہے

$$= (\text{ت} - \text{ت}) \text{ سہ} ۱ = (\text{و سہ ط} - ۱) (\text{ت} - \text{م سہ} ۱) \text{ سہ} ۱$$

اور اس لئے یہ سہ کی مختلف قیمتوں کے لئے بڑی سے بڑی ہوگی جب کہ م سہ ۱ = ۲۱ = ت

$$\text{اور} \quad \text{ت} = \frac{\text{ت}}{\text{ت}} = \frac{۲ \text{ و سہ ط} + ۱}{۳}$$

۴۴۔ ایک بے سرے والا رسی کا حلقہ ایک چکنے قائم اسطوانہ کے گرد جس کا نصف قطر ۱۰ ہے متساؤں ٹکڑا ہے۔ اگر رسی اسطوانہ کے محیط کے تین چوتھائی حصہ کو مس کرے تو اس کا کل طول اور سب سے بچنے نقطہ کا مقام معلوم کر دو۔

۱۵۔ ایک دہائی یکساں رسی ایک انتصابی دائرہ کے گرد لپیٹی ہوئی ہے اور اس قدر تہی ہوئی ہے کہ یہ سب سے بچنے نقطہ پر دائرہ کو چھوڑنے کے عین قریب پہنچے۔ ثابت کرو کہ سب سے اوپر بچنے نقطہ پر تناؤ سب سے بچنے نقطہ پر کے تناؤ کا تین گنا ہے۔

۱۶۔ ایک چکنا قرص قطع ناقص کی شکل کا ہے جس کے کچھ محور ۱ اور ب ۱۰ ہیں۔ اس کو ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح ثابت کر دیا گیا ہے کہ اس کے دونوں محور با انتصابی کے ساتھ مساوی زاویہ بناتے ہیں۔ ایک دہائی رسی ترس کے گرد گھسی کر آتی ہے اور اس سے

آہستہ آہستہ ڈھیلا کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جس نقطہ پر رسی قرص سے آگاہ ہوتی ہے اس نقطہ کا خارج المرکز زاویہ ذہ اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$۲ \text{ اوبس } ۲ \text{ ذ} - (۱ \text{ اس } ۱ - ۲ \text{ ب}) \text{ مس } ۲ \text{ ذ} - ۲ \text{ اوبس } ۲ = ۰$$

[یہ نقطہ اس بنا پر معلوم ہوتا ہے کہ اس نقطہ پر سختی کا دباؤ صفر اور کم سے کم ہے]

۱۸۔ ایک یکساں رسی جس کے سرے ایک نقطہ پر بند ہے ہیں ایک قوت کے مرکز و کو گھیرے ہوئے ہے اس کی مرکزی قوت انذفاعی قوت ہے اور فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے ثابت کرو کہ اگر رسی کا طول  $m \times$  ہو تو  $n$  پر رسی کے دو حصوں کے درمیان جو زاویہ اندرونی طور پر بنتا ہے وہ  $۲۰۰$  کے مساوی ہے۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ ایک یکساں رسی ایک دائرہ کی قوس کی شکل میں ساکن ہوگی اگر اس کے ہر جزو پر مرکزی قوت ایسی عمل کرے جو قوت کے مرکز سے اس جزو کے فاصلہ کے مکعب کے بالعکس متناسب ہو جبکہ قوت کا مرکز محیط پر کاکوئی نقطہ ہو۔

۱۹۔ ا ب ج د ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع  $۱$  ہے۔ ایک یکساں رسی جس کی خطی کثافت  $k$  ہے اور جسے ب اور د پر ثابت کر دیا گیا ہے اسے ایک انذفاعی قوت  $m \times ۳۷$  کے زیر عمل متبادل ہے اگر ب اور د پر رسی کے کماس ب د پر عمود دار ہوں اور اگر ان نقطوں میں سے ہر ایک پر تناؤ  $\frac{m \times ۳۷}{۲}$  ہو تو ثابت کرو کہ رسی منحنی  $r = ۱$  (جب ط + حجم ط) کی شکل میں ساکن ہوگی۔

۲۰۔ ثابت کرو کہ یکساں طاقت کے زنجیرہ کے لئے لولہ کی قوس مکن شکل ہو سکتی ہے جبکہ رسی کے ہر جزو پر انذفاعی قوت قطب سے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہو اور رسی کے دونوں سرے ثابت کر دئے گئے ہوں۔

۲۱۔ ایک انکھج رسی کا شعاعہ طول ملحقہ کی شکل میں ہے اس کے ہر جزو پر دو مرکزی قوتیں جن میں سے ہر ایک فاصلہ کے مکعب کے بالعکس متناسب ہے عمل کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ رسی کی شکل ایک دائرہ ہو سکتی ہے۔ اس دائرہ کا مرکز معلوم کرو۔

۲۲۔ ثابت کرو کہ ایک رسی ایک قطع ناقص کی شکل میں متبادل رہ سکتی ہے جبکہ اس پر



اس کے ماسکوں سے دو اندفاعی قوتیں (مہ  $\frac{3}{4}$  ر  $\frac{1}{4}$ ) اور (مہ  $\frac{1}{4}$  ر  $\frac{3}{4}$ ) عمل کریں جہاں ر اور ر کسی جزو کے فاصلے ہیں ماسکوں سے۔ نیز ثابت کرو کہ کسی جزو پر تناؤ مرکز سے اس جزو پر کے ماس پر عمود کے طول کے متناسب ہوتا ہے۔

۳۳۔ ایک چکنے مستدیر اسطوانہ کو جس کا نصف قطر  $\frac{1}{2}$  ہے اس طرح ثابت کر لیا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور ایک چکنی افقی میخ اس میں لگا دی گئی ہے اب ایک رسی (جس کا طول ۲ ل ہے) کا حلقہ اس اسطوانہ کے اوپر اس طرح ڈال دیا گیا ہے کہ حلقہ میخ سے ٹکرا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ تعادل کے محل میں میخ پر رسی کے دو حصوں کے درمیان زاویہ قائمہ  $\frac{\pi}{2}$  بنتا ہے جہاں ج چیز  $\frac{\pi}{2}$  = ل۔ اگر رسی کے سب سے نیچے نقطہ کو مسبار

مانا جائے اور سی کا محور انتصابی ہو اور لا اس مستدیر قوس کا طول ہو جو کسی قوس وان کا نکل ہو تو ہمیں افقی اور انتصابی سمتوں میں تحلیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} (\text{ت فرس}) = \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} (\text{ت فرس}) = 0$$

$$\text{لہذا ت فرس} = \text{مستقل} = \text{ج} \quad \text{اس لئے فرس} (\text{فرس}) = \frac{1}{\text{ج}}$$

یعنی  $\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} = \frac{1}{\text{ج}}$  ، یہ دفعہ ۲۵۱ کی تفرقی مساوات ہے اور اس لئے اس کا

حل بھی وہی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ رسی میں کوئی اختلال واقع نہ ہوگا اگر اسطوانہ کو پھیلا کر ایک انتصابی سطح مستوی میں تحلیل کر دیا جائے

۳۴۔ ایک یکساں وزنی رسی جس کا طول ۲ ل ہے نصف قطر کے ایک چکنے انتصابی اسطوانہ کے ساتھ مس کرتی ہوئی لٹک رہی ہے۔ اسے دو نقطوں کے ساتھ ثابت کر دیا گیا ہے جو ایک ہی افقی سطح مستوی میں ہیں اور نیز اسطوانہ کے محور میں سے گزرنیوالی انتصابی سطح مستوی میں محور سے  $\frac{1}{2}$  فاصلہ پر (جہاں  $\frac{1}{2}$  کر) واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ رسی کے سب سے نیچے نقطہ کی گہرائی ماہر ایک سہارے کے نقطے کے نیچے مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہے

$$\text{رجب}^1 = \frac{1}{4} + \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1} = \frac{3}{4} \text{ دیکھ } \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$$

۲۵۔ ایک رسی ایک چکنے کردہ پر اس طرح پڑی ہے کہ یہ ایک ثابت قطر میں سے گزرنے والی سب تراشوں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ یہ اسی حالت میں ساکن رہے گی اگر اس کے ہر جزو پر ایک قوت عمل کرے جو معلوم قطر پر عمود وار ہو اور اس جزو کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہو۔ نیز بتاؤ کہ تناؤ فاصلہ کے بالعکس متناسب ہوتا ہے۔

قطبی محدودوں (۱، ۲، ۳) کو استعمال کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ رسی کا سخنی مذکورہ بالا

تراشوں کو ایک ہی زاویہ قطع کرے گا اگر  $\frac{1}{\text{فرس}} = \text{جم بہ}$  اور  $\frac{1}{\text{جب ط}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}$  جب بہ اس لئے آسانی سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} = \text{جم ط جم ذ جم بہ} - \text{جب ذ جب بہ}$$

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} = \text{جم ط جب ذ جم بہ} + \text{جم ذ جب بہ}$$

$$\text{اور } \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} = - \text{جب ط جم بہ}$$

ثابت قطر کے گرد مہیار اتر لینے سے

$$\text{ت جب بہ} \times 1 \text{ جب ط} = \text{مستقل} \therefore \text{ت} = \frac{\text{م}}{\text{جب ط}}$$

دفعہ ۲۶۱ کی تیسری مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م جم ط} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} (\text{ت} \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}}) = \frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} (\text{ت جب ط جم بہ}) = 0$$

پس مسا = 0

اس لئے اگر ثابت قطر پر عمود وار باہر کی طرف عمل کرنے والی قوت ف ہو تو

دفعہ ۲۶۱ کی مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

ف جم ذ = - فرس (ست فرس) = - هر فرس (جم بمم ط جم ذ - جبب ذ جبب ب) جب ط

$$= \frac{\text{هر جم ذ}}{\text{وجب ط}} \text{ جس سے ف = } \frac{\text{م}}{\text{وجب ط}}$$

۲۶ - ایک رسی کا طول (و-۱) ۱ + ۲ جب ۲ عم ہے اور اس کے سروں کو ایک قائم

محزوط کی سطح پر کے دو نقطوں کے ساتھ جن کے فاصلے محزوط کے راس سے رادر قو × رہیں ثابت کروایا گیا ہے جہاں ۲ عم محزوط کا راسی زاویہ ہے اور ذہ زاویہ ہے جو محزوط کے محور اور دو معلومہ نقطوں میں سے گزرنے والی سطح مستوی کے درمیان بنتا ہے۔ اگر رسی سطح پر بحالت توازن راس سے ایک ایسی اندفاعی قوت کے زیر عمل جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہو ساکن رہے تو ثابت کرو کہ رسی کا توازن کا مخفی محزوط کے ہر کون کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرے گا۔

[جہاں مولو کا رمتوں کے نیپری نظام کی اساس ہے]

۲۷ - ایک ایسی چکنی گروشی سطح کی شکل دریافت کرو کہ جب اس کا محور انتہائی ہو اور جب

یکساں رستی اس پر ساکن ہو تو یہ سب نصف النہار کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرے۔  
(کون مخفی قائم زائد ہے)

۲۸ - دو بلا سے ہیں جن میں سے ہر ایک کا وزن ل ن ہے۔ ان کو ایک بے وزن میکلدار رسی کے ذریعہ جس کا مقیاس پک ل ہے ملایا گیا ہے۔ رسی ایک ثابت کھر درے افقی اسطوانہ پر جس کا نصف قطر ل ہے متشاکلاً لٹک رہی ہے۔ ابتداؤ رسی اپنے پورے طول میں یکساں طور پر کھینچی ہوئی ہے۔ اگر ایک بلا سے کو بعد رسیج ذنی کیا جائے تو ثابت کرو کہ دوسرے بلا سے کے حرکت کرنے سے پہلے بلا سے کو سہارنے والی رسی کے زائد انتہائی حصہ کا طبعی طول

$$\frac{1}{\text{م}} \text{وک} \frac{1 + \text{ن ذ م}}{\text{ن} + 1} - \frac{\text{ن ذ ن}}{\text{ن} + 1} \text{ہوگا}$$

۲۹۔ ایک وزنی لچکدار رسی کا طول ۱۲ اور لچک کی قدر اس کے وزن کے مساوی ہے یہ رستی ایک چکنے مکانی پر پڑی ہے جس کا وتر خاص ۴ ہے اور مکانی کا محور انصافی ہے اور رستی کا آزاد سر اس پر ہے جو سب سے نیچے نقطہ ہے۔ مکانی پر کا وہ نقطہ معلوم کرو جس کے ساتھ اوپر کا سر اواد بستہ ہے اور ثابت کرو کہ اُس نقطہ پر رسی کا تناؤ (۲۱-۱) ہے جہاں رسی کا وزن ہے۔

۳۰۔ ایک رسی جو ابتداً متجانس اور جس کا طول ۱ ہے دو معلومہ نقطوں کے ساتھ بندھی ہے اور تعادل کی حالت میں ایک دائرہ کی قوس کی شکل میں ایک ایسی اندفاعی قوت کے زیر عمل جو محیط پر کے ایک معلومہ نقطہ سے باہر کی طرف عمل کرتی ہے ساکن ہے قوت کا قانون معلوم کرو۔

۳۱۔ ایک وزنی لچکدار رستی بغیر کھینچاؤ کی حالت میں یکساں ہے۔ اس کو ایک چکنے مستدیر اسطوانہ کے گرد جس کا محور افقی ہے اس طرح رکھا گیا ہے کہ یہ اسطوانہ کے سب سے نیچے نقطہ کے ساتھ عین تماس نہیں رکھتی۔ اگر اس نقطہ پر جس کو مرکز سے ملانے والا خط سمت انصافی کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے تناؤ  $T$  ہو تو ثابت کرو کہ  $(T + \frac{1}{2})$  جرم طہ + ب جہاں لچک کا مقیاس ہے اور  $\frac{1}{2}$  اور ب مستقل ہیں جن کی قیمتیں لچک کے مقیاس رسی کے وزن اور اسطوانہ کے نصف قطر پر موقوف ہیں۔ اگر رسی کے اس انکج طول کا وزن جو اسطوانہ کے نصف قطر کے مساوی ہے وہ ہو اور لچک کا مقیاس بھی  $W$  ہو تو ثابت کرو کہ سب سے اونچے نقطہ پر تناؤ  $T$

$$ساوات \quad T + \frac{1}{2} = \frac{W}{2} = \frac{57+9}{2} \quad W \text{ سے حاصل ہوگا۔}$$

۳۲۔ ایک وزنی لچکدار رسی جو انکھی حالت میں یکساں ہے ایک چکنے انصافی دائرہ کی محدب جانب بڑی ہے اور اس کا ایک سر دائرہ کے سب سے اونچے نقطہ کے ساتھ بندھا ہے۔ اگر تعادل کی حالت میں کل طول دائرہ کے ربع کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ رسی کا طبعی طول ۱ ہاتھ لوک (۲۱+۱) کے مساوی ہوگا جہاں ۱ دائرہ کا نصف قطر ہے، ۲ لچک کی قدر ہے اور ۱ طبعی طول کی ایک اکائی کا وزن ہے۔

۳۳۔ ایک پچکدار رسی جو انچھی حالت میں یکساں ہے ایک چکنی مستدیر نلی کے اندر ایک جا ذبی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو نلی کے محیط پر کے ایک ایسے نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے جو رسی کے وسطی نقطہ کے عین مقابل ہے۔ اگر رسی تعادل کی حالت میں عین نصف دائرہ کو گھیرے ہوئے ہو تو ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا تناؤ

$$= (L + 2mk) - L$$

جہاں  $L$  پچک کی قدر ہے،  $L$  نلی کا نصف قطر ہے،  $m$  انچھی رسی کے اکائی طول کی گتیت ہے اور قوت فاصلہ نامہ کنا ہے۔

۳۴۔ ایک وزنی پچکدار رسی جب طبعی طول  $L$  ہے ایک ثابت نقطہ سے حالت تعادل میں لٹک رہی ہے اور اس کا کل کھینچاؤ  $M$  ہے۔ رسی کو مرغولہ شکل کی ایک چکنی ثابت نلی میں بند کیا گیا ہے جس کے کسی نقطہ پر کا ماس  $m$  افق کے ساتھ ایک مستقل زاویہ  $\theta$  بنا رہا ہے۔ رسی کے بالاترین نقطے کو نلی کے ساتھ ثابت کر دیا گیا ہے اور رسی تعادل کا محل اختیار کر لیتی ہے۔ ثابت کرو کہ اب کل پھیلاؤ  $M$  جب  $\theta$  ہے۔

۳۵۔ ایک رسی ایک سطح مستوی میں ایک مرکزی قوت کے زیر عمل تعادل میں ہے۔ ثابت کرو کہ مرکزی قوت ایسے بدلتی ہے جیسے  $\frac{1}{r}$ ۔

علم حرکت میں اس کے مماثل کیا ہے۔

اگر رسی پچکدار ہو تو ثابت کرو کہ رسی کے معلومہ شکل اختیار کر لینے کے لئے مرکزی قوت ایسے بدلتی ہے جیسے  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r}$  جہاں  $L$  اس رسی کے ہر نقطہ کے لئے مستقل ہے۔

۳۶۔ ایک ثابت کرہ  $B$  جس کا نصف قطر  $a$  ہے ایک وزنی پچکدار حلقہ جس کا طبعی نصف قطر  $c$  ہے متوازی الافق حالت میں پڑا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے محل تعادل میں زاویہ  $\theta$  جو حلقہ کے کسی قطر کے مماسی کرہ کے مرکز پر بنتا ہے مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے  $\sin \theta = \frac{2}{3}$  جب  $\theta = 0$ ۔ جب  $\theta = 90^\circ$  جہاں  $c = a$  جب  $\theta = 180^\circ$  اور حلقہ



## چودھواں باب کشش اور قوت

۲۷۶۔ مادہ کے ذرات کے درمیان کشش کا کلیہ جس کو نیوٹن کا کلیہ تجاذب بھی کہتے ہیں حسب ذیل ہے :- مادہ کا ہر ایک ذرہ مادہ کے ہر دیگر ذرہ کو ایسی قوت کے ساتھ کھینچتا ہے جو کمیتوں کے حاصل ضرب کے بالراست اور ان کے درمیانی فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔

اس لئے م اور م گرام کی کمیتوں کے درمیان جو ایک دوسرے سے

لاسنی میٹر کے فاصلہ پر ہوں کشش جو  $\frac{1}{100}$  ڈائن کے مساوی ہوتی ہے جہاں

جہ ایک ایسا مستقل ہے جس کی قیمت دفعہ مابعد میں معلوم کی جائیگی۔ اس مقدار جہ کو کشش کا مستقل کہتے ہیں۔

اس منزل پر طالب علم کو چاہیے کہ اوپر کے کلیہ کو بطور مفروضہ تسلیم کر لے۔

اس کا کوئی باقاعدہ ثبوت فی الحال نہیں دیا جاسکتا ہے تاہم طالب علم فرض

کر سکتا ہے کہ یہ کلیہ تمام کائنات کے لئے صحیح ہے اور سیارات

و اجرام فلکی کی حرکت کی توجیہ اس اصول کی بنا پر کافی طور پر ہو سکتی ہے۔

نیز اس حقیقت کی تصدیق علم حرکت کے اصولوں سے ہوتی ہے۔

ہم چند مثالیں ایسی بھی گونگے جن میں مربع بالعکس کے کلیہ کے علاوہ

دیگر قوانین کشش فرض کر لئے جائیں گے۔ لیکن یہ مثالیں اس کائنات

میں کسی حقیقی کشش کی بنا پر مبنی نہیں ہونگی۔





$$\frac{\text{جک م}}{ع} = [\text{جب ب - جب ع}] \quad (۱)$$

اور ما =  $\frac{\text{جک م} \times \text{جب ط} \times \text{فرط}}{ع} = \frac{\text{جک م}}{ع} [\text{جم ط}]$

$$\frac{\text{جک م}}{ع} = [\text{جم ع - جم ب}] \quad (۲)$$

اور حاصل کشش سرا ہو جو ن ل کے ساتھ زاویہ ذ بنائے تو

$$\text{سرا} = \sqrt{\frac{\text{جک م}}{ع} (\text{جب ب - جب ع}) + (\text{جم ع - جم ب})^2}$$

$$\frac{\text{جک م}}{ع} = \sqrt{\frac{\text{جک م}}{ع} (\text{جم ب - جم ع}) + \frac{\text{جک م}}{ع} (\text{جب ب - جب ع})^2}$$

$$\frac{\text{جک م}}{ع} = \frac{\text{جک م}}{ع} (\text{ان ب}) \quad (۳)$$

$$\text{اور مس ذ} = \frac{\text{ما}}{۴} = \frac{\text{جم ع - جم ب}}{\text{جب ب - جب ع}} = \frac{\text{مس ع + ب}}{۲}$$

$$\text{اور اس لئے ذ} = \frac{\text{ع + ب}}{۲} \quad (۴)$$

اس لئے حاصل کشش کی سمت زاویہ ان ب کی تنصیف کرتی ہے۔

نتیجہ صریح :- اگر سلاخ ا ب کا طول لا متناہی ہو تو ع = ۹۰ اور ب = ۹۰ +

$$\therefore \text{سرا} = \frac{\text{جک م}}{ع}$$

پس ایک لا متناہی سلاخ کی کشش کسی بیرونی نقطہ کے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔

۸۷۲ - اگر ہم دقتہ ما قبل کے نتیجہ (۳) میں ع = رکھیں جس کے یہ معنی ہیں کہ ہم نقطہ ن کو سلاخ کی سطح پر لیں تو ہمیں جواب لا متناہی حاصل ہوتا ہے

یہ صریحاً نامکن ہے۔ ہماری تحلیل کی ظاہری ناکامی کی وجہ یہ ہے کہ ہم نے دوران عمل میں قی پر تراش کے ہر جزو کو ن سے متساوی الفضل فرض کیا تھا۔ اب اگر نقطہ ن سلاح پر ہو تو ن میں سے گزرنے والی عمودی تراش کے نقطوں کے فاصلے جو ن سے ہیں وہ صفر سے لیکر سلاح کے قطر تک مسلسل بدلتے ہیں اس لئے ان کو باہم مساوی فرض نہیں کیا جاسکتا۔

اس صورت میں دلفہ ۲۸۵ کی مشق (۲) میں مکرر بحث کی گئی ہے۔

۲۷۹۔ ایک سلاح ا ب ہے اور اس کے باہر ایک نقطہ ن ہے۔ ن سے سلاح ا ب پر عمود ن ل (= ع) نکالا گیا ہے اور ن کو مرکز مان کر نصف قطر ن ل کے ساتھ ایک دائرہ کھینچا گیا ہے۔ اس دائرہ کی قوس جو ن ل اور ن ب کے اندر منقطع ہوتی ہے وہ ا ب ہے۔ ثابت کرو کہ سلاح ا ب کی جو کشش ن پر ہے وہ مساوی ہے اس کشش کے جو قوس ا ب کی وجہ سے نقطہ ن پر ہے جبکہ قوس دائرہ کو اسی مادہ کی بنی ہوئی فرض کیا جائے جس سے

سلاح بنی ہوئی ہے۔

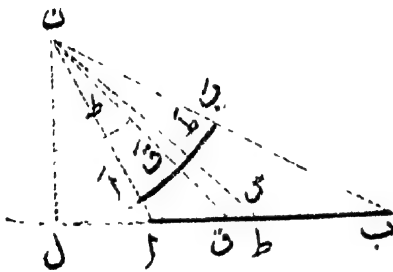
قی ط سلاح کا کوئی جزو  
لو اور فرض کرو کہ اس کے

جواب میں مستدیر قوس کا

جزو قی ط ہے

تب قی ط کی کشش ن پر

تب قی ط کی کشش ن پر



$$\frac{ق\ ط}{ن\ ن} \div \frac{ق\ ط}{ن\ ن} =$$

$$= \frac{ق\ ط}{ن\ ن} \times \frac{ن\ ن}{ق\ ط} \times \frac{ق\ ط}{ق\ س} \times \frac{ق\ س}{ق\ ط} = \frac{ق\ ط}{ن\ ن} \times \frac{ن\ ن}{ق\ ط} =$$

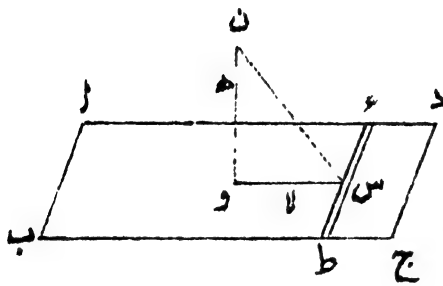
جہاں ق س عمود ہے ن ط پر

$$\frac{ن ق}{ن ق} = \frac{جم س ق ط ق ط ا ط}{ن ق} = \frac{ن ل}{ن ق} \times جم ط \times ق ط ا ط = ۱$$

اس لئے سلاخ اور قوس کے متناظر اجزا کی کششیں مساوی اور ایک ہی سمت میں ہیں پس دونوں صورتوں میں حاصل کششیں بھی وہی ہونگی۔

۲۸۰۔ ایک یکساں مستطیل تختی ا ب ج د ہے جس کے مرکز سے ایک خط و ن اس تختی پر علی القوائم کھینچا گیا ہے۔ اس عمود کے کسی نقطہ ن پر تختی کی کشش دریافت کرو۔

فرض کرو کہ تختی کی کثافت ہرادر موٹائی ک ہے نیز ا ب = ۲ ل اور د = ۲ ب اور و ن = ۵۔



فرض کرو کہ ا ب کے متوازی تختی کی ایک تراش و ط ہے جس کا فاصلہ و سے لائے اس کی چوڑائی مف ل ہے۔ اگر و ط کا وسطی نقطہ س ہو تو و ن ۲۴ کی رو سے اس کی کشش نقطہ ن پر

$$= \frac{۲ جم ک مر \times مف ل جب ط ن}{ن س} = \frac{۲ جم ک مر \times مف ل}{ن س} = \frac{۲ جم ک مر \times مف ل}{\sqrt{۲ ل^۲ + ۲ ہ ل^۲}} \times \frac{ل}{\sqrt{۲ ل^۲ + ۲ ہ ل^۲}}$$

اور ن س کی سمت میں عمل کرتی ہے۔

اس لئے و کی سمت میں عمل کرنے والی مجموعی قوت

$$= \frac{۲ جم ک مر \times مف ل}{\sqrt{۲ ل^۲ + ۲ ہ ل^۲}} \times \frac{ل}{\sqrt{۲ ل^۲ + ۲ ہ ل^۲}} = \frac{۲ جم ک مر \times مف ل}{\sqrt{۲ ل^۲ + ۲ ہ ل^۲}}$$

$$\text{لا} = \text{ھ مس ط رکھو جس سے لاکہ حدود صفر سے مس} - \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}$$

$$\text{یعنی جب} \frac{\text{ب}^2}{\text{ا} + \text{ب}^2} \text{ ہو جائیں گی۔}$$

$$\text{جہرک} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} = \frac{1}{\text{ھ}} \quad \text{جب} \frac{\text{ب}^2}{\text{ا} + \text{ب}^2} \text{ جم ط فرط}$$

$$\frac{1}{\text{ا}} = \left[ \frac{\text{ج}^2}{\text{ا} + \text{ج}^2} \right] \frac{\text{ب}^2}{\text{ا} + \text{ب}^2}$$

$$\frac{1}{\text{ا}} = \frac{\text{ج}^2}{\text{ا} + \text{ج}^2} \frac{\text{ب}^2}{\text{ا} + \text{ب}^2}$$

$$\text{لا} = \frac{\text{ج}^2}{\text{ا} + \text{ج}^2} \frac{\text{ب}^2}{\text{ا} + \text{ب}^2} \text{ جہاں م تختی کی کیت ہے۔}$$

## مثالیں

۱۔ تین سلاخوں کو جن کی کمیت فی اکائی طول یکساں ہے جوڑنے سے ایک مثلثی قالب بنایا گیا ہے۔ ان کی کشش قانون قدرت کے مطابق ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ایک ذرہ کو اس مثلث کے اندر فی دائرہ کے مرکز پر رکھ دیا جائے تو یہ ذرہ متعادل رہے گا۔

(دفعہ ۲۷۹ کا مسئلہ استعمال کرو)

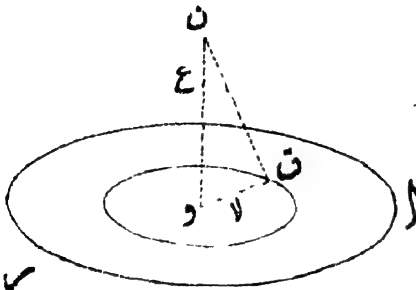
۲۔ ثابت کرو کہ ایک یکساں سلاخ [ب کی کشش نقطہ ن پر کی اکائی کمیت پر] ب

کی سمت کے متوازی ایسے بدلتی ہے جیسے  $\frac{1}{\text{ن}} - \frac{1}{\text{ب}}$



اس لئے کل کشش =  $\int_0^{\infty} \frac{2 \text{ جبکہ } ج،}{ج، + لا جبکہ ج،} \times \text{ک فرلا} = \text{وغیرہ}$  [

۲۸۱۔ ایک یکساں مستدیر پتلی تختی ہے جس کا نصف قطر لا اور موٹائی ک ہے۔ تختی کے محور پر ایک نقطہ



ن ہے جس کا فاصلہ مرکز سے ع ہے۔

نقطہ ن پر تختی کی کشش دریافت کرو۔

تختی کے اس حصہ پر غور کرو جو

دو ہم مرکز دائروں نصف قطر لا اور

لا + مع لا کے درمیان واقع ہو۔

اس حصہ کے کسی نقطہ ق کی کشش

ن پر کی اکائی کمیت پر ن ق کی سمت میں ہے اور اس کا جزو تخیلی ن و کی سمت میں

$$= \text{جب } \frac{\text{ق پر کے جزو کی کمیت}}{\text{ن ق}^2} \times \text{جم و ن ق}$$

$$= \text{جب } \times \frac{\text{ق پر کے جزو کی کمیت}}{\text{ن ق}^2} \times \frac{\text{ع}}{\text{ن ق}}$$

یہ جزوی رقبہ کے ہر ایک نقطہ کے لئے درست ہے۔

اس لئے اس جزوی رقبہ کی حاصل کشش

$$= \text{جب } \frac{2\pi \text{ لا} \times \text{مع لا} \times \text{ک مر}}{\text{ن ق}^2} \times \text{ع} = 2\pi \text{ جبکہ مرع} \frac{\text{لا مع لا}}{\text{ع}^2 (\text{ع}^2 + \text{لا}^2)}$$

جہاں مر تختی کی کثافت ہے فی اکائی رقبہ

اس لئے کل تختی کی کشش

$$= 2\pi \text{ جبکہ مرع} \int_0^{\text{لا فرلا}} \left[ \frac{1}{\text{ع}^2 (\text{ع}^2 + \text{لا}^2)} \right] \text{مرع}$$

$$\pi_2 = \text{جک مرع} \left[ \frac{1}{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} - \frac{1}{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} \right] = \pi_2 \text{ جک مر} \left[ \frac{1}{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} - \frac{1}{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} \right]$$

اگر تختی کے کسی نصف قطر (۱) کے محاذی ن پر زاویہ عم بنے تو

$$\text{جم عم} = \frac{\text{ون}}{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)} = \frac{\text{ع}}{\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)}$$

اور تختی کی حاصل کشش جو صر جان و کی سمت میں عمل کرتی ہے

$$\pi_2 = \text{جک مر} [1 - \text{جم عم}]$$

نتیجہ صریح - فرض کرو کہ تختی کا نصف قطر لا متناہی ہو جاتا ہے اور بناؤ علیہ زاویہ عم ۹۰ ہو جاتا ہے۔ تب حاصل کشش  $\pi_2$  جک مر ہے جو تختی سے نقطہ ن کے فاصلہ ع کے غیر تابع ہے۔

پس ایک لا متناہی پتلی تختی کی کشش کسی نقطہ ن پر جو تختی سے محدود فاصلہ پر ہو ن کے فاصلہ پر منحصر نہیں ہوتی اور حاصل ضرب  $\pi_2$  جک مر تختی کی کثیت فی اکائی رقبہ کے مساوی ہوتی ہے۔

۲۸۲ - اکائی کثیت کا ایک ذرہ ایک پتلی کشش کرنے والی سطح میں سے ایک جانب سے دوسری جانب عمود وار گزرتا ہے۔ بتاؤ کہ ذرہ پر سطح کی کشش میں کیا تبدیلی واقع ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ سطح کے مختلف جانبوں پر دو نقطے ن ن ایسے ہیں جو سطح کے لا انتہا قریب ہیں اور ن ن سطح مذکور پر عمود ہے۔ سطح پر ایک چھوٹا سا دائرہ ایسا کھینچو جس کا محور ن ن ہو اور جس کا رقبہ  $\Delta$  ہو۔ سطح کے باقی ماندہ حصہ کو ب سے سوہوم کرو۔



تب ن پر کی کشش =  $\Delta$  کی کشش ن پر + ب کی کشش ن پر (۱)

اور  $N$  پر کی کشش =  $A$  کی کشش  $N$  پر +  $B$  کی کشش  $N$  پر ..... (۲)  
تب چونکہ  $N$  اور  $N$  دونوں سطح کے لانتہا قریب ہیں اس لئے انتہا میں  
سطح کے حصہ  $B$  کی کشش نقطہ  $N$  پر = حصہ  $B$  کی کشش نقطہ  $N$  پر۔  
نیز کشش کی حد تک حصہ  $A$  کو نقطہ  $N$  سے وہی نسبت ہے جو ایک لانتہا ہی  
مستوی کو محدودنا صلہ پر کے ایک نقطہ سے ہے۔

اور حسب سابق دفعہ حصہ  $A$  کی کشش  $N$  پر =  $2\pi$  جہ ہرک  
اور حصہ  $A$  کی کشش  $N$  پر =  $2\pi$  جہ ہرک

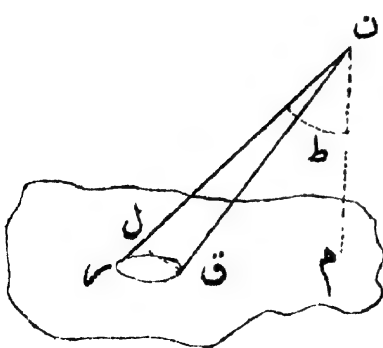
اس لئے (۱) اور (۲) سے عمل تفریق سے حاصل ہوتا ہے

$N$  پر کی کشش -  $N$  پر کی کشش =  $2\pi$  جہ ہرک

اس لئے سب اکائی کیفیت کا ذرہ کسی پہلی سطح کے ایک جانب کے لانتہا قریب  
نقطہ سے سطح کے دوسری جانب لانتہا قریب نقطہ تک سطح کے علی الذوات کم گزرتا  
ہے تو سطح کی جو کشش اس ذرہ پر ہے اس میں بقدر  $2\pi$  جہ ہرک کے تبدیلی  
واقع ہو جاتی ہے اور بناءً علیہ یہ تبدیلی سطح کی موٹائی اور مقام گزر کی کثافت پر  
مختصر ہوتی ہے۔

۳۸ - ثابت کر دو کہ ایک مستوی پترے کی بیرونی نقطہ پر کشش کا پترے کی

عماد کی سمت میں جزو تکمیلی جہ  $m$  سے  
ہوگا جہاں پترے کی  $N$  کی رقبہ  
کیفیت  $m$  ہے اور وہ مجسم زاویہ  
ہے جو پترے کے محاذی  $N$  پر  
بننا ہے۔



فرض کر دو کہ  $Q$  سے پترے کا  
کوئی بہت چھوٹا جزو ہے جس کے  
محاذی  $N$  پر مجسم زاویہ  $m$  سے  
بننا ہے۔ نیز فرض کر دو کہ  $N$  ق یا



ن = س = ر

تب انتہا میں ن پریس جزو کی کشش = جہ م ×  $\frac{\text{رقبہ سراق}}{\text{ن ق}^2}$   
ن م پترے پر عمود کھینچو اور فرض کرو کہ ق ل خط ن س پر عمود ہے

تب  $\angle \text{سراق ل} = 90^\circ - \angle \text{ق س ل} = \angle \text{س ر ن م} = ط$

ن پرق سراق کی کشش کا جزو تحلیل ن م کی سمت میں

$$= \text{جہ م} \times \frac{\text{رقبہ سراق} \times \text{جہ م ط}}{\text{ن ق}^2} = \text{جہ م} \times \frac{\text{رقبہ ق ل}}{\text{ن ق}^2} = \text{جہ م} \times \text{مف س}$$

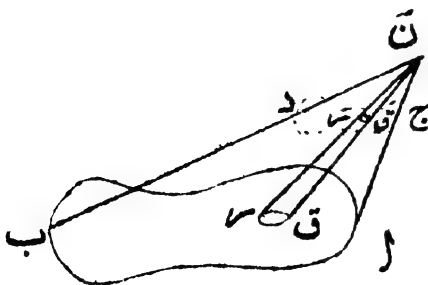
پس پترے پر علی التوا م سمت میں ن پر پترے کی کشش کا جزو تحلیل

$$= \angle \text{جہ م} \times \text{مف س} = \text{جہ م سہ جہاں سہ وہ مجسم زاویہ ہے}$$

جو کل پترے کے محاذی ن پر بنتا ہے۔

۴۸ ۲ - ایک یکساں مخروط کے تمام مقطوع جن کی موٹائی مساوی ہے اور جن کے مستوی رخ مخروط کے قاعدہ کے متوازی ہیں مخروط کے راس پر مساوی کشش رکھتے ہیں۔

فرض کرو کہ ا ب اور ج د ایک مخروط کی دو تراشیں ہیں جو مخروط کے قاعدہ کے متوازی ہیں اور جن کی موٹائیاں ایک چھوٹی مقدار د کے مساوی ہیں۔



فرض کرو کہ ایک چھوٹا مخروط جس کا راس ن اور راسی زاویہ بہت چھوٹا ہے، ان تراشوں کو بہت چھوٹے منحنیات ق س اور ق ر میں قطع کرتا ہے۔

چونکہ ق سہ اور ق سہ متشابہ منحنی ہیں اس لئے ان کے رقبے اور  
 بناءً علیہ ان کی موٹائیاں مساوی ہونے کی وجہ سے ان کی کمیتیں، اس  
 ن سے ان منحنیوں کے فاصلوں کے مربعوں کے تناسب ہونگی۔  
 اس لئے 
$$\frac{\text{ن پر ق سہ کی کشش}}{\text{ن پر ق سہ کی کشش}} = \frac{\text{رقبہ ق سہ}^2}{\text{رقبہ ق سہ}^2}$$

$$\frac{\text{رقبہ ق سہ}}{\text{رقبہ ق سہ}} = \frac{\text{ن ق}^2}{\text{ن ق}^2} \times \frac{\text{ن ق}^2}{\text{ن ق}^2} = 1$$

چونکہ متناظر اجزاء ق سہ اور ق سہ کی کششیں مساوی ہیں اس لئے کل  
 رقبوں ا ب اور ج د کی کششیں لمباظ مقدار اور سمت کے برابر ہونگی۔  
 اس لئے عمل جمع سے ایک ہی موٹائی کے دوناقص مخروطوں کی کشش  
 اس مخروط کے راس پر جس سے یہ ناقص مخروط حاصل کئے گئے ہوں مساوی  
 ہوتی ہے۔

۲۸۵۔ مشق ۱۔ ایک یکساں جسم قائم مستدیر مخروط ہے جس کی بلندی ھ اور راسی  
 زاویہ ۲ عمہ ہے۔ اس کی کشش اس مخروط کے مستوی قاعدہ کے مرکز و پر معلوم کرو۔  
 اگر قاعدہ کے اوپر ادبجائی لا پر ایک مستوی تراش لی جائے اور اس کے محاذی  
 مرکز و پر زاویہ ۲ ب بنے تو

$$\text{جسم ب} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + (\text{ھ} - \text{لا})^2}} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 - ۲\text{ھ}\text{لا} + \text{ھ}^2 + \text{لا}^2}}$$

اگر اس تراش کی موٹائی سہ لا ہو تو اس کی کشش

$$= \pi r^2 \left[ \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 - ۲\text{ھ}\text{لا} + \text{ھ}^2 + \text{لا}^2}} - ۱ \right] \text{ دفعہ } ۲۸۱ \text{ کی رو سے}$$

اس لئے کل مخروط کی کشش

$$\pi^2 = \text{جہ ہر ک} \left[ \frac{\text{لاجمہ عم}}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\text{جہ عم} + \text{جہ عم})}} \right] \text{ فرلا}$$

۱ = لا - ہ جب عم رکھنے سے یہ کشش

$$\pi^2 = \text{جہ ہر ک} \left[ \frac{\text{جم عم}}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\text{جم عم} + \text{جم عم})}} \right] \text{ فرما}$$

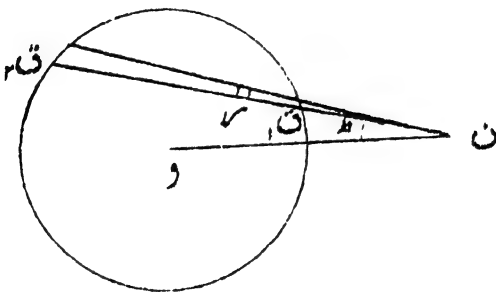
$$\pi^2 = \text{جہ ہر ک} \left[ \frac{\text{جم عم}}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\text{جم عم} + \text{جم عم})}} \right]$$

$$- \text{ہ جب عم} \left[ \frac{\text{جم عم}}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\text{جم عم} + \text{جم عم})}} \right]$$

$$\pi^2 = \text{جہ ہر ک} \left[ \frac{\text{جم عم} + \text{جم عم}}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\text{جم عم} + \text{جم عم})}} \right]$$

مشق ۲۔ اگر کشش کا کلیہ معادب فاصلہ کا ہو تو ایک یکساں مستدیر قرص کی کشش اسکی سطح مستوی پر کے ایک بیرونی نقطہ پر معلوم کرو۔

اس سے ایک یکساں لاہتا  
مستدیرا سطوانہ کی کشش  
محسوب کرو جو قدرت کے  
کلیہ کے مطابق کشش  
کرنا ہے۔



فرض کرو کہ قرص  
کا نصف قطر اگتافت

مراد ہوٹائی ک ہے اور دائرہ کے مرکز و سے معلومہ نقطہ ن کا فاصلہ ج ہے۔  
نیز فرض کرو کہ ن میں سے گزرنے والا کوئی سمتی نیم قطر و ن کے ساتھ زاویہ ط بناتا ہے

تب قرص کی مجموعی کشش

$$\pi^2 = \text{جہ ہر ک} \left[ \frac{\text{جم عم}}{1 - \sqrt{\frac{1}{2}(\text{جم عم} + \text{جم عم})}} \right]$$

$$\text{ج، حجم ط۔} \overline{\text{م}^2 - \text{ج}^2} \text{ جب ط۔ اور ج، حجم ط۔} + \overline{\text{م}^2 - \text{ج}^2} \text{ جب ط۔}$$

اور ط کی حدود صفر سے جب  $\frac{1}{\text{ج}}$  ہیں۔

$$\text{پس کشش مطلوبہ} = \text{ج، جک م} \overline{\text{م}^2 - \text{ج}^2} \text{ جب ط۔} \times \text{ج، حجم ط۔} \text{ فرط}$$

$$= \frac{\text{ج، جک م}^2}{\text{ج}} \times \text{ج، حجم ط۔} \text{ فرط} \quad \text{اگر ج، جب ط۔} = 1 \text{ جب ذ}$$

$$\text{اس لئے کشش} = \frac{\pi \text{ جک م}^2}{\text{ج}} = \text{ج،} \times \frac{\text{قرص کی کثرت}}{\text{مرکز سے فاصلہ}}$$

پس ن پر کشش اس کشش کے مساوی ہے جو قرص کی جگہ کثرت کو و پر کثرت کر دینے سے حاصل ہوتی ہے۔

اب فرض کرو کہ دائرہ مذکور ایک لائقنا ہی طول کے اسطوانہ کی عمادی تراش سے اب ہمیں سے گزرنے والے لائقنا ہی طول کے ریشے کی کشش کا وہ جزو تحلیل ہوگا غذا کی سطح کے علی القوائم ہے دفعہ ۲۷۷ کے نتیجہ صریح کی رو سے

$$= \frac{\pi \text{ ج، رصع ط مفع} \times \text{م}}{\text{سمت ن مایں}}$$

پس اس لائقنا ہی اسطوانہ کی کشش قرص کی کشش کے مساوی ہے بشرطیکہ ہم ک کی بجائے ۲ لکھیں اور اس لئے  $\frac{\pi \text{ ج، م}^2}{\text{ج}}$

اگر ن اسطوانہ کی سطح پر واقع ہو اور بناؤ علیہ ج، = 1 تو یہ کشش ہو جاتی ہے  $\pi \text{ ج، م}^2$  اس سے ہمیں ایک پتلی سلاخ کی کشش اس کی سطح پر کے کسی نقطہ پر حاصل ہوتی ہے [دفعہ ۲۷۸ سے مقابلہ کرو]

اگر ن اسطوانہ کے اندر ہو تو اس پر کی کشش  $= \pi \text{ ج، م}^2 \times \text{ج، م}^2$  ج، حجم ط۔ جہاں ر کی حدود صفر سے ج، حجم ط۔ +  $\overline{\text{م}^2 - \text{ج}^2}$  جب ط۔ تک ہیں اور ر کی صفر سے ۱۔

اس سے آسانی ن پرکشش  $\pi ۲$  جہ مرج حاصل ہوتی ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک یکساں اسطوانہ ہے جس کی بلندی  $h$  نصف قطر  $r$  اور کثافت  $\rho$  ہے۔ اس کے محور پر اس کے باہر ایک نقطہ  $N$  ہے جس کا فاصلہ اس کے سرے سے  $J$  ہے۔

ثابت کرو کہ اسطوانہ کی کشش اس نقطہ پر  $\pi ۲$  مر  $\left[ \frac{h}{r} + \frac{r}{(J+h)^2} + \frac{r}{(J-h)^2} \right]$  جہ ہے۔

۲۔ ایک کرہ میں سے جس کا نصف قطر  $r$  اور کثافت  $\rho$  ہے ایک قطعہ کاٹا گیا ہے ثابت کرو کہ اس قطعہ کی کشش اس کے راس پر ایک اکائی کثیت کے ذرہ پر

$$\pi ۲ \text{ جہ مر } \left[ 1 - \frac{1}{\frac{h}{r}} \right] \text{ ہے اور اس قطعہ کے قاعدہ کے مرکز پر}$$

$$\frac{\pi ۲ \text{ جہ مر } h}{3(h-r)^2} \left[ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right] \text{ ہے جہاں } h \text{ قطعہ مذکور کی بلندی ہے}$$

۳۔ ایک ٹھوس یکساں نصف کرہ ہے جس کا نصف قطر  $r$  ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے محور کے ایک نقطہ پر نصف کرہ کی کشش صفر ہے جہاں اس نقطہ کا مرکز سے فاصلہ  $J$  مساوات  $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 0$  کی اصل ہے۔

ثابت کرو کہ  $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 0$  تقریباً

۴۔ ایک قائم مستطیر مخروط ہے جس کی کثافت  $\rho$  ہے۔ اس کا محور امتصائی اور اس اوپر کی طرف ہے اس کے محور پر اس سے  $J$  فاصلہ پر ایک نقطہ  $N$  ہے۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ پر مخروط کی کشش ہے

$$\pi ۲ \text{ جہ مرج جب } \rho \text{ جم } \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\} \text{ جب } \rho \text{ جم } \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\} \text{ جب } \rho \text{ جم } \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\}$$

جہاں  $\theta$  مخروط کا راسی زاویہ ہے اور  $\phi$  وہ زاویہ ہے جو قاعدہ کے نصف قطر کے محاذی  $N$  پر بنتا ہے۔

۵۔ ایک یکساں بھون پتے مقطوع مخروط جن کے مستوی سروں کے نصف قطر  $r$  اور

ہیں۔ مخروط کے نقطہ رأس پر اکائی کثیت کا ایک ذرہ ہے جسے مقطوع مخروط کھینچتا ہے۔ ثابت کرو کہ کشش  $\pi^2$  جب ہر جب عجم ہر لوک  $\frac{1}{r}$  ہے جہاں  $r$  مخروط کا راسی زاویہ ہے اور ہر مخروط کی سطحی کثافت ہے

۶۔ ایک متجانس قائم مستدیر اسطوانہ ہے جس کا طول ایک سمت میں لامتناہی ہے اور دوسرے سرے کی تراش مکونوں پر علی القوائم ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کی کشش اس سرے کے مرکز پر  $\frac{\pi^2}{2}$  ہوگی جہاں ہم کثیت ہے اسطوانہ کی فی اکائی طول اور اسطوانہ کے مستوی سرے کا نصف قطر ہے۔

۷۔ ایک انتضابی ٹوکی اسطوانہ ہے جس کی بلندی  $h$  ہے اور جس کے سرے کا نصف قطر  $r$  ہے۔ اس کی کثافت ہر جے اور اس کے سرے اس کے مکونوں پر علی القوائم ہیں۔ اس کو اس کے محور میں سے گزرنے والی سطح مستوی سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ثابت کرو کہ ایک حصہ کی کشش اس کے قاعدہ کے مرکز پر  $\frac{\pi^2}{2} \left( \frac{h^2 + r^2}{h} \right)$  ہے۔

ہے۔ نیز معلوم کرو کہ حاصل کشش محور کے ساتھ کیا زاویہ بناتی ہے۔

۸۔ ایک متجانس منشور کا طول لامتناہی ہے اس کی تراش ایک مساوی الاضلاع

مثلث  $ABC$  ہے۔ ثابت کرو کہ منشور کی کشش  $\frac{\pi^2}{3}$  پر  $\frac{1}{3}$  ہے جہاں ہم منشور

کی فی اکائی طول کثیت ہے اور  $h$  مثلث کے ایک ضلع کا طول ہے۔

۹۔ ایک ناقصی قرص کی موٹائی  $h$  اور کثافت ہر ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی کشش

اسکے پر  $\pi^2$  جب کہ  $\frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{b} + \frac{1}{b} \right)$  ہے جہاں  $h$  اور  $b$  اس کے نیم محور ہیں۔

[سطوح کشش =  $\frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{b} + \frac{1}{b} \right)$  جب کہ  $\frac{1}{2} \left( \frac{h^2}{b} + \frac{1}{b} \right)$  جہاں  $h$  کی حدود صفر سے  $1$ ۔ ز جہ ط

اور ط کی حدود صفر سے  $\pi^2$  ہیں۔ اس طرح دوران عمل میں ایک لامتناہی مقدار لوک ر آجاتی ہے جبکہ صفر ہے۔ اس سے بچنے کے لئے ماسک کے گرد ایک دائرہ کھینچو

جس کا نصف قطر  $\frac{1}{2}(a + z)$  ہو۔ اس دائرہ کی حاصل کشش صریحاً تشاکل سے صفر ہے۔ اب تکملہ کی قیمت معلوم کرو جبکہ  $r$  کی حدود  $\frac{a}{2}$  سے  $\frac{a}{2}$  ہیں اور  $\frac{a}{2}$  کی حدود صفر سے  $\frac{a}{2}$  ہیں۔

۱۰۔ ایک ناقصی قرص کی کمیت  $m$  اور نیم محور  $a$  اور  $b$  ہیں اس مفروض پر کہ کلیہ کشش فاصلہ ہے ثابت کرو کہ نقطہ  $(a, 0)$  پر اس کی کشش کے اجزائے ترکیبی محوروں کی سمتوں میں  $\frac{m^2}{a+b} \times \frac{a}{a}$  اور  $\frac{m^2}{a+b} \times \frac{b}{b}$  ہیں۔

اس سے مستنبط کرو کہ ایک لائٹنا ہی متجانس ناقصی اسطوانہ کی کشش کے (جو کلیہ قدرت کے مطابق ہے) اجزاء ترکیبی نیم محوروں کے متوازی  $\frac{m^2}{a+b} \times \frac{a}{a}$  اور  $\frac{m^2}{a+b} \times \frac{b}{b}$  ہونگے جہاں  $a$  اور  $b$  تراش کے نیم محور ہیں اور  $m$  کثافت ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ نصف قطر  $a$  کے ایک مستدیر قرص کی کشش جس کا کلیہ تجاذب  $\frac{m^2}{a}$  (فاصلہ)  $\frac{m^2}{a} \times \frac{a}{a}$  ہوگی جب اس کے کہ  $a > \frac{a}{2}$ ۔

$m$  قرص کی کمیت ہے اور مجذوب نقطہ قرص کے مستوی میں واقع ہے اور مرکز سے فاصلہ  $a$  پر ہے۔

۱۲۔ ایک یکساں مستدیر مستوی حلقہ کی کشش اس کی سطح مستوی میں کسی بیرونی نقطہ پر معلوم کرو جبکہ کشش کا قانون فاصلہ کی ساتویں قوت کا مقابلہ ہے۔

۲۸۶۔ ایک پتلے یکساں کردی خول کی کشش کسی اندرونی یا بیرونی نقطہ  $n$  پر معلوم کرو۔

فرض کرو کہ کردی خول کا نصف قطر  $a$  ہے،  $k$  اور  $m$  بالترتیب اسکی





$$\therefore \text{حاصل کشش} = \int \frac{\pi \text{ جک مر } \frac{1}{r}}{\frac{1}{r}} \times \left( \frac{r^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{r^2} \right) \text{ فرسا}$$

$$= \pi \text{ جک مر } \frac{1}{r} \left[ \frac{r^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{r^2} \right] \frac{1}{r}$$

$$= \pi \text{ جک مر } \frac{1}{r} \left[ \frac{r^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{r^2} + \frac{r^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{r^2} - (r - \frac{1}{2}) - (r + \frac{1}{2}) \right]$$

$$= \frac{\pi \text{ جک مر } \frac{1}{r}}{r} = \frac{\text{جر دی خول کی کمیت}}{r}$$

پس کشش اتنی ہی ہے جتنی کہ خول کی کل کمیت کو وپر کثف کر دینے کی صورت میں ہوگی۔  
 ثانیاً فرض کرو کہ نقطہ ن خول کے اندر مقام ن پر ہے اور اس لئے  $\frac{1}{r} > \frac{1}{r}$ ۔  
 اب مکمل کی حدود ن سے ن اب تک یعنی  $\frac{1}{r} - \frac{1}{r}$  سے  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r}$  تک ہیں

$$\text{پس حاصل کشش} = \int \frac{\pi \text{ جک مر } \frac{1}{r}}{\frac{1}{r}} \times \left( \frac{r^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{r^2} \right) \text{ فرسا}$$

$$= \pi \text{ جک مر } \frac{1}{r} \left[ \frac{r^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{r^2} + \frac{r^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{r^2} - (r - \frac{1}{2}) - (r + \frac{1}{2}) \right]$$

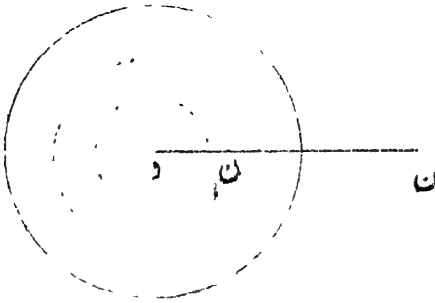
$$= \pi \text{ جک مر } \frac{1}{r} \left[ \frac{r^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{r^2} - \frac{r^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{r^2} + (r - \frac{1}{2}) - (r + \frac{1}{2}) \right] = 0$$

پس یکساں پتلا کر دی خول، بیرونی نقطہ کو اس طرح کھینچتا ہے گویا کہ اس خول  
 کی کل کمیت مرکز پر کثف ہے لیکن اندرونی نقطہ پر اس کی کشش صفر ہوتی ہے۔

۲۸۷ - ایک یکساں ٹھوس کرہ کی کشش کسی بیرونی یا اندرونی نقطہ پر معلوم کر دو۔

یہ تصور کرو کہ کرہ ہم مرکز خولوں کی مانند ہی تعداد سے بنا ہوا ہے جن میں سے

ہر ایک کی موٹائی لا انتہا کم ہے۔



اگر نقطہ ن کرہ کے  
باہر ہو تو یہ ان خولوں  
میں سے ہر ایک کے  
باہر ہو گا اور صوب  
سابق ہر ایک خول کی  
کشش ن پر اتنی  
ہی ہو گی جتنی کہ خول

کی کل کمیت کو د پر کمیت کرہ سے ہوتی یسی = جب  $\frac{\text{خول کی کمیت}}{\text{ون}^2}$

اس لئے ن پر کل کشش = جب  $\frac{\text{کل خولوں کی کمیتوں کا مجموعہ}}{\text{ون}^2}$  = کل کرہ کی کمیت  
پس بیرونی نقطہ پر ٹھوس کرہ کی کشش اتنی ہے جتنی کہ کرہ کی کل کمیت کو د پر کمیت  
کرہ سے ہوتی۔

اگر نقطہ کرہ کے اندر واقع ہو جیسا کہ ن پر تو ہم دیکھ چکے ہیں کہ ان سب  
خولوں کی کشش ن پر جن کا نصف قطر و ن سے بڑا ہے صفر ہے۔ اس لئے  
ہمیں صرف انہی خولوں کی کشش کو محسوب کرنا چاہیئے جن کا نصف قطر و ن  
یعنی ج سے کم ہے۔

موازا لہ کر خولوں کے لئے ن ایک بیرونی نقطہ ہے اور ان میں سے

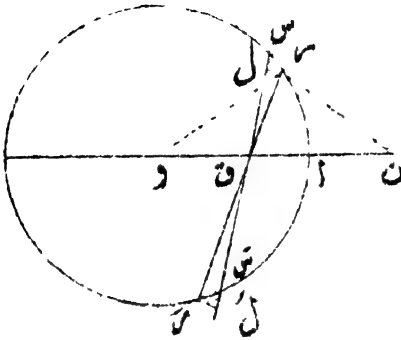
کسی ایک خول (نصف قطرا) کی کشش ن پر

$$= \text{جب} \times \frac{\text{خول کی کمیت}}{\text{ون}^2} = \text{جب} \times \frac{\pi \times \text{ن}^2 \times \text{م} \times \text{م}}{\text{ج}^2}$$

ہمیں اس مقدار کو ا کی قیمت صفر سے لیکر ج تک کے لئے تکمل کرنا چاہیئے

$$\text{اس لئے حاصل کشش ن پر} = \frac{\pi \times \text{م} \times \text{م}}{\text{ج}^2} \times \text{ن}^2 \times \text{م} \times \text{م} = \frac{\pi \times \text{م} \times \text{م}}{\text{ج}^2} \times \text{ن}^2 \times \text{م} \times \text{م}$$

اس لئے کسی اندرونی نقطہ پر ٹھوس کر کے کشش ایسے بدلتی ہے جیسے مرکز سے اس نقطہ کا فاصلہ



۲۸۸۔ ایک کردی خول کی

کشش۔ ہندسی ثبوت۔

فرض کرو کہ ن کوئی

بیرونی نقطہ ہے اور ق اس کا

مقلوب نقطہ ہے۔

لہذا وق × ون = وَا = ا

ایک چھوٹا سا مخروط کھینچو جس کا

راس ق رہو اور کرہ کو بہتہ چھوئے چھوئے رقبوں س س اور س س پر

قطع کرے۔

چونکہ ون × وق = وَا = و س

$$\therefore \frac{وق}{ون} = \frac{و س}{و س}$$

س مثلث وق س اور و س ن متشابه ہیں۔

اسی طرح سے مثلث وق س اور و س ن بھی متشابه ہیں

$$(۱) \quad \frac{وق س}{س ن} = \frac{و س}{ون} = \frac{و س}{ون} = \frac{وق س}{س ن}$$

$$(۲) \quad \frac{ون س}{س ن} = \frac{و س}{ون} = \frac{و س}{ون} = \frac{وق س}{س ن}$$

$$\frac{ن پر س کی کشش}{ن پر س کی کشش} = \frac{رقبہ س س}{رقبہ س س} = \frac{رقبہ س س}{س ن}$$

$$= \frac{رقبہ س س}{س ن} \times \frac{س ن}{س ن}$$

اب س ق س ق پر سال اور سال عمود نکالو  
تب رقبہ سراسر = عمودی تراش سال کا رقبہ × قط (زاویہ ل سراسر)  
= عمودی تراش سال کا رقبہ × قط (وسراق)

کیونکہ وسرا اور وسراق بالترتیب سراسر اور سال پر عمود ہیں  
اسی طرح سے رقبہ سراسر = عمودی تراش سال × قط (وسراق)

$$\therefore \frac{\text{رقبہ سراسر}}{\text{رقبہ سراسر}} = \frac{\text{عمودی رقبہ سال}}{\text{عمودی رقبہ سال}} = \frac{\text{ق سراق}}{\text{ق سراق}}$$

اس لئے سراسر کی کشش پر  $\frac{\text{ق سراق} \times \text{سراق}}{\text{ق سراق} \times \text{سراق}} = \text{مسادات (۱) کی مدد سے}$   
سراسر کی کشش پر  $\frac{\text{ق سراق} \times \text{سراق}}{\text{ق سراق} \times \text{سراق}}$

پس ان جزوی رقبوں کی کششیں ن پر مسادہ ہیں اور مسادات (۲) اسے ظاہر  
ہے کہ ان کے عمل کی سمتیں ون کے ساتھ مسادہ زاویہ بناتی ہیں اس لئے  
ان کا حاصل ون کی سمت میں عمل کرتا ہے۔

نیز اگر اس چھوٹے سے مخروط کا حجم زاویہ جوق پر بتا ہے مف سہ ہوا اور  
ن اکائی رقبہ خول کی کثرت ہوا تو

$$\begin{aligned} \text{ن و کی سمت میں سراسر کی کشش کا جزو ترکیبی} \\ = \frac{\text{جہر رقبہ سراسر} \times \text{جہر ون سراسر}}{\text{ن سراسر}} = \frac{\text{جہر رقبہ سراسر} \times \text{جہر وسراق}}{\text{ن سراسر}} \\ = \frac{\text{جہر رقبہ سراسر} \times \text{جہر ل سراسر}}{\text{ن سراسر}} = \frac{\text{جہر رقبہ سال}}{\text{ن سراسر}} = \frac{\text{جہر ق سراسر}}{\text{ن سراسر}} \\ = \frac{\text{جہر مف سراسر}}{\text{ون سراسر}} \end{aligned}$$

اس لئے خول کی مجموعی کشش =  $\frac{\text{جہر مف سراسر}}{\text{ون سراسر}} = \frac{\text{جہر ل سراسر}}{\text{ون سراسر}} = \text{جہر مف سراسر}$

$$\frac{\text{خول کی کثیت}}{\text{ون}^2} = \frac{\text{مر}^3}{\text{ون}^2} \times \pi^2$$

چونکہ مراس اور مراس کی کششیں مساوی ہیں اس لئے ظاہر ہے کہ مقلوب فقط ق کے دائیں طرف کا خول کا حصہ اور بائیں طرف کا خول کا حصہ ن کو مساوی قوت سے یکھینچتے ہیں۔ نیز ق میں سے گزرنے والی وہ مستوی سطح جو ون پر علی القوائم ہے ان تمام نقطوں کا طریق ہے جہاں ن سے خول پر کے مراس، خول کو مس کرتے ہیں بالفاظ دیگر یہ مستوی سطح بلحاظ خول کے ن کا قطبی مستوی ہے۔ پس ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ ن کی قطبی سطح مستوی خول کو جن دو حصوں میں تقسیم کرتی ہے ان کی کششیں ن پر مساوی ہوتی ہیں۔

نمائیا۔ ق پر کی کشش پر غور کرو۔

$$\frac{\text{مراس کی کشش ق پر}}{\text{مراس کی کشش ق پر}} = \frac{\text{رقبہ مراس}}{\text{رقبہ مراس}} \times \frac{\text{ق مراس}}{\text{ق مراس}} = 1$$

اس لئے مراس اور مراس کی حاصل کشش ق پر صفر ہے۔ اسی طرح باقی ہر ایک جزوی مخروط کے لئے پس کل خول کی کشش ق پر صفر ہے۔

نیز ق میں سے گزرنے والی اور و ا پر علی القوائم سطح مستوی کے دائیں اور بائیں طرف خول کے جو حصے ہیں ان کی کششیں ق پر مساوی ہیں۔

۲۸۹۔ ایک بلند سطح کی چوٹی پر جس کی بلندی سطح سمندر سے لاہے جاذبہ ارض کی قیمت معلوم کرو۔

اگر زمین کا نصف قطر ۱ ہو اور اس کی سطح پر جاذبہ ارض کی وجہ سے

$$\text{کشش ج ہو تو سطح سمندر سے بلندی لاپرکشش} = \frac{1}{(1+1)^2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$$

اور اس لئے کشش

$$ج = \frac{1}{2(1+1)} = ج [1 - \frac{1}{2}] \text{ کیونکہ } \frac{1}{2} \text{ چھوٹا ہے}$$

اگر سطح مرتفع کے مادہ کی کثافت ہر ہوا جبکہ سطح مرتفع کو ستائیس فرض کر لیا جائے تو اس کی کشش اس کی سطح کے قریب کے نقطہ پر دفعہ ۲۸۱ کی رو سے  $\pi^2$  حصہ لا ہر ہوگی۔

اب اگر زمین کی اوسط کثافت ک ہو

$$\text{توج} = ج = \frac{\frac{4}{3} \pi \times \frac{1}{2} ک}{\pi^2 ج ک} = \frac{2}{3}$$

اس لئے سطح مرتفع کی کشش =  $\frac{3}{2} \frac{لام}{1}$  ج

اس لئے سطح مرتفع کی چوٹی پر کل کشش ج

$$ج = [1 - \frac{1}{2}] \frac{لام}{1} + \frac{3}{2} \frac{لام}{1} ج = ج [1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}] \frac{لام}{1}$$

اگر ہم تقریبی طور پر یہ مان لیں کہ سطح زمین کے نزدیک کی چٹانوں کی کثافت ہر کل زمین کی اوسط کثافت ک کا تقریباً نصف ہے تو اس سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$ج = ج [1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}]$$

۲۹۰۔ تجاذب کے مستقل کی قیمت۔

دفعہ ۲۸۷ کے مسئلہ کی رو سے اور سطح زمین پر تجاذب ارض کی وجہ سے ہر ارض کی معلوم قیمت کی مدد سے ہم تجاذب کے مستقل کی تقریبی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

اگر اکائیوں کے کسی نظام کے بموجب زمین کا نصف قطر  $m$  ہو اور اس کی کیت  $M$  ہو تو زمین کی سطح پر کی اکائی کیت پراس کی کشش

$$= \frac{1 \times M}{r^2}$$

$$\therefore \text{ج} = \frac{M}{r^2} \dots \dots \dots (1)$$

سنٹی میٹر گرام سکند اکائیاں :-

$$\text{اس نظام میں } M = \frac{1}{1000} \times \pi \times r^2 \times \text{اوسط کثافت}$$

اور

$$r = 10 \times 9536 \text{ سنٹی میٹر}$$

اب زمین کی اوسط کثافت اضافی مشربو اے کی حال ہی کی تحقیقات کے

بوجوب ۵۶۵۲۷ ہے۔

اس لئے (۱) سے

$$981 = \frac{M}{r^2} = \frac{1}{1000} \times \pi \times r^2 \times 56527$$

$$= \frac{1}{1000} \times \pi \times 10^2 \times 9536^2 \times 56527$$

$$\text{پس ج} = 10 \times 9536^2$$

یعنی اگر ایک ایک گرام کی کیتوں کو دو نقطوں پر جن کا درمیانی فاصلہ ایک سنٹی میٹر ہو مکثف کر دیا جائے تو ان کے درمیان کشش  $10 \times 9536^2$  ڈائن کے مساوی ہوگی۔

یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ ۳۸۷۷ گرام کی دو مساوی کیتوں کو دو نقطوں پر جن کا درمیانی فاصلہ ایک سنٹی میٹر ہو مکثف کرنے سے ان کی باہمی کشش ایک ڈائن کے مساوی ہوگی۔

فٹ پونڈ سکند اکائیاں :-

اگر زمین کو تقریباً ۴۰۰۰ میل کے نصف قطر کا ایک کرہ فرض کیا جائے تو (۱) کے

موجب ۳۲۵۲ =  $\frac{32}{3} \times ۳۰۰۰ \times ۵۲۸۰ \times ۵۵۲۴ \times \frac{1}{4} \times ۶۲$

اس لئے جب =  $۱۶۰۵ \times ۹۰$  تقریباً

دو یکساں کروں گی کمیتیں ایک ایک پونڈ ہیں اور ان کے مرکوزوں کے درمیان ایک فٹ کا فاصلہ ہے۔ ان کے درمیان کشش  $۱۶۰۵ \times ۹۰$  پونڈل ہوگی۔

جب کے البعاد۔ اگر جب کے البعاد کو [جا] سے تعبیر کیا جائے اور حسب معمول کیتھ طول اور دقت کی اکائیوں کو [م] [ل] [ت] سے تعبیر کیا جائے تو مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$[ل] \times [ت] = [جا] \left[ \frac{[م]}{[ل]} \right]$$

$$\therefore [جا] = [م] [ل] [ت]$$

## مثالیں

۱۔ چاندی کے ایک کرہ کا نصف قطر ۵۵ سنتی میٹر ہے اور سونے کے ایک کرہ کا نصف قطر ۱۰ سنتی میٹر ہے۔ ان کے مرکوزوں کے درمیان فاصلہ ۱۱ سنتی میٹر ہے چاندی کی کثافت اضافی  $\frac{1}{4}$  اور سونے کی  $\frac{1}{4}$  ہے۔

ثابت کرو کہ ان کے درمیان ایک نقطہ پر جس کا فاصلہ چاندی کے کرہ کے مرکز سے ۱۱ سنتی میٹر ہے دونوں کروں کی مجموعی کشش صفر ہے۔

۲۔ ترسیم کے ذریعے ایک ذرہ کا وزن ظاہر کرو جبکہ اسے زمین کے مرکز سے باہر لایا جائے اور اسے بدرجہ لائٹناہی پر لے جائیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ جاؤبہ ارض کے زیر عمل کسی کیتھ کو زمین کے مرکز سے اس کی سطح پر لانے میں جو کام سرانجام دینا پڑتا ہے وہ اتنا ہی ہوتا ہے جتنا کہ اسے سطح سے لائٹناہی تک لے جانے میں سرانجام دینا پڑتا ہے۔ زمین کو متجانس کرہ مان لیا جائے۔



۴۔ اگر زمین کو کروہی فرض کیا جائے اور اس کی سطح پر یکساں گہرائی ھ کا ایک سمندر فرض کیا جائے تو ثابت کرو کہ جاذبہ ارض کی قیمت سمندر کی تہ پر چوٹی کی نسبت بقدر تقریباً ۴۴ ۳۳ ھ (۱/۳ ک - ھ) کے زیادہ ہوگی جہاں ھ سمندر کی کثافت ہے اور ھ زمین کی اوسط کثافت ہے۔

۵۔ اگر زمین کی نصف کیت کو ایک نہایت ہی پتلے یکساں بیرونی خول میں مکشف کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ خول میں دائروہی خلا کے مرکز پر جاذبہ ارض کی شدت اس کی معمولی قیمت کا ایک چوتھائی کم ہوگی۔

۶۔ ایک کرہ کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی سطح سے۔ ثابت کرو کہ ماحصل کشش کرہ کے نصف قطر کی ایک تہائی گہرائی بڑی سے بڑی ہوگی اور اس کی قیمت وہاں سطح پر کی قیمت کا ۱/۳ ہوگی۔

۷۔ اگر ایک کرہ یکساں کثافت کی ہم مرکز ہتوں پر مشتمل ہو تو ثابت کرو کہ اس کی کشش اس کے حجم کے ہر نقطہ پر سادی ہوگی بشرطیکہ ہر نقطہ پر کثافت مرکز سے فاصلہ کے بالعکس بدلتی ہو۔

۸۔ ایک ٹھوس کرہ کا نصف قطر ۱ ہے اس کے کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے ۱ ہے اس کی کثافت ک (۱/۳) ہے کرہ کے کسی بیرونی یا اندرونی نقطہ پر کشش معلوم کرو۔

۹۔ اگر ایک ٹھوس کرہ کی کسی نقطہ پر کثافت مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کا تغاقل ہو تو ثابت کرو کہ جیسے جیسے کرہ میں داخل ہوں کرہ کی کشش بڑھتی جاتی ہے بشرطیکہ سطح پر کی کثافت کرہ کی اوسط کثافت کے دو تہائی سے کم ہو۔

۱۰۔ ایک پتلے یکساں نصف کرہی خول کا نصف قطر ۱ اور کیت ۴ ہے اس کے اس قطر پر جو خول کے کنارے کے مستوی پر عود وار ہے ایک نقطہ لیا گیا ہے جس کا فاصلہ مرکز سے ۱ ہے ثابت کرو کہ اس نقطہ پر خول کی کشش ہے

$$\frac{4}{3} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} \right]$$

۱۱۔ ایک ٹھوس متجانس نصف کرہ کے مستوی قاعدہ کے کنارے پہل کوئی نقطہ لیا گیا ہے۔

نصف کرہ کی کشش اس نقطہ پر معلوم کرو۔  
 محدودوں کا مبادیہ - قاعدہ کے مرکز ج میں سے ایک خط دلاؤ اور وہی اس  
 قاعدہ پر عمود وار کھینچو۔ تب قطبی محدود ر، ط، ذ استعمال کرنے سے وہی سمت میں  
 کشش

$$= \frac{\text{جرم} \times \text{ر فرط} \times \text{رجب ط فرط}}{\text{جرم ط}}$$

ر کی حدود صفر سے ۱۲ جرم ذ جب ط ہیں کیونکہ کرہ کی سطح کی مسادات ہے

$$(۱-۱) = ۱^۲ + ۱^۲ = ۱^۲ \text{ یعنی } ۱^۲ = ۱^۲ = ۱^۲ \text{ ر جرم ذ جب ط}$$

ط کی حدود صفر سے  $\frac{\pi}{۴}$  ہیں اور ذ کی  $-\frac{\pi}{۴}$  سے  $\frac{\pi}{۴}$  ہیں۔

$$\text{اس لئے } = \text{جرم ر} \times ۱۲ \text{ جرم ذ جب ط جرم ط فرط فرط} = \frac{۱۲ \text{ جرم}}{۳}$$

مرکز کی سمت میں کشش کا جزو ترکیبی لا

$$= \frac{\text{جرم} \times \text{ر فرط} \times \text{رجب ط فرط}}{\text{جرم ط}} = \frac{\pi^۲ \text{ جرم}}{۳}$$

یہ نتیجہ از خود ظاہر ہے کیونکہ صریحاً نصف کرہ کی کشش وج کی سمت میں مکمل کرہ کی کشش  
 کا نصف ہوگی۔

تشاکل سے ظاہر ہے کہ کشش وہاں کی سمت میں صفر ہے۔

$$\text{پس حاصل کشش} = \frac{۱۲ \text{ جرم}}{۳} \times \sqrt{۳ + ۳} \text{ ہے جو وج کے ساتھ زاویہ } \frac{\pi}{۴}$$

بنائی ہے۔

۱۴۔ ایک نصف کرہ کی پہاڑی کا نصف قطر ۱ اور کثافت ہر سے ثابت کر کے اس کے  
 قاعدہ کے جنوب تر نقطہ پر ظاہری عرض بلد میں بقدر  $\frac{۱}{۳}$  کی کمی ہو جاتی ہے جہاں  
 ک اوسط کثافت اور نصف قطر ہے زمین کا۔

۱۵۔ اگر زمین کے شمالی اور جنوبی نصف کرہ سے بالترتیب یکساں کثافت ہر اور ک  
 کے ہوتے لیکن اوسط کثافت اتنی ہی رہتی جتنی کہ اب ہے تو ثابت کرو کہ خط استوا پر

جاذبہ ارض کی قیمت موجودہ جاذبہ ارض کی قیمت کا

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2\pi}} \left( \frac{m}{k} \right)^{\frac{2}{3}}$$

اور خط استوا پر شاقول کی سمت کا انحراف نقطہ راس سے

$$\left\{ \frac{2}{\pi} \frac{m}{k} \right\} \text{ ہوتا۔}$$

۱۴۔ اگر زمین کو کرہ فرض کیا جائے اور اس کے گرد لغافی مخروط کی شکل کا ایک پہاڑ ہو جس کا نصف راسی زاویہ عد ہو اور پہاڑ کی کثافت زمین کی یکساں کثافت کے مساوی ہو تو ثابت کر دکھایا جائے گی جوٹی پر جاذبہ ارض کی قیمت

$$\left\{ \frac{1 + \text{جب } ۳ \text{ جم } ۳}{۲ \text{ جب } ۳} \right\}$$

ہوگی جہاں ج جاذبہ ارض کی قیمت زمین کی سطح پر ہے۔

۱۵۔ معلوم کرو کہ کیا کشش کا کوئی اور کلیہ علاوہ فاصلہ کے مقلوب مربع کے ہو سکتا ہے جس سے کسی پتلے یکساں نصف کرہی خول کے کسی اندرونی نقطہ پر کشش صفر ہو۔

فرض کرو کہ کشش کا قانون  $\frac{f}{r^2}$  ہے پس دفعہ ۲۸۶ کی رو سے

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{f}{r^2} dr = \frac{f}{r_1} - \frac{f}{r_2} \quad \text{ف (س) فرس} = \frac{f}{r_1} - \frac{f}{r_2}$$

اس مساوات کو ج کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$\frac{f}{r^2} = \frac{f}{r_1} - \frac{f}{r_2} \quad \text{ف (س) فرس}$$

پھر (۱) کو د کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$\frac{f}{r^2} = \frac{f}{r_1} - \frac{f}{r_2} \quad \text{ف (س) فرس}$$

ان دو مساواتوں میں مکمل کر ساقط کر دینے سے

$$ف (۱ + ج) = ف (۱ - ج)$$

یہ نتیجہ ۱ کی تمام قیمتوں کے لئے اور ج کی ان تمام قیمتوں کے لئے جو اسے کم ہوں درست ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ف (۱) = مستقل ایک فرض کرو

$$پس قوت کا صرف ایک ہی قانون ممکن ہے اور وہ = \frac{ف (۱)}{ر} = \frac{ک}{ر}$$

۱۶ — معلوم کرو کہ کیا کشش کا کوئی اور کلیہ ہو سکتا ہے سو اسے فاصلہ کے معکوب مربع کے جس سے ایک کردی غول کی کشش کسی بیرونی نقطہ پر اتنی ہی ہو جتنی کہ غول کی کل کمیت اس کے مرکز پر کمیت کر دینے سے ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ کشش کا کلیہ \frac{ف (۱)}{ر} ہے۔ پس دفعہ ۲۸۶ کے بموجب

$$\pi \text{ جک } \frac{1}{r} \int_{r_0}^{r_1} \frac{f(r)}{r^2} dr = \frac{f(1) - f(r_1)}{r_1} \text{ ف (سا) فرسا}$$

$$= \pi \text{ جک } \frac{f(1)}{r_1} = \frac{ف (ج)}{ج}$$

$$\text{اور اس لئے } \frac{1}{r} \int_{r_0}^{r_1} \frac{f(r)}{r^2} dr = \frac{f(1) - f(r_1)}{r_1} \text{ ف (سا) فرسا} = \pi \text{ ف (ج) } (۱) \dots (۱)$$

۱ کی سب قیمتوں کے لئے اور ج کی ان سب قیمتوں کے لئے جو اسے بڑی ہوں یہ نتیجہ درست ہے۔

لہذا ۱ کے تفرق کرنے سے

$$- \frac{1}{r^2} \int_{r_0}^{r_1} \frac{f(r)}{r^2} dr = \frac{f(1) - f(r_1)}{r_1} \text{ ف (سا) فرسا}$$

$$+ \frac{1}{r} \left[ \frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \dots + \frac{f(n)}{n} \right] = \frac{ف (سا) فرسا}{r}$$

$$= \int_{1-j}^{1+j} \frac{f(s) + f(j)}{s} ds = \left[ \frac{f(s-j)}{s-j} + \frac{f(s+j)}{s+j} \right]_{1-j}^{1+j}$$

ج اور ۱ کے لحاظ سے بالترتیب تفریق کرنے سے

$$= \left[ \frac{f(s-j)}{s-j} + \frac{f(s+j)}{s+j} \right]_{1-j}^{1+j} + \left[ \frac{f(s-j)}{s-j} + \frac{f(s+j)}{s+j} \right]_{1-j}^{1+j}$$

$$= \int_{1-j}^{1+j} \frac{f(s)}{s} ds$$

$$= \left[ \frac{f(s-j)}{s-j} + \frac{f(s+j)}{s+j} \right]_{1-j}^{1+j} + \left[ \frac{f(s-j)}{s-j} + \frac{f(s+j)}{s+j} \right]_{1-j}^{1+j}$$

$$= \int_{1-j}^{1+j} \frac{f(s)}{s} ds$$

$$\frac{f(s-j)}{s-j} = \frac{f(s+j)}{s+j}$$

جو کہ سب قیمتوں کے لئے اور ج کی ۱ سے بڑی سب قیمتوں کے لئے درست ہے۔

اس لئے  $\frac{f(s)}{s}$  لازمی طور پر مستقل ہونا چاہیئے۔

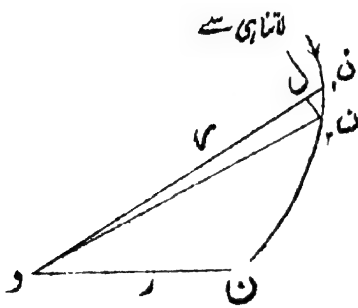
۱ =  $f(s) = a + b$  جہاں  $a$  اور  $b$  اختیاری مستقل ہیں

پس مطلوبہ کلیہ  $a + \frac{b}{s}$  ہے۔

پس ممکن کیلئے صرف تین ہیں راست فاصلہ کا کلید یا فاصلہ کے مقلوب مربع کا کلید یا ان کا مجموعہ۔

توہ

۲۹۱۔ کسی نقطہ ن پر ایک کمیت م کے توہ سے وہ کام مراد ہوتا ہے جو کمیت م کی کشش اکائی کیت کو لاتنا ہی سے



نقطہ ن تک کسی سیدھے یا منحنی راستہ سے لانے میں سرانجام دیتی ہے۔

نقطہ و پر کشش کرنے والی کمیت کے ایک چھوٹے سے جزو م پر غور کرو اور فرض کرو اکائی کیت کے ذرہ کے راستے کا ایک چھوٹا سا جزو ن ن ہے۔

یزون = سر اور ون = سر + مٹ

ن ل عمود کینچو ون پر ، تب انتہا میں

ول = ون = سر + مٹ

∴ ن ل = ون - ول = سر - (سر + مٹ) = - مٹ

اس لئے م کی کشش اکائی کیت کو ن سے ن تک لانے میں جو کام سرانجام دیتی ہے وہ

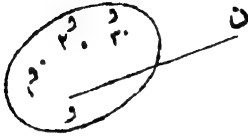
$$= \text{جرم} \times \text{ن ل} = \frac{\text{جرم}}{\text{سر}} (-\text{مٹ})$$

اس لئے اس کشش کا کل کام جبکہ اکائی کیت کا ذرہ لاتنا ہی سے نقطہ ن تک آئے جہاں ون کا طول رہے

$$= \left( \frac{\text{جرم}}{\text{سر}} \right) (-\text{مٹ}) = \left[ \frac{\text{جرم}}{\text{سر}} \right] = \text{جرم} \left[ \frac{1}{\text{سر}} - \frac{1}{\infty} \right] = \frac{\text{جرم}}{\text{سر}}$$

اسی قسم کا نتیجہ کشش کرنے والی کمیت کے دیگر جزوی حصوں  $م_۱$ ،  $م_۲$ ، ... کے لئے جو  $د$  پر واقع ہیں درست ہے۔

اس لئے کل کشش کرنے والی کمیت کا مجموعی کام



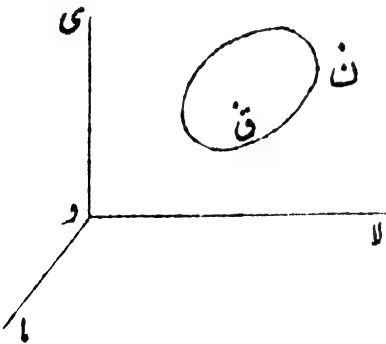
$$= \frac{ج_۱}{ن_۱} + \frac{ج_۲}{ن_۲} + \dots$$

$$= \frac{ج}{ن} فرم$$

پس کمیت ہر کا توہ کسی نقطہ پر حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہوتا ہے فرض کرو کمیت ہر کا ایک چھوٹا سا جزو فرم ہے جس کا فاصلہ  $ن$  سے رہے تب کل کمیت کا توہ  $ن$  پر = جس کے فرم ہے جہاں تک کہ تمام کشش کرنے والے مادہ میں لینا چاہیئے۔

اس مقدار کو بالعموم توہ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

۲۹۲ - اگر ایک کشش کرنے والے جسم کا توہ کسی نقطہ  $ن$  پر توہ ہو اور  $ن$  کے محدود لا، ما، ی ہوں تو ہم ثابت کر سکتے



ہیں کہ فرق  $\frac{ج}{ن}$  پر کی کشش کا محور لا

کی مثبت سمت کے متوازی جزو ترکیبی

ہے اور اسی طرح سے فرق  $\frac{ج}{ن}$  اور فرق  $\frac{ج}{ن}$

کے لئے۔

فرض کرو کہ کشش کرنے والی کمیت کا کوئی جزو فرم ہے نقطہ پر جس کے محدود لا، ما، ی ہیں۔ تب دہنہ ماقبل کی تعریف کے بموجب

$$توہ = ج \frac{فرم}{ن} = ج \frac{فرم}{(لا-لا) + (ما-ما) + (ی-ی)}$$

$$\frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = \frac{\text{فرم (لا - لا)}}{\text{جہ}} \left\{ \frac{1}{2} (1 - 1) + \frac{1}{2} (1 - 1) + \frac{1}{2} (1 - 1) \right\}$$

$$= \frac{\text{جہ}}{\text{ن ق}} \times \frac{\text{فرم}}{\text{ن ق}} = \frac{\text{جہ}}{\text{ن ق}} \times \frac{\text{فرم}}{\text{ن ق}} \times \text{جم ط} \dots (1)$$

جہاں ق ن کا میلان محور لا کے ساتھ ط ہے۔

اب جزو فرم کی کشش ن پر جہ فرم ہے جو ن ق کی سمت میں عمل کرتی ہے۔ اور اس لئے اس کشش کا تحلیل حصہ محور لا کی منفی سمت میں

$$= \text{جہ} \times \frac{\text{فرم}}{\text{ن ق}} \times \text{جم ط}$$

اس لئے کل کمیت کی کشش کا جزو تحلیل محور لا کی مثبت سمت میں = جہ فرم ن ق جم ط

لہذا (۱) سے ظاہر ہے کہ

فرق = کل کمیت کی حاصل کشش محور لا کی مثبت سمت میں اسی طرح فرق اور فرق فری

بالترتیب ا اور ی کے محوروں کی سمتوں میں حاصل کششیں ہیں۔

۲۹۴ - دغات ماقبل سے ہم دیکھتے ہیں کہ کسی نقطہ پر توہ مکملہ جہ فرم کی قیمت کو محسوب کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے جبکہ تکمل کے عمل کو پوری کمیت پر عاید کیا جائے یا اگر یوں کرنا زیادہ سہل ہو تو ہم اسے اس خصوصیت کی بناء پر بھی معلوم کر سکتے ہیں کہ اس کے تفرقی سر بلحاظ لا، ما، ی کے بالترتیب ان محوروں کی سمتوں میں حاصل قوت کے جزو ترکیبی ہیں۔

نیز اگر ق ب آسانی پہلے معلوم ہو جائے تو ہم تحلیل قوتوں کو محض تفرق کرنے سے معلوم کر سکتے ہیں۔

۲۹۴ - اگر مفت س نقطہ ن میں سے کسی سمت میں کھینچے ہوئے خط مستقیم کا چھوٹا



ساجزہ ہو اور لا، ما، ہی محوروں پر اس کے ظل معن لا، معن ما، معن ہی ہوں اور  
بناءً علیہ اس کے سمتی جیوب التمام

فرلا، فرما، فری  $\frac{\text{فری}}{\text{فرس}}$  ہوں تو معن س کی سمت میں حاصل کشش

$$\frac{\text{جہت لا}}{\text{جہت لا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} + \frac{\text{جہت ما}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{جہت لا}} + \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرس}}$$

اگر یہ جزو معن س، ن ن ہو تو یہ مساوات اس واقعہ کو تعبیر کرتی ہے کہ ن ن کی  
سمت میں قوت

$$= \frac{\text{ن پر قوہ} - \text{ن پر قوہ}}{\text{ن ن}}$$

۲۹۵۔ دفعۃً اقبل سے ظاہر ہے کہ اگر ن کا مقام معمولی قطبی محدودوں ر، ط، ذ  
میں معلوم ہو تو حاصل کششیں یہ ہیں:-

$$\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرس}} ، \text{ ر کی سمت میں}$$

$$\frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرس}} ، \text{ ر پر عمود وار طہ کی سطح مستوی میں}$$

$$\frac{1}{\text{رجب ط}} \times \frac{\text{فرقہ}}{\text{فرس}} ، \text{ طہ کی سطح مستوی پر عمود وار سمت میں۔}$$

۲۹۶۔ جب مجذوب نقطہ کشش کرنے والی کثیت کے اندر ہو جس صورت  
میں ر کی کچھ قیمتیں صفر ہوں گی تو بظاہر یہ معلوم ہوتا ہے کہ قوہ (جہت فرم) کی قیمت  
لاتنا ہی ہوگی۔

لیکن یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دراصل ایسا نہیں ہے۔ کیونکہ  
اگر نقطہ ن کو قطبی محدودوں ر، ط، ذ کا مبداء مانا جائے اور ہر کشش ہو تو  
معن م = معن ر × معن ط × رجب ط معن طہ × ہر

اس لئے کل جسم کا توہ قہ =  $\frac{1}{1111}$  مر جب ط فر فرط فرہ  
 یہ تکملہ لا متناہی نہیں ہوتا خواہ ر کی بعض قیمتیں صفر کیوں نہ ہوں۔  
 اسی طرح دفعہ ۲۹۲ کی مساوات (۱) کی رو سے

$$\frac{\text{فرق}}{\text{فرلا}} = - \text{جہ} \text{ ک فرم } \frac{\text{جہ}}{\text{ن ق}} \text{ جم (ق ن لا)}$$

$$= - \text{جہ} \frac{1}{1111} \text{ مر جب ط فر فرط فرہ} \frac{\text{جہ}}{\text{ر}} \text{ جم ف جب ط}$$

$$= - \text{جہ} \frac{1}{1111} \text{ مر جب ط جم فہ فر فرط فرہ}$$

اور اس کا کوئی جزو لا متناہی نہیں ہوتا خواہ ر صفر ہی کیوں نہ ہو۔  
 پس توہ اور کشش کے اجزائے ترکیبی دونوں مسلسل تفاعل ہوتے ہیں  
 بشرطیکہ کشش کرنے والی کیت کا ہر ایک جزو محدود و جمعی کثافت رکھتا ہو۔  
 یہ بات توہ کے دوسرے تفرقی سر کے لئے درست نہیں ہے کیونکہ دفعہ ۲۹۲  
 کے جملے کو الجھا ط لا کے تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فرق}^2}{\text{فرلا}^2} = - \text{جہ} \text{ ک فرم } \left[ \frac{1}{\text{ن ق}} - \frac{3}{\text{ن ق}^2} \right] \frac{3}{(لا - لا)^2}$$

مجبوز نقطہ (لا، لا، ی) کو حسب سابق مبداء ماننے سے اور قطبی محدودوں میں مندرج  
 کرنے سے

$$\frac{\text{فرق}^2}{\text{فرلا}^2} = - \text{جہ} \frac{1}{1111} \text{ مر جب ط جب ط} \frac{3}{\text{ر}} \text{ جب ط فر فرط فرہ}$$

یہاں تکمل کی علامت کے اندر کی مقدار لا متناہی ہو جاتی ہے جبکہ ر صفر ہو جائے  
 یعنی جب مجبوز نقطہ کشش کرنے والی کیت کے اندر ہو تو ر کی بعض قیمتوں کے  
 لئے یہ مقدار لا متناہی ہوتی ہے۔

لہذا دوسرا تفرقی مسلسل نہیں رہتا جب ہم کشش کرنے والی کیت کے

باہر سے اندر جاتے ہیں۔

اوپر کے تناج صریحاً قدرت کے کلیہ کشش کے علاوہ دوسرے کلیوں کے لئے درست نہیں رہتے۔ مثلاً اگر کشش کا کلیہ فاصلہ کے مقلوب بمعبر کا کلیہ ہو تو فرق  $\frac{1}{r}$  کے لئے متذکرہ بالا تکرار میں ر نسب نما میں آئے گا اور اس لئے

اس کے بعض جزاؤں لاتنا ہی ہو جائیں گے جبکہ مجذوب نقطہ کشش کرنے والی کمیت کے اندر واقع ہو۔

۴۹۷۔ فاصلہ کے مقلوب مربع کے سواے کشش کے دوسرے کلیوں کے لئے قوہ:-

اگر کشش کا کلیہ ج  $\frac{1}{r^n}$  ہو تو کمیت م کا قوہ فاصلہ پر حسب دفعہ ۴۹۸

$$J = \left( \frac{1}{r^n} - \frac{1}{r_0^n} \right) \times \frac{1}{r_0^n} = \left[ \frac{1}{r^n} - \frac{1}{r_0^n} \right] \times \frac{1}{r_0^n}$$

$$\text{اس لئے کل کمیت م کا قوہ} = \frac{J}{r^n} = \frac{1}{r^n} \left( \frac{1}{r^n} - \frac{1}{r_0^n} \right)$$

یہ نتیجہ درست رہتا ہے بشرطیکہ n مثبت ہو اور ایک سے بڑا ہو

اگر کلیہ مقلوب فاصلہ کا کلیہ ہو یعنی اگر n = 1 تو

$$\text{قوہ} = J = \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \times \frac{1}{r_0} = \frac{1}{r_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

جہاں ج لاتنا ہی مستقل ہے۔

نیز کل کشش کرنے والی کمیت کا قوہ

$$= J = \frac{1}{r_0} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \times \frac{1}{r_0} \quad \text{جہاں ج بھی لاتنا ہی مستقل ہے۔}$$

۴۹۸۔ ایک پتلی کیساں سلاخ کی پیر والی نقطہ پر قوہ:-

دفعہ ۲۷۷ کی شکل اور ترقیم کے مطابق سلاخ ا ب کا ن پر قوہ

$$= \frac{\text{جک مر فلان}}{\text{جک مرع قطا ط فرط}} = \frac{\text{ع قطا ط}}{\text{ع قطا ط}}$$

$$= \text{جک مر فلان قطا ط فرط} = \text{جک مر} [\text{لوک مس} (\frac{\text{ط}}{\text{ف}} + \frac{\text{ن}}{\text{م}})]$$

$$= \frac{\text{جک مر لوک مس} (\frac{\text{ط}}{\text{ف}} + \frac{\text{ن}}{\text{م}})}{(\frac{\text{ط}}{\text{ف}} + \frac{\text{ن}}{\text{م}}) \text{مس}}$$

$$\text{ا ب} \text{ ح ن ا ب} = \frac{\text{ط}}{\text{ف}} + \text{ع اس لئے مس} (\frac{\text{ط}}{\text{ف}} + \frac{\text{ن}}{\text{م}}) = \text{مس} \frac{\text{ن ا ب}}{\text{ف}}$$

$$\text{ن ب ا} = \frac{\text{ط}}{\text{ف}} - \text{ب}$$

$$\text{لہذا} \quad \text{مس} (\frac{\text{ط}}{\text{ف}} + \frac{\text{ن}}{\text{م}}) = \text{م} (\frac{\text{ط}}{\text{ف}} - \frac{\text{ن}}{\text{م}}) = \text{م} \frac{\text{ن ب ا}}{\text{ف}}$$

اس لئے ن پر قوہ

$$= \text{جک مر لوک} [\text{م} \frac{\text{ن ا ب}}{\text{ف}} \times \text{م} \frac{\text{ن ب ا}}{\text{ف}}]$$

$$\text{اگر ا ب} = \text{ا} , \text{ا ن} = \text{ب} , \text{اور ب ا} = \text{ب}$$

تو علم مثلث کے معمولی ضابطوں کی رو سے

$$\text{م} \frac{\text{ن ا ب}}{\text{ف}} \times \text{م} \frac{\text{ن ب ا}}{\text{ف}} = \sqrt{\frac{\text{س} (\text{س} - \text{ا})}{(\text{ا} - \text{ب}) (\text{ب} - \text{ا})}} \times \sqrt{\frac{\text{س} (\text{س} - \text{ب})}{(\text{ا} - \text{ب}) (\text{ا} - \text{ب})}}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{س} - \text{ا}} = \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{س}}{\text{ا} - \text{ب} + \text{ا}}$$

$$\text{اس لئے ن پر کا قوہ} = \text{جک مر لوک} \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{س}}{\text{ا} - \text{ب} + \text{ا}}$$

نتیجہ صریح (۱) اس سے پتہ چلتا ہے کہ قوہ ان سب لفظوں کے لئے مستقل

رہتا ہے جن کے لئے  $\frac{1}{2}$  مستقل ہے۔ یعنی قوت ان سب نقطوں کے لئے جو ایسے ناقص پر واقع ہیں جس کے ماسکے  $\frac{1}{2}$  اور ب ہیں مستقل ہے۔

اس لئے ایک پتلی سلاخ  $\frac{1}{2}$  سب کی صورت میں مساوی القوتہ منحنی ناقص ہوتے ہیں جن کے ماسکے  $\frac{1}{2}$  اور ب ہوتے ہیں۔

نتیجہ صریح (۲) اگر سلاخ دونوں سمتوں میں لاتنا ہی ہو تو اس کا قوت

$$Q = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \right] \text{ جبکہ } \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \text{ فلا}$$

$$Q = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \right] \text{ جبکہ } \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \text{ فلا}$$

$$Q = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \right] \text{ جبکہ } \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \text{ فلا}$$

جہاں ج لاتنا ہی مستقل ہے۔

یہ نتیجہ دفعہ ۲۷۷ کے نتیجہ صریح سے بھی حاصل ہو سکتا ہے کیونکہ

$$\frac{Q}{\text{فرق}} = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \right] \text{ جبکہ } \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \text{ فلا}$$

$$Q = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \right] \text{ جبکہ } \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \text{ فلا}$$

نتیجہ صریح (۳) اگر سلاخ سمت  $\frac{1}{2}$  ب محدودہ میں لاتنا ہی ہو لیکن اس کا ایک

$$Q = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \right] \text{ جبکہ } \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \text{ فلا}$$

جہاں ج لاتنا ہی مستقل ہے

$$Q = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \right] \text{ جبکہ } \frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}} \text{ فلا}$$

۲۹۹۔ ایک یکساں مستدیر تختی کا اس کے محور پر کے کسی نقطہ پر قوہ :-

دفعہ ۲۸۱ کی شکل اور ترتیم کے مطابق ن پر کا قوہ

$$J = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق} = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق} = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق}$$

$$J_{22} = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق} = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق}$$

$$J_{22} = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق} = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق}$$

یا قوہ ق دفعہ ۲۸۱ کے نتیجہ کی مدد سے بھی معلوم ہو سکتا ہے ، کیونکہ

$$\frac{\text{فرقہ}}{\text{فرع}} = \text{کشش دن کی سمت میں}$$

$$J_{22} = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق} = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق}$$

$$J_{22} = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق} = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق}$$

مستقل صفر ہے کیونکہ جب ع صفر ہو تو

ق = تختی کے مرکز پر قوہ

$$J_{22} = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق} = \frac{J_{22} \times \text{فر} \times \text{لا} \times \text{ک م}}{ن ق}$$

مثالیں

۱۔ ایک یکساں پتلی سلاخ کا طول لا انتہا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی کشش کے خلاف اکائی کثیت کے ذرہ کو اس سے عمودی فاصلہ مام سے عمودی فاصلہ مام تک لیجانے

میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ ۲ جہک مہر لوک  $\frac{2}{3}$  ہے۔







۱۰۔ ایک یکساں پتہ دوم مرکز دائروں سے جن کے نصف قطر بالترتیب  $\rho$  اور  $\rho_1$  ہیں

گھرا ہوا ہے۔ اس کی کشش مشترک مرکز سے فاصلہ  $r$  پر معلوم کرو جبکہ کشش کا کلیہ فاصلہ  $r$  ہو

۱۱۔ قطع ناقص کی شکل کے ایک پتہ کے کی کثافت کسی نقطہ پر ایسے بدلتی ہے جیسے اس نقطہ کا محور اعظم سے فاصلہ  $a$  کا  $\frac{1}{a}$  فاصلہ پر اکائی رقبہ کی کمیت رہے۔ ثابت کرو کہ اس کے پتہ کے کا قوہ  $\frac{2}{a}$  جہرہ  $\frac{1}{a}$  ہوگا۔

۱۲۔ ایک متجانس نصف کرہ کا مرکز  $O$  ہے،  $OS$  نصف قطر  $OS$  مستوی قاعدہ پر عمود وار کھینچا گیا ہے۔ اگر نصف قطر  $OS$  سنتی میٹر ہو اور کثافت  $\rho$  فی مکعب سنتی میٹر ہو گرام ہو اور جب تجاذب کا مستقل ہو تو ثابت کرو کہ مجسم کی کشش کے خلاف ایک گرام کو  $OS$  سے  $OS$  تک لیجانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$\frac{1}{2} \pi \rho a^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \right] \text{ ارگ ہے۔}$$

۱۳۔ ثابت کرو کہ ٹھوس متجانس مخروط کے قاعدہ کے وسطی نقطہ سے اس کی کشش کے خلاف کمیت کی ایک کثافت  $\rho$  کی کو اس تک لیجانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ

$$\frac{1}{2} \pi \rho a^2 \left[ \frac{\text{جم} (1 + \text{جم}^2)}{\text{جم}^2 + 1} + \frac{\text{جم}^2}{\text{جم}^2 + 1} \right] \text{ ارگ ہے}$$

ہے جہاں مخروط کی بلندی  $h$ ، کثافت  $\rho$  اور راسی زاویہ  $2\alpha$  ہے

۱۴۔ ایک پتے یکساں کردی خول کا قوہ بیرونی یا اندرونی نقطہ پر۔

دفعہ ۲۸۶ کی شکل اور ترقیم کے مطابق کسی بیرونی نقطہ  $P$  پر قوہ

$$= \frac{2\pi \rho a^2 \sin^2 \alpha}{r} \text{ جہاں } r \text{ کثافت ہے}$$

نیز  $\rho = \frac{M}{V}$  جہاں  $M$  جہرہ  $V$  حسب دفعہ مذکور

$$\text{پس قوہ} = \frac{2\pi \rho a^2 \sin^2 \alpha}{r} = \frac{2\pi \rho a^2 \sin^2 \alpha}{r} \text{ جہاں } \rho = \frac{M}{V}$$

$$= \frac{\pi r \text{ جبکہ } r = \frac{1}{2}}{\text{جب}} = \frac{\text{خول کی کمیت}}{\text{ون}}$$

جس کسی بیرونی نقطے کے لئے کردی خول کا قوہ اتنا ہی ہوگا جتنا کہ خول کی کل کمیت کو اس کے مرکز پر کشف کر دینے سے حاصل ہوتا۔  
کسی اندرونی نقطہ  $n$  کے لئے کھل کی انتہائیں  $r = n$  سے  $n$  ب

تک ہونی چاہیں یعنی  $r$  -  $j$  سے  $r$  +  $j$  تک - اس لئے قوہ  $n$  پر

$$= \pi r \text{ جبکہ } r = \frac{1}{2} \left[ \frac{r}{j} + \frac{r}{j} \right] = \pi r \text{ جبکہ } r = \frac{1}{2} \text{ جب } \frac{\text{خول کی کمیت}}{\text{اس کا نصف قطر}}$$

لہذا کسی اندرونی نقطہ پر قوہ مستقل ہوتا ہے اور اس کی قیمت کسی نقطہ پر اتنی ہی ہوتی ہے جتنی کہ اس کے مرکز پر۔

۱۰۴ - ایک یکساں ٹھوس کرہ کا قوہ کسی بیرونی یا اندرونی نقطہ پر۔

یہاں دفعہ ۲۸ کی شکل اور ترقیم اختیار کی گئی ہے فرض کرو کہ ٹھوس کرہ،

تعداد میں لا انتہا مگر بہت ہی پتلے ہم مرکز کردی خولوں سے بنا ہوا ہے۔

اگر  $n$  ٹھوس کرہ کے باہر ہو تو اس کے یہ معنی ہونگے کہ یہ ان سب کردی

خولوں کے باہر ہے اور ان میں سے ہر ایک خول کا قوہ کمیت  $n$  پر

$$= \text{جب } \frac{\text{خول کی کمیت}}{\text{ون}} \text{ دفعہ ماقبل کے مطابق۔}$$

اس لئے کل قوہ کسی بیرونی نقطہ  $n$  پر

$$= \text{جب } \frac{\text{خولوں کی کمیتوں کا مجموعہ}}{\text{ون}}$$

$$= \text{جب } \frac{\text{کرہ کی کمیت}}{\text{ون}}$$

اور اسلئے قوہ اتنا ہی ہے جتنا کہ کل کرہ کی کمیت کو مرکز پر کشف کر دینے سے حاصل ہوتا۔

اگر نقطہ کرہ کے اندر ہو تو ان سب خولوں کے لئے جن کا نصف قطر ما'ون سے  
 کم ہے ان اندرونی نقطہ ہے اور اس لئے دفعہ ۳۰۰ کے مطابق اس قسم کے خول کا قوت  
 = جب  $\frac{\pi r^2}{a}$  ما' نصف ما اور اس کو حدود صفر اور ج کے اندر تکمیل کرنا چاہیئے نیز  
 ان سب خولوں کے لئے جن کا نصف قطر ما، و ن سے بڑا ہے ان کوئی  
 اندرونی نقطہ ہے دفعہ ۳۰۰ کی رو سے اس قسم کے کسی خول کا قوت = جب  $\frac{\pi r^2}{a}$  ما' نصف ما

اور اس جملہ کو تکمیل کرنا چاہیئے حدود ج سے ا کے اندر۔  
 اس لئے کسی اندرونی نقطہ پر مجموعی قوت

$$= \int_0^a \frac{\pi r^2}{a} \frac{r}{a} dr + \int_a^j \frac{\pi r^2}{a} \frac{r}{a} dr$$

$\frac{\pi r^2}{a} \times \frac{r}{a} \times \int_0^a dr + \frac{\pi r^2}{a} \times \int_a^j \frac{r}{a} dr = \frac{\pi r^2}{a} \left( \frac{a}{2} - \frac{a^2}{2} \right)$   
 ۳۰۲۔ ایک محدود موٹائی والے کردی خول کا قوت اور کشش معلوم کرد خول کی  
 اور باہر کی کردی سطحوں کے نصف قطر بالترتیب ا اور ب ہیں۔

فرض کرو کہ مرکز ہے اور  
 مرکز کی خول کی کثافت ہے۔

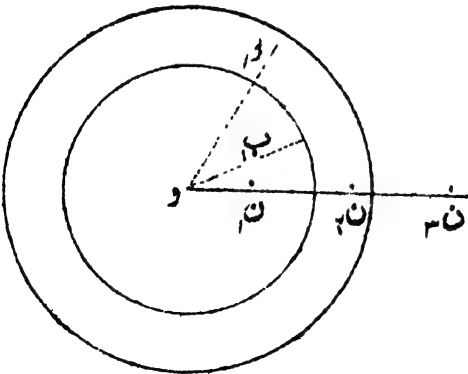
اس محدود موٹائی کے خول

کو لا انتہا ہم مرکز پتلے کردی خولوں میں  
 تحلیل کرد۔

اب دفعہ ۳ کے نتیجہ استعمال کرو

اولاً۔ کسی نقطہ ن (ون = لا)

کے لئے جو خول کی اندرونی سطح کے اندر واقع ہو اوپر کی صورت دوم لگ سکتی ہے اور



اس لئے نقطہ ن پر قہ

$$= \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\pi^2}{\lambda} \text{ مر } \alpha \text{ فرما} = \pi^2 \text{ مر } (\alpha - \beta)$$

ثانیاً۔ کسی نقطہ ن، (ون = لا) پر جو دو حائل سطحوں کے اندر واقع ہو قہ معلوم کرنا ہے۔ جن خولوں کا نصف قطر لا سے کم ہے ن۔ ان کے لئے بیرونی نقطہ ہے اور دفعہ ۳۰ کی پہلی صورت قائم رہتی ہے نیز اس سے بڑے نصف قطر کے خولوں کے لئے ن اندرونی نقطہ متصور ہو سکتا ہے اور دوسری صورت لگے گی۔ پس اس صورت میں ن پر قہ

$$= \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\pi^2}{\lambda} \text{ مر } \alpha \text{ فرما} + \int_{\alpha}^{\lambda} \frac{\pi^2}{\lambda} \text{ مر } \alpha \text{ فرما}$$

$$= \frac{\pi^2}{\lambda} \text{ مر } (\alpha - \beta) + \pi^2 \text{ مر } (\lambda - \alpha)$$

$$= \pi^2 \text{ مر } \left[ \frac{\lambda}{\lambda} - \frac{\beta}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda} \right]$$

ثالثاً۔ نقطہ ن، (ون = لا) کے لئے جو کل معلوم خول سے باہر واقع ہو۔

یعنی تمام جزوی خولوں کے باہر ہو قہ

$$= \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\pi^2}{\lambda} \text{ مر } \alpha \text{ فرما} = \frac{\pi^2}{\lambda} \text{ مر } (\alpha - \beta)$$

پس ہمیں قہ اور اس کے تفرقی سروں کے لئے ذیل کے نتائج

حاصل ہوتے ہیں۔





۳۔ ایک کرہ کا نصف قطر  $\frac{1}{2}$  اور کثافت  $\rho$  ہے اور کسی اندرونی نقطہ کا فاصلہ مرکز سے  $\frac{1}{3}$  ہے۔  $n$  میں سے گزرنے والی ایک سطح مستوی کرہ کو دو حصوں میں منقسم کرتی ہے ثابت کرو کہ ان حصوں کا جو قہ  $n$  پر ہوتا ہے  $n$  کا فرق ہے

$$\frac{\pi \rho}{3} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^3 - \left( \frac{1}{3} \right)^3 \right]$$

۴۔ ایک ٹھوس متجانس کشش کرنے والے کرہ کا نصف قطر  $\frac{1}{2}$  کثافت  $\frac{3}{2}$  ہے اور

اس کی سطح پر ایک اندفاعی مادہ کی یکساں تقسیم ہے جس کی سطحی کثافت  $\frac{1}{2}$  ہے۔ اس کرہ

کے کسی اندرونی یا بیرونی نقطہ پر قہ معلوم کرو۔

جواب (اندرونی  $\frac{1}{2}$ ، لائن  $\frac{1}{2}$  اور باہر صفر ہے)

۵۔ ایک ٹھوس نصف کرہ کا نصف قطر  $\frac{1}{2}$  اور کثافت  $\rho$  ہے۔ ثابت کرو کہ ایک بیرونی نقطہ  $n$  پر جس کا فاصلہ مرکز سے  $\frac{1}{3}$  ہے اس کا قہ

$$\frac{\pi \rho}{3} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^3 - \left( \frac{1}{3} \right)^3 \right] + \left( \frac{1}{2} \right)^3 \left( \frac{1}{3} \right)^3$$

ہے جہاں جمع کی علامت لی جائے گی اگر نقطہ  $n$  مجسم کی محدب سطح کی جانب واقع ہو اور منفی اگر یہ مستوی سطح کی جانب واقع ہو۔

۶۔ ایک کرہ کی کثافت مرکز سے فاصلہ  $\frac{1}{2}$  پر  $\frac{1}{2}$  جب  $\frac{1}{2}$  ہے جہاں  $k$  اور  $j$  متساوی مستقل ہیں۔ ثابت کرو کہ اس نقطہ پر جو مرکز سے فاصلہ  $\frac{1}{2}$  پر ہے کشش

$$\frac{\pi \rho}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \right)^3 - \left( \frac{1}{2} \right)^3 \left( \frac{1}{2} \right)^3$$

۷۔ ایک کرہ کی خول کی موٹائی  $k$ ، (جہاں  $k$  چھوٹا ہے) کثافت  $\rho$  اور نصف قطر  $\frac{1}{2}$  ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز سے فاصلہ  $\frac{1}{2}$  پر کے بیرونی نقطہ پر قہ ہے

$$\frac{\pi \rho}{3} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^3 - \left( \frac{1}{2} \right)^3 \right]$$

جہاں قوت کا کلیہ فاصلہ کی ن دیں قوت ہے۔  
 ۸۔ کشش کرنے والے مادہ کے باہر اگر ایک کردی سطح لی جائے تو ثابت کرو کہ سطح کے تمام  
 نقطوں پر قوتہ کی قیمتوں کی اوسط قیمت کرہ کے مرکز پر قوتہ کی قیمت کے مساوی ہے۔  
 نیز اگر کشش کرنے والا مادہ کردی سطح کے اندر واقع ہو تو ثابت کرو کہ کرہ کی محولہ بالا اوسط

قیمت = جہ کرہ کا نصف قطر  
 مادہ کی قیمت

۹۔ کشش کرنیوالے مادہ کے باہر اگر ایک لامتناہی طول کا مستدیر اسطوانہ لیا جائے تو ثابت کرو کہ اسطوانہ  
 کی سطح پر اس کی قوتہ کی مختلف قیمتوں کی اوسط قیمت اسطوانہ کے محور پر کسی نقطہ پر قوتہ کے مساوی ہوگی۔

## کششوں اور قوتہ پر متفرق مثالیں

۱۔ ش ج ایک متناطیس ہے اور ن کوئی متناطیسی ذرہ ہے جو بناؤ علیہ ش کی جانب اور  
 ج کے مخالف سمت میں کھینچ رہا ہے اور عالمہ قوتیں سکوس مربع کے متناسب ہیں، ش ج کا  
 وسطی نقطہ ہے اور  $\text{ش و ن} = ط$

اب اگر و بمقابلہ متناطیس کے ابعاد کے بہت بڑا ہو تو ثابت کرو کہ ن پر عمل کرنے  
 والی قوتوں کا حاصل ن و کے ساتھ زادیست (پلسس ط) بناتا ہے۔

فرض کرو کہ  $\text{و ن} = ر$ ،  $\text{و ش} = و ج = ل$  اور  $\text{ش و ن} = ط$ ۔ ن پر  
 متناطیس کی کشش اس کشش کے معادل ہے جو قطبوں ش اور ج پر متناطیسی کی مساوی  
 مثبت اور منفی مقداروں سے پیدا ہوتی ہے۔

$$\text{اس لئے ن پر قوتہ قہ} = \text{ش ن} - \text{ج ن}$$

اب  $\text{ش ن} = ۲ = ۲ + ۱ + ۲$  اور حجم ط  
 اس لئے ل کے مربعوں کو نظر انداز کرنے سے

$$\text{ش ن} = \frac{۱}{ر} = \frac{۱}{ر} - \left[ ۱ - \frac{۲}{ر} \right] \text{ حجم ط} = \frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر} \text{ حجم ط}$$



$$\text{پس } \frac{1}{ج ن} = \frac{1}{ر} [1 - \frac{1}{ر} \text{ جم ط}]$$

$$ق = \frac{۲}{ر} \text{ جم ط}$$

اس لئے اگر ن و کے متوازی اور اس پر عمود وار ط کے کم ہونے کی سمت میں تو میں بالترتیب لا اور ما ہوں تو

$$لا = \frac{فرق}{فرز} = \frac{۳}{ر} \text{ جم ط}$$

$$\text{اور } ۱۰ = \frac{1}{ر} - \frac{فرق}{فرط} = \frac{۲}{ر} \text{ جم ط}$$

$$\text{پس مطلوبہ زاویہ} = \frac{ما}{لا} = \frac{سن}{سن} [۱/۲ \text{ مس ط}]$$

۲۔ ایک کا غز پر کچھ لوہا چون بکیرا گیا ہے اور اس پر ایک مستطیس دکھی گئی ہے جس کے قطب نش اور ج ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ منحنی جن میں لوہا چون کے ذرات اپنے کو ترتیب دے لیتے ہیں مساوات جم ط۔ جم ط متقل سے حاصل ہوتے ہیں جہاں ط اور طہ زاوئے ن ج لا اور ن نش لا ہیں اور لا کوئی نقطہ ہے ج نش محدود پر۔ نیز ثابت کرو کہ وہ سب ذرات جن کے رخ نش ج پر کے ایک معلوم نقطہ و کی طرف ہیں ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں (لوہا چون کا ہر ذرہ ایک چھوٹا سا مستطیس ہے) اس لئے اس کو ہر دو قطب میں سے کسی ایک پر حاصل ثوت کی سمت میں قائم کر لینا چاہیئے ورنہ اس پر رجعت عمل کرے گا۔

۳۔ ایک بہت پتلا یکساں مستند پر حلقہ کشش کرنے والے مادہ کا بنا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک ذرہ جس کی حرکت حلقہ کے مستوی میں مقید ہے حلقہ کے مرکز پر غیر قائم تعادل میں ہوگا۔

فرض کرو کہ حلقہ کا مرکز و ہے اور ن مجذب نقطہ ہے جس کا فاصلہ اس کے مرکز و سے ج ہے۔ تب اگر و ن کو خط ابتدائی مانا جائے تو حلقہ کی کشش و ن کی سمت میں

$$= \frac{جک مر و فرط}{جک مر و فرط} \times \frac{۱/۲ \text{ جم ط} - ج}{۱/۲ \text{ جم ط} - ج} = \frac{۱/۲ \text{ جم ط} - ج}{۱/۲ \text{ جم ط} - ج}$$

$$= \frac{\pi}{r_1} \text{ جبکہ } \int_0^{\pi} \left[ 1 + \frac{r_2}{r_1} \cos \theta \right] d\theta = \left[ \theta + \frac{r_2}{r_1} \sin \theta \right]_0^{\pi} = \pi$$

$$= \frac{\pi}{r_2} \text{ جبکہ } \int_0^{\pi} \left( \cos \theta + \frac{r_1}{r_2} \cos^2 \theta \right) d\theta = \left[ \sin \theta + \frac{r_1}{2r_2} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} = 0$$

جبکہ ج کے مربعوں کو نظر انداز کیا جائے

$$= \frac{\pi}{r_1} \text{ جبکہ } \int_0^{\pi} \left[ \cos \theta + \frac{r_2}{r_1} \cos^2 \theta \right] d\theta = \left[ \sin \theta + \frac{r_2}{2r_1} \sin 2\theta \right]_0^{\pi} = 0$$

ہذا کشش (ج) میں اضافہ پیدا کرنے کا میلان رکھتی ہے یعنی ذرہ کا مرکز سے فاصلہ بڑھانے کی کوشش کرتی ہے پس تعادل غیر قائم ہے۔

۴۔۔۔ ن سادہ قوتوں کے مرکروں کو ایک دائرہ کے محیط پر متساوی فاصلے پر دیا گیا ہے۔ ہر ایک قوت اندفاعی ہے اور اس کا قانون فاصلہ کی مقلوب ہے۔ ثابت کرو کہ ایک ذرہ جیسے دائرہ کے مرکز پر رکھا جائے تعادل قائم میں ہوگا سوائے اُس صورت کے جبکہ م کے مساوی ہو۔

۵۔۔۔ آٹھ مرکزی قوتوں کے مرکز ایک مکعب کے راسوں پر ہیں اور مکعب کے مرکز کے قریب ایک ذرہ کو ایک ہی کلیہ کے مطابق کھینچتے ہیں اور اُن کی مطلق حد میں بھی ایک ہی ہیں۔ ثابت کرو کہ اُن کا حاصل عمل مکعب کے مرکز میں سے گزرتا ہے بشرطیکہ قوت کا کلیہ مقلوب مربع کا کلیہ نہ ہو۔

۶۔۔۔ ایک خط پر ایک دوسرے سے  $\frac{\pi}{2}$  فاصلہ پر سادہ قوتوں کی لامتناہی تعداد رکھی ہوئی ہے اور یہ سب کمیتیں ایک ذرہ کو جس کا فاصلہ خط مذکور سے ما ہے فاصلہ کے مقلوب مکعب کے تناسب کھینچتی ہیں ثابت کرو کہ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جو حاصل قوت کی سمت خط مذکور کے ساتھ بنا سکتی ہے  $\frac{\pi}{2}$  [جنہر ما] ہے۔

[اگر کسی نقطہ (لا، لا) پر قوت قہو اور کسی ایک جاذب کیت کو مرکز مانا جائے

تو ہمیں حاصل ہوتا ہے  $Q = \frac{m}{12} \times \frac{\text{جہز م ۱}}{\text{جہز م ۱} - \text{جم م ۱}}$

۷۔ اگر مادہ کا ہر ایک ذرہ دوسرے ذرہ کو فاصلہ کی  $n$  دیں قوت کے تناسب قوت کے ساتھ کھینچتا ہو تو ثابت کرو کہ مادہ کے اندر ہر نقطہ پر کشش لاتنا ہی ہوگی اگر  $n > 2$ ۔

۸۔ لا انتہائی پستلی سلاخوں کی لاتنا ہی تعداد ایک دوسرے کے متوازی اور ایک دوسرے سے فاصلہ  $j$  پر ایک سطح مستوی میں ترتیب دی ہوئی ہے سلاخوں کی یکساں خطی کثافت  $m$  ہے۔ ثابت کرو کہ سطح مستوی کے کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ قریب ترین سلاخ سے  $a$  ہے حاصل کشش  $\frac{2\pi m a^2}{j} - \frac{2\pi}{j} = 0$  ہے۔

[جب  $a$  کا اجزائے جزئی والا جلا استعمال کرو اور لوکاریمی تفرق کے عمل سے  $m$  کا پھیلاؤ حاصل کرو]

۹۔ لا محدود طول کی ایک یکساں سلاخ فاصلہ کی مقلوب  $n$  دیں قوت کے مطابق کشش کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ حاصل کشش  $j$  ہر  $\frac{m}{j^{n-1}}$  جا  $\left(\frac{n}{j}\right)$  ہے

جہاں  $m$  تار کی فی اکائی طول کثیت ہے اور  $j$  مجذوب نقطہ سے سلاخ کا کم سے کم فاصلہ ہے۔  
۱۰۔ ایک یکساں کعب کی کثافت  $m$  ہے ثابت کرو کہ اس کی کشش کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے  $r$  ہے  $\frac{2\pi m}{3} r^2$  ہر  $r$  بجانب مرکز ہوگی اگر چھوٹا ہو۔

۱۱۔ ایک یکساں کعب کا وزن قدرت کے مطابق کشش کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ کسی راس پر اس کی حاصل کشش کے تین مساوی اجزاء ترکیبی ہیں جو اس راس پر ملنے والے کناروں کے ساتھ عمل کرتے ہیں اور مقدار میں ذیل کے مساوی ہیں۔

$$j \text{ ہر } \left[ \frac{\pi}{4} + (2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 2) \right]$$

جہاں  $m$  کعب کی کثافت ہے اور  $a$  اس کے ایک کنارہ کا طول ہے۔

۱۲۔ ایک متجانس منشور لا انتہا لمبا ہے اور اس کی کثافت ہر ہے۔ اس کی عمودی تراش مستطیل ہے جس کے اضلاع ۱ اور ۱ ہیں۔ ثابت کرو کہ اس کے کنارہ کے کسی ایک نقطہ پر کشش کے اجزائے ترکیبی اس میں سے گزرنے والی تراش کے اضلاع ۱ اور ۱ کے متوازی

$$\text{جہ } \left[ \frac{1}{2} \text{ مس } + \frac{1}{2} \text{ لوک } \right] \text{ اور جہ } \left[ \frac{1}{2} \text{ مس } + \frac{1}{2} \text{ لوک } \right]$$

ہیں۔  
۱۳۔ منشور ماقبل کی مد سے ثابت کرو کہ اگر زمین کے اندر ایک لمبا گہرائی تک شکاف عموداً غراباً واقع ہو تو اس کے ایک کنارہ پر کے ظاہری عرض بلد میں شکاف کی موجودگی کی وجہ سے

بقدر زاویہ  $\frac{3}{4}$  جہ کے تفاوت واقع ہوگا جہاں ہر اور ہر بالترتیب زمین کی

اوسط کثافت اور سطحی کثافت ہیں اور اس کا نصف قطر ہے اور شکاف کا عرض ۱ ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اگر شکاف کی گہرائی ہر اس کی چوڑائی ۱ کے مقابلہ میں بہت

$$\text{چھوٹی ہو تو تبدیلی تقریباً } \frac{3}{4} \times \frac{\text{جہ}}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \text{ لوک } + \frac{1}{2} \right] \text{ ہوگی۔}$$

۱۴۔ ایک نہر کی تراش مستطیل ہے اور اس کا طول اس کی گہرائی گ کے مقابلہ میں بہت زیادہ ہے، اگر نہر کی چوڑائی ۱ ہو اور زمین کا نصف قطر ہو تو ثابت کرو کہ نہر کی سطح

$$\text{کے وسطی نقطہ پر جاذبہ ارض کی قیمت میں } \frac{3}{4} \times \frac{\pi + 2 \text{ لوک } 2}{\pi} \times \frac{(1 - \pi)}{4} \text{ ج کی کمی ہو جاتی ہے}$$

جہاں  $\pi$  نسبت ہے پانی کی کثافت کی زمین کی اوسط کثافت کے ساتھ۔

۱۵۔ ایک پتھر ہے جو اندرونی اور بیرونی طور پر ہم مرکز دائروں سے گھرا ہوا ہے جن کے نصف قطر بالترتیب ۱ اور ۱ ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر پتھرے کی کشش کا کلیہ (فاصلہ) ہو تو کشش اس نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے  $\frac{1}{2}$  ہے صفر ہوتی ہے۔

$$\text{۱۶۔ ایک متجانس کرہ کا نصف قطر ۱ ہے اگر کشش کا کلیہ (فاصلہ) ہو تو ثابت کرو کہ}$$

اس کی کشش کسی اندرونی نقطہ پر جس کا مرکز سے فاصلہ  $\frac{\pi}{2}$  ہے۔  $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}$  سے  $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}$  تک۔  
لوک  $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2}$  ہے۔ کرہ کی کثیت  $m$  ہے اور لا فاصلہ ہے نقطہ کا کرہ کے مرکز سے

۱۷۔ ایک کردی خول کا مادہ جس قوت سے کشش کرتا ہے فاصلہ کی پانچویں قوت کے بالعکس تناسب ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ کسی بیرونی نقطہ  $n$  پر کشش جب  $m$  ج  $n$  ہوگی جہاں  $m$  کردی خول کی کثیت ہے، ج اس کا مرکز ہے اور  $n$  ماس ہے  $n$  سے اگر  $n$  خول کے اندر ہو تو یہ کشش کیا ہو جاتی ہے۔

۱۸۔ اگر کشش کا کلیہ فاصلہ کی مقلوب پانچویں قوت ہو تو ثابت کرو کہ ایک یکساں ٹھوس کرہ کی کشش جس کی کثافت  $k$  اور نصف قطر  $a$  ہے کسی بیرونی نقطہ پر جس کا فاصلہ

$$\text{مرکز سے ج ہے جہ } \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{1+j} + \frac{(j+1)(j+2)}{(j-1)} \right\} \text{ لوک } \frac{1-j}{1+j} \text{ ہوگی۔}$$

۱۹۔ ثابت کرو کہ ایک ایسے ٹھوس بیٹے کرہ نما کی کشش جس کا خروج المرکز چھوٹا ہوا اور جس کے محور  $a$ ،  $b$  ہوں اس کی کثیت کے ذرہ پر جو اس کے محورا عظم کے سرے پر واقع ہے

$$\frac{2}{3} \text{ جہ } \frac{\pi}{2} (1 - \frac{2}{5}) \text{ ہوگی اور محورا صغیر کے سرے پر } \frac{\pi}{3} \text{ جہ } \frac{\pi}{2} (1 + \frac{2}{5}) \text{ ہوگی جہاں } b = (1 - d) - 1$$

۲۰۔ ایک یکساں نصف کردی خول کا نصف قطر  $a$  ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی کشش اس کی

مستوی سطح کے کسی نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے  $r$  ( $r < a$ ) ہو ان دو تکیہ کی کششوں پر مشتمل ہے۔

$$\frac{1}{2} \text{ مرکز کی طرف اور ایک قوت } \frac{1}{2} \frac{\pi}{r} \frac{a^2}{r} \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ سطح مستوی پر عمود وار۔}$$

اس سے مستنبط کرو کہ ایک مجسم نصف کرہ کی کشش اس کے کنارہ پر کے ایک نقطہ پر کیا ہوگی۔

۲۱۔ ایک مکافی  $a^2 = \pi$  اور اس کے برہیچ  $2a = \pi$  ( $a = 1$ ) کے درمیان

جو جگہ لکھ جاتی ہے اس کو مکانی کے محور کے گرد گھمانے سے ایک مجسم تیار کیا گیا ہے جس کی کثافت ہر جگہ ہے۔ ثابت کرو کہ اس مجسم کی کشش برہمنچ کے قرن نقطہ پر

$$\pi \text{ جہرہ } 1 \text{ [م جہرہ } 1 + 5 \text{ [م } 1 - 24 \text{] ہے۔}$$

۲۲۔ ایک گردشی مکانی نما کو اس کے راس سے فاصلہ  $b$  پر ایک سطح مستوی سے کاٹا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ مجسم کی کشش اس کے اس کے

$$\pi \text{ جہرہ } 1 \text{ لوک } \frac{1}{2} \text{ ہے جہاں } 1 \text{ مکانی کا وتر خاص ہے۔}$$

۲۳۔ ایک ٹھوس متجانس چھپٹے کردہ نما کو محور اصغر علی التواءم سطح مستوی سے درمساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ایک نصف کی کشش اس کی مستوی سطح کے کنارہ

$$\text{پر کے کسی نقطہ پر فائدہ کی سطح مستوی کے ساتھ زاویہ } \pi \text{ ج (مستوی } z \text{) بناتی}$$

ہے جہاں  $1$  اور  $ج$  نیم محور ہیں اور  $ز$  محور اصغر سے گزرنے والی کسی مستوی تراش کا خروج مرکز ہے۔

$$24 \text{۔ اگر ایک پتر ابدایں سے گزرے اور زاویہ } \frac{\pi}{2} \text{ سے } \frac{\pi}{4} \text{ سے محیط ہو تو ثابت}$$

$$\text{کرو کہ اس کی جو کشش ناقص } \frac{\pi}{2} \text{ سے } \frac{\pi}{4} \text{ ہے، } 1 = \frac{\pi}{2} \text{ پر کے کسی نقطہ پر}$$

$$\text{ہوگی اس کا ہی جزو ترکیبی } \frac{\pi \text{ جہرہ } 1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}} \text{ ہوگا جہاں ہر نقطہ مذکور کا ہی محدود ہے اور}$$

م کمیت ہے پترے کے اکائی رقبہ کی۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ ایک ٹھوس لمبوترے کردہ نما کے قطب پر استوائی سطح مستوی کے دوسرے جانب کے ادہ سے جو کشش پیدا ہوتی ہے وہ

$$\pi \text{ جہرہ } 1 \text{ [} 1 - \frac{1}{2} (2 - \sqrt{2}) + \frac{1 - z}{z} \text{ لوک } \frac{1}{z} \text{]} \text{ ہے جہاں نصف النہاری ناقص کا نیم محور } 1 \text{ اور } z \text{ خروج مرکز ہے اور مجسم کی}$$

کثافت ہے۔

۲۶۔ ایک منحنی کی قوس ایک ذرہ کو جو اس کے قطب پر پڑا ہے قوت  $\frac{m}{r^2}$  سے کشش کرتی ہے۔ اگر حاصل کشش دونوں سروں کے نیم قطروں کے درمیانی زاویہ کی تقصیف کرے تو ثابت کرو کہ سطحی کی مسادات ہوگی

۱۔ جب { (۱ - ط) ط } = مستقل

۲۷۔ اگر ایک متجانس گردشی مجسم جس کی کمیت  $m$  اور کثافت  $\rho$  ہے ایسا ہو کہ اس کی کشش گردشی محور پر کے کسی نقطہ ویر بڑی سے بڑی ہو تو ثابت کرو کہ مجسم جس منحنی کی گردش سے پیدا ہوتا ہے اس کی مسادات ہے

$\rho = \frac{m}{V}$  حجم ط

[فرض کرو کہ گردش کا محور دلا ہے۔ ظاہر ہے کہ وہ جسم پر دافع ہوگا۔ وہ سطح جو ایسی ہو کہ اس پر کسی ذرہ کی کشش کا ولا کے متوازی جزو تخیلی ہمیشہ وہی رہے

صریحاً حجم ط = مستقل یعنی  $\rho = \frac{m}{V}$  حجم ط . . . . . (۱)

ہونی چاہیے۔ لہذا ایسا منتخب کرو کہ معلومہ مادہ کی کل کمیت  $m$  عین اس سطح کے اندر آجائے

یعنی  $m = (۱) \times$  سے جو گردش حاصل ہوتی ہے اس کی کمیت  $\frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$  یہ نتیجہ نکال

کرنے سے باسانی حاصل ہو سکتا ہے اب اس طرح حاصل شدہ سطح مطلبہ سطح ہے۔ کیونکہ فرض کرو کہ ہم مادہ کے ایک چھوٹے جزو کو سطح کے اندر کے نقطہ  $N$  سے ہٹا کر باہر کے نقطہ  $P$  پر لے جاتے ہیں۔ نیز فرض کرو کہ  $ON$  اور  $OP$  سطح سے  $Q$  اور  $R$  پر ملتے ہیں۔ تب صریحاً  $Q$  پر کے ایک ذرہ پر  $m$  کی کشش جبکہ یہ مقام  $N$  پر ہے اس کشش سے بڑی ہوگی جبکہ یہ مقام  $Q$  پر ہے اور اس کی کشش جبکہ یہ  $N$  پر ہو چھوٹی ہوگی اس کشش سے جبکہ یہ  $Q$  پر ہو سکتا ہے ہی اس کے جبکہ یہ  $Q$  پر ہو یا  $R$  پر ہو تو اس کی کششوں کے انڈیکس تخیلی ولا کی سمت میں وہی ہیں۔ اس لئے

ہم کو سطح کے اندر سے سطح کے باہر لانے میں دلا کے متوازی کشش میں کمی واقع ہوتی ہے۔ پس مسئلہ ثابت ہوا۔

۲۸۔ ایک یکساں ٹھوس کرہ کی کثیت  $\mu$  ہے۔ اُس کو اس کے مرکز میں سے گزرنے والی سطح مستوی سے دو مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ان نصفوں کے درمیان جو تعامل باہمی کشش کی وجہ سے ہے وہ  $\frac{3}{16}$  جب  $\frac{2}{\pi}$  کے مساوی ہوگا جہاں  $\mu$  کرہ کا نصف قطر ہے۔

مربع کا ایک نصف کرہ کی کشش خود پر صفر ہے کیونکہ یہ مساوی اور مختلف قوتوں کے زوجوں پر مشتمل ہے اس لئے ایک نصف کی کشش دوسرے نصف پر مساوی ہے ایک نصف پر کل کرہ کی کشش کے۔ فرض کر دو کہ اس نصف کا کوئی نقطہ  $N$  ہے،  $ON = r$ ،  $\angle NOY = \theta$  جہاں  $O$  مرکز ہے اور  $Y$  عمود ہے کاٹنے والی سطح مستوی پر۔

کل کردہ کی کشش  $n$  پر  $= \frac{4}{3} \times \pi \times r$  [دفعہ ۲۸۷] اور حجم کے جس جزو کی وجہ سے

یہ کشش عمل کر رہی ہے وہ = رعت ط × رعت ر × ۲۲ رجب ط  
اس لئے کل کرکہ کی کشش ایک نصف پر مستوی سطح کے علی القواثم سمت میں

$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{مرفط} \times \text{فر} \times \pi r \text{ حجب ط} \left[ \text{ج} \frac{r^2}{2} \times \pi \text{ مر} \right] \text{جم ط} \\ \frac{r^2}{2} \times \frac{\pi}{14} = \frac{r^2}{2} \pi \text{ ج} \frac{1}{r} =$$

ان دونوں نصف کرہوں کے درمیان حاصل تعامل ان کے باہمی حاصل کشش کے مساوی ہے۔

متبادل ثبوت - سیال کے ایک ایسے کرویہ پر غور کرو جو صرف اپنی کشش کے زیر عمل  
 ساکن ہو۔ ایک نقطہ پر جس کا فاصلہ مرکز سے رہے کشش = جہ  $\frac{1}{r^2} \times \pi$  ہر  
 اس لئے سکون تیالات کی اساسی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{مفت د}}{\text{م}} = \frac{\text{م ۳۳ م ۳۳ م ۳۳}}{\text{م}}$$





۳۳۔ ایک یکساں متجانس کرہ ایک مستوی مستدیر تختی پر اس طرح رکھا ہوا ہے کہ کرہ تختی کے مرکز پرس کرتا ہے۔ کرہ اور تختی کے قطر اور کیتیتیں مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ باہمی تجاذب کی وجہ سے ان کا باہمی تعامل ہم لمحہ جب  $\frac{\pi}{2}$  (ان میں سے ایک کا وزن) ہوگا جہاں لا نسبت ہے کسی ایک کے نصف قطر کو زمین کے نصف قطر کے ساتھ اور یہ نسبت ہے کرہ کی کثافت کو زمین کی اوسط کثافت کے ساتھ۔

۳۴۔ ایک متجانس کرہ کا نصف قطر ۱ اور کیتیت  $m$  ہے۔ یہ کرہ ایک دوسرے نصف کرہ کے مستوی قاعدہ کو مرکز پرس کرتا ہے۔ نصف کرہ کا نصف قطر ۱ اور کیتیت  $m$  ہے۔

ثابت کرو کہ باہمی کشش کی وجہ سے ان کے درمیان دباؤ  $\frac{2}{3} \frac{m}{r}$  (۱-۲) ہے۔

۳۵۔ ایک یکساں مستدیر تختی کی کیتیت  $m$  ہے اور یہ اسی نصف قطر کے ایک کشش کرنے والے ثابت کھردرے کرہ پر بجالت سکون پڑی ہے۔ اگر تختی کے کنارہ کے ساتھ ایک چھوٹا وزن  $m$  لگا دیا جائے تو ثابت کرو کہ تختی ایک ایسے زاویہ میں سے گھوم جائیگی جس کا قوسی پیمانہ  $\frac{1}{m}$  ہوگا جہاں  $(\frac{1}{m})$  کے مربعوں کو نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

۳۶۔ ثابت کرو کہ ایک یکساں پتلے مساوی الاصلع مثلث  $\Delta BJC$  کا توہ ایک ایسے نقطہ  $N$  پر جو اس کے مرکز  $O$  میں سے گزرنے والے اور اس کی سطح پر علی القوائم خط بد واقع ہے یہ ہوگا

$$\frac{2}{3} \frac{m}{r} \left[ \frac{2}{3} \frac{m}{r} + \frac{2}{3} \frac{m}{r} - \frac{2}{3} \frac{m}{r} \right] \text{ جب } m = 2 \text{ جب } m = 2$$

جہاں  $m$  اس مثلث کی کیتیت ہے، اس کے ایک ضلع کا طول ہے اور  $\angle ON = 2$  = عدد۔

[مثلث کو قاعدہ کے متوازی خطوں سے بنا ہوا فرض کرو]۔

۳۷۔ ایک یکساں منظم چار سطحی مجسم کشش کرنے والے مادہ سے بنا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے مرکز پر تو ہے

$$\frac{1}{3} \left\{ \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \right\}$$

ہے جہاں م مذکور کی کیت اور ۱ اس کے ایک کنارہ کا طول ہے ۔

(سوال اقبل کے نتیجہ کو استعمال کرو)

۸۔ ایک منتظم چار سطحی کا ایک رخ کشش کر سنے والے مادہ سے بنا ہوا ہے اس رخ کے مقابل کے رائس سے ایک ذرہ اس رخ کی کشش کے زیر عمل کرتا ہے چار سطحی کی سطحی کشش صہ ہے اور اگر کشش کا کلیہ مقلوب مربع کا کلیہ ہو تو ثابت کر کہ جب ذرہ جاذب رخ پر اگر لگے گا تو اس کی رفتہ کا مربع

$$۲ \text{ جہ صہ } ۱۲۳ [ \text{لوک} (۱ + \frac{۲}{۱۲۳}) + ۲۱۲ م - ۱۲۳ - \frac{۲۱۲}{۳} ]$$

ہوگا جہاں ۱ اس کے ایک ضلع کا طول ہے اور باقی رخ کسی قسم کی کشش نہیں کرتے ۔

۳۹۔ اگر م اور م کوئی دو کیتیں ہوں اور کیت م کے کسی جزو م م پر م کا توہ قد ہو اور کیت م کے کسی جزو م م پر م کا توہ قد ہو تو ثابت کرو کہ

$$[ \text{قد فرم} ] = [ \text{قد فرم} ]$$

۴۰۔ اگر ایک مادہ فاصلہ کی ن دیں قوت کے مطابق کشش کرے تو اس کی کچھ مقدار کا توہ کسی نقطہ پر قن ہوتا ہے اور اگر کشش کا ضابطہ فاصلہ کی (ن - ۲) دیں قوت ہو تو قن - ۲ ہوتا ہے تو ثابت کرو کہ

$$\text{لف } ۲ \text{ قن} = (ن - ۱)(ن + ۲) \text{ قن} - ۲$$

۴۱۔ ایک متجانس پتلے کردی خول کے کسی اندرونی نقطہ ن (لا، لا، ی) کے لئے توہ تفاعل ذ (لا، لا، ی) ہو تو بیرونی نقطہ ن (لا، لا، ی) پر توہ

$$\frac{۱}{۲} \text{ ذ } ( \frac{۱}{۲} \text{ لا، لا، ی} , \frac{۱}{۲} \text{ لا، لا، ی} ) \text{ ہوگا جہاں } ۱ \text{ خول کا نصف قطر ہے اور } ۲ \text{ نقطہ ن کا}$$

مرکز سے فاصلہ ہے۔





کاتا ہے جن کے رقبے مف س اور مف س ہیں۔  
کیئت کی کشش ان اجزاء پر بالترتیب

- جسم  $\frac{\text{مف س}}{\text{ون}}$  جب ون ق، خط ن ل کی سمت میں

اور - جسم  $\frac{\text{مف س}}{\text{ون}}$  جب ون ق، خط ن ل کی سمت میں

ہیں جہاں ن ل اور ن ل، ن اور ن پر باہر کی طرف کھینچے ہوئے عمادوں کی سمتیں ہیں۔

ق اور ق میں سے ان چھوٹے مخروطوں کی عمادی تراشیں ق ط اور ق ط کھینچو اور فرض کرو کہ مخروط کا مجسم زاویہ مف س ہے، تب

$$\text{مف س} = \frac{\text{رقبہ ق ط} \times \text{مف س} \times \text{جسم ط ق ن}}{\text{ون}} = \frac{\text{مف س} \times \text{جسم ق ن}}{\text{ون}}$$

$$= \frac{\text{مف س} \times \text{جسم ون ق}}{\text{ون}}$$

انہا میں جبکہ ق بہت چھوٹا ہو

$$\text{اور اسی طرح مف س} = \frac{\text{مف س} \times \text{جسم ون ق}}{\text{ون}}$$

اس لئے نقطہ ن اور ن پر اجزاء مف س اور مف س میں سے ہر ایک کے لئے عمادی کشش = - جسم مف س

اس لئے کل سطح کے لئے مجموعی عمادی کشش = - جسم ح مف س = - جسم  $\times \pi$   
یعنی اوپر کے ایک واحد ذرہ م کے لئے

$$\text{کراع فرس} = - \text{جسم} \times \pi$$

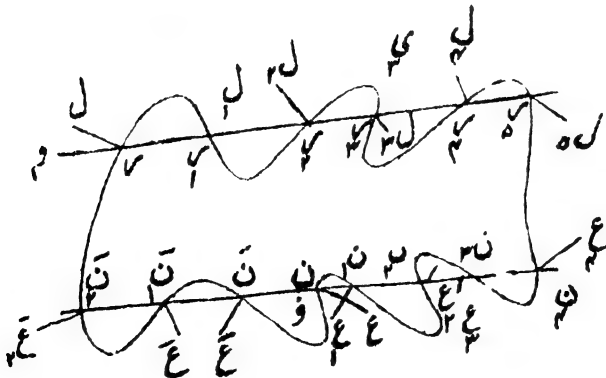
یہی کیفیت سطح مذکور کے دیگر کشش کرنے والے ذروں کی ہے۔  
پس بالآخر کل کیئت کے لئے

اگر ع فرس = ۳ - ۳ ج ۳۴

اب فرض کرو کہ بند سطح کے باہر و مقام پر ایک کشش کرنے والا ذرہ ہے۔  
حسب سابق ایک چھوٹا مخروطی سطح کو اس میں اور سطح پر قطع کر کے تب  
پہلے کی طرح سراسر اور سطح پر کی عمادی کششیں مساوی ہونگی بس یہ کہ  
ان کی علامتیں مختلف ہونگی کیونکہ مساوی عماد کی سمت میں باہر کی جانب کشش ثابت ہوگی۔  
اور سطح پر عماد کی سمت میں باہر کی جانب کشش منفی ہوگی۔ اس لئے جزوی سطحوں  
سراسر اور سطح کے لئے عمادی کششوں کے اجزا جہم صفر اور  
جہم صفر ہونگے۔ اس لئے ان کا مجموعہ صفر ہے۔

یہی بات وہیں سے گزرنے والے سب کے سب چھوٹے مخروطوں پر صادق  
آتی ہے۔ اس لئے سطح کے باہر کی کسی جزوی کیت م کے لئے عمادی کشش کا  
سطحی تکملہ صفر ہوتا ہے، اس لئے کل کیت م کے لئے بھی جو سطح کے باہر واقع ہو  
تکملہ مذکور صفر ہوگا۔

[اوپر کی شکل میں دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ جب کشش کرنے والی کیت سطح  
کے اندر ہو جیسے و پر تو دونوں زاوے ون ل اور ون ل منفرد زاوے  
ہوتے ہیں، جب کیت باہر ہو جیسے و پر تو ایک زاویہ و سماع منفرد ہوتا ہے  
اور دوسرا و سماع حادہ ہوتا ہے۔]  
۳۰۴۔ اگر جزوی مخروط بند سطح کو دو سے زیادہ تراشوں پر قطع کرے تو بھی باسانی



دیکھا جاسکتا ہے کہ متذکرہ بالا نتیجہ درست رہے گا۔  
 کیونکہ زاوئے  $\angle ع، و، ع$ ،  $\angle و، ع، ع$  اور  $\angle و، ع، ع$   
 سب کے سب منفوجہ ہیں اور ہر ایک کے تکملہ کا متناظر جزو۔  $\angle م، م، م$  ہے  
 نیز زاوئے  $\angle و، ع، ع$  اور  $\angle و، ع، ع$  اور  $\angle و، ع، ع$  حادے ہیں اور متناظر  
 تکملے +  $\angle م، م، م$  ہیں۔

اس لئے ان تمام نقطوں کے لئے تکملوں کا مجموعہ

$$= ۵ \angle م، م، م + ۳ \angle م، م، م$$

$$= ۲ \angle م، م، م$$

جیسا کہ پہلی شکل میں درست تھا۔  
 اس لئے پہلی شکل کی طرح کل سطح کے لئے

$$\angle ع، ع، ع = ۳ \times ۳۴$$

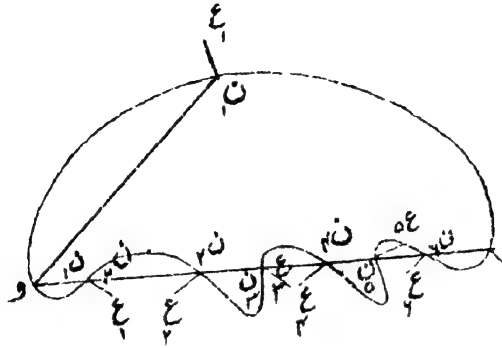
اسی طرح کسی بیرونی نقطہ سے شروع کر کے زاوئے  $\angle و، م، م$  اور  $\angle و، م، م$   
 اور  $\angle و، م، م$  منفوجہ ہیں اور اس لئے ہر ایک متناظر جزوی تکملہ۔  $\angle م، م، م$   
 کے مساوی ہے۔ نیز زاوئے  $\angle و، م، م$ ،  $\angle و، م، م$ ،  $\angle و، م، م$  حادہ ہیں  
 اور ہر متناظر تکملہ +  $\angle م، م، م$  کے مساوی ہے۔

پس اس چھوٹے سے مخروط کے لئے عمادی کشش کا کل سطحی تکملہ صفر ہے  
 اس لئے پہلی شکل کی مانند  $\angle ع، ع، ع =$

۵۔ م۔ جب نقطہ وسط پر ہو یعنی جب کشش کرنے والی مقدار سطح پر ہو تو وہیں  
 سے گزرنے والا چھوٹا مخروط سطح سے ایک نقطہ پر یا طاق نقطوں پر ملے گا ہر صورت  
 میں سطحی تکملہ کا جو جزو م سے پیدا ہوتا ہے وہ  $\angle م، م، م$  ہوگا۔ اس لئے م کی  
 وجہ سے کل سطحی تکملہ ہوگا۔  $\angle م، م، م$  جہاں فرسہ ۱ پر کی ہو اسی سطحی

کے صرف ایک طرف کا مجسم زاویہ ہے لہذا اس صورت میں

$$- \text{جہم فرسہ} = - \text{جہم} \times \pi ۲$$

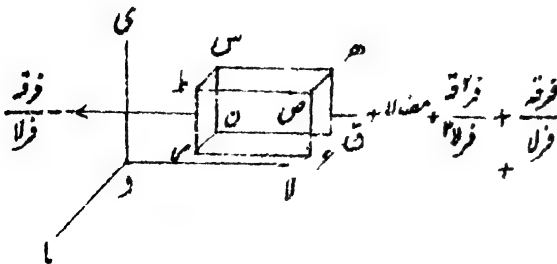


اسی طرح سے سطح پر کی کمیت کے کسی اور جزو کے لئے  
اس لئے اگر کشش کرنے والی کمیت کی مقدار بند سطح پر م ہو تو اس کی وجہ  
سے عمادی شدت کا سطحی تکملہ  $-\pi ۲$  جہم ہوگا۔

۳.۶۔ لاپلاس اور پوئیسون کی مساواتیں۔

اگر ایک بند سطح کے کسی نقطہ پر باہر کی طرف عمادی کشش ع ہو تو دفعہ  
۳.۳ کی رو سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\text{فرقہ} = -\pi ۲ \text{ جہم} \dots \dots \dots (۱)$$



جہاں سطح کے اندر  
کشش کرنے والے  
مادہ کی مقدار ہے۔  
اب بند سطح کی بجائے  
ایک مستطیلی متوازی السطوح  
لو جس کا ایک ایسی نقطہ



ن (لا، ما، می) ہو اور جس کے کنارے محوروں کے متوازی ہوں اور طول میں  
مف لا، مف ما، مف می ہوں۔

چونکہ رخ ن سراسر بہت چھوٹا ہے اس لئے انتہا میں اس کے ہر ایک  
نقطہ پر مساوی قوت عمل کرتی ہے اور  $\frac{\text{جفت فہ}}{\text{جفت لا}}$  کے مساوی ہے اور ولا کی  
منفی سمت میں عمل کرتی ہے

اس لئے کہ ع × فرس کا حصہ جو اس رخ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے وہ ہے۔  
-  $\frac{\text{جفت فہ}}{\text{جفت لا}} \times \text{مف ما} \times \text{مف می}$

نیز اگر  $\frac{\text{جفت فہ}}{\text{جفت لا}} = \text{ف (لا)}$  تو محور لا کی مثبت سمت میں ترکیبی قوت جو رخ قیء ص

کے ہر ایک نقطہ پر عمل کرتی ہے وہ

$$= \text{ف (لا + مف لا)} = \text{ف (لا)} + \text{مف لا} \times \text{ف (لا)} + \dots \dots \dots$$

$$= \frac{\text{جفت فہ}}{\text{جفت لا}} + \frac{\text{جفت فہ}^2}{\text{جفت لا}^2} \times \text{مف لا} + \dots \dots \dots \text{مف لا کی بڑی قوتوں والی رقمیں}$$

اس لئے کہ ع × فرس کا جو جزو اس رخ کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے وہ

$$= \left( \frac{\text{جفت فہ}}{\text{جفت لا}} + \frac{\text{جفت فہ}^2}{\text{جفت لا}^2} \times \text{مف لا} + \dots \right) \times \text{مف ما} \times \text{مف می}$$

اس لئے ان دو رخوں سے کہ ع × فرس کا جو حصہ پیدا ہوتا ہے وہ

$$= \left( \frac{\text{جفت فہ}}{\text{جفت لا}} + \dots \right) \times \text{مف لا} \times \text{مف ما} \times \text{مف می}$$

اسی طرح سے محور ما اور می پر عمود وار رخوں کے لئے کہ ع × فرس کے  
حصے بالترتیب

$$\left( \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{ما}} + \dots \right) \text{مف لا} \times \text{مف ما} \times \text{مف ی اور} \left( \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{ی}} + \dots \right) \text{مف لا}$$

$\times \text{مف ما} \times \text{مف ی ہیں۔}$

نیز اگر یہ جزوی متوازی السطوح کشش کرنے والے مادہ کے اندر لیا جائے تو  
 ہر = متوازی السطوح کی کمیت = م مف لا  $\times$  مف ما  $\times$  مف ی جہاں م کثافت ہے۔  
 اس لئے گاؤس کے مسئلے سے حاصل ہوتا ہے

$$\left( \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{ما}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{ی}} + \dots \right) \text{مف لا} \times \text{مف ما} \times \text{مف ی} = - \text{م ج م} \times$$

مف لا مف ما مف ی یعنی مف لا  $\times$  مف ما  $\times$  مف ی پر تقسیم کرنے سے اور انتہا لینے سے

$$\text{لف}^2 \text{ق} = \left( \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{ما}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{ی}} \right) = - \text{م ج م}$$

$$\text{جہاں عامل} \left( \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{ما}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{ی}} \right) \text{کو اختصار کے لئے علامت لفا یا}^2$$

سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ یہ پوئیسون کی مساوات ہے۔  
 اگر نقطہ ن اور چھوٹا سا متوازی السطوح، کشش کرنے والے مادہ کے  
 باہر ہو یعنی متوازی السطوح مذکور کے اندر مادہ کی مقدار صفر ہو تو مساوات بالا ہوتی،

$$\text{لف}^2 \text{ق} = \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{ما}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{ی}} = 0$$

اس مساوات کو لابلاس کی مساوات کہتے ہیں۔

اس مساوات کو محض تفرق کرنے سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ دفعہ ۲۹۶ کی مانند دفعہ  
 ۲۹۲ کے جملوں کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{لا}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{ما}} + \frac{\text{جف}^2 \text{ق}}{\text{جف}^2 \text{ی}}$$

$$= - \text{جمل فرم} \left[ \frac{3}{\text{ن ق}} - \frac{3}{\text{ن ق}} \right] = - \frac{3}{\text{ن ق}}$$

اگر ن کشش کرنے والی کمیت کے باہر واقع ہو یعنی ن ق کبھی صفر نہ ہو تو اس سے حاصل ہوتا ہے

$$= \frac{\text{جب } ۲\text{ ق}}{\text{جب } ۲\text{ م}} + \frac{\text{جب } ۲\text{ ق}}{\text{جب } ۲\text{ م}} + \frac{\text{جب } ۲\text{ ق}}{\text{جب } ۲\text{ م}}$$

۷. ۳۔ احصائے تفرقی کے معمولی قاعدوں کے مطابق تفرق کرنے سے یا غیر تابع متغیروں لا، ما، ی، کو، ط، ذ میں ان رشتوں

$$\text{لا} = \text{رجب ط} \times \text{جم ذ}، \text{ما} = \text{رجب ط جب ذ اور ی} = \text{رجب ط}$$

کی مدد سے تبدیل کرنے سے یا ذقہ ماقبل کے طریقہ کے اصول کی بنا پر ایڈیون کی مساوات کو قطعی محدودوں میں حسب ذیل شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{\text{جب}}{\text{جب ر}} \left[ \text{رمف ط} \times \text{رجب ط} \times \text{مف ذ} \times \frac{\text{جب ق}}{\text{جب ر}} \right] + \frac{\text{جب}}{\text{جب ر}} \left[ \text{رمف ط} \times \text{رجب ط} \times \text{مف ذ} \times \frac{\text{جب ق}}{\text{جب ر}} \right]$$

$$+ \frac{\text{جب}}{\text{رجب ط جب ذ}} \left[ \text{رمف ط} \times \text{مف ر} \times \frac{\text{جب}}{\text{رجب ط جب ذ}} \right] + \frac{\text{جب}}{\text{رجب ط جب ذ}} \left[ \text{رمف ط} \times \text{مف ر} \times \frac{\text{جب}}{\text{رجب ط جب ذ}} \right]$$

$$= - \pi \text{ جم م} \times \text{مف ر} \times \text{رمف ط رجب ط مف ذ}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{\text{ر}} \left[ \frac{\text{جب}}{\text{جب ر}} \left( \frac{\text{ر}}{\text{جب ر}} \right) + \frac{1}{\text{جب ط}} \times \frac{\text{جب}}{\text{جب ط}} \right] \left( \text{جب ط جب ق} \right)$$

$$+ \frac{1}{\text{جب ط جب ق}} \left( \frac{\text{جب ق}}{\text{جب ر}} \right) = - \pi \text{ جم م} \dots (۱)$$

$$\frac{\text{جب } ۲\text{ ق}}{\text{جب ر}} + \frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{جب } ۲\text{ ق}}{\text{جب ر}} + \frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{جب } ۲\text{ ق}}{\text{جب ر}} + \frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{جب } ۲\text{ ق}}{\text{جب ر}}$$

$$+ \frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{جب } ۲\text{ ق}}{\text{جب ر}} = - \pi \text{ جم م} \dots (۲)$$

جہاں م کثافت ہے۔

نیز اگر ہم اسطوائی محدود س، ط، ی استعمال کریں (اور بناءً علیہ لا = سرحم ط، ما = سرجب ط،)  
تو مساوات بالا ہو جاتی ہے :-

$$\frac{\text{جفت س}}{\text{جفت س}} + \left( \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت س}} \right) + \left( \frac{\text{جفت ط}}{\text{جفت س}} \right) + \left( \frac{\text{جفت ی}}{\text{جفت س}} \right)$$

$$= ۳۳۳۳۳۳۳۳$$

$$\text{یعنی } \frac{\text{جفت س}}{\text{جفت س}} + \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت س}} + \frac{\text{جفت ط}}{\text{جفت س}} + \frac{\text{جفت ی}}{\text{جفت س}} = ۳۳۳۳۳۳۳۳ \dots (۳)$$

اگر زیر بحث نقطہ کشش کرنے والے مادہ کے اندر نہ ہو تو مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) کے  
بائیں طرف کے حصے صفر ہونگے اور اس صورت میں ہمیں لاپلاس کی مساوات کی تناظر  
شکلیں حاصل ہونگی۔

۸۰۔ دفعہ ماقبل کی مساواتوں کی مدد سے ہم ق کی قیمتیں چند آسان صورتوں میں  
آسانی سے حاصل کر سکتے ہیں۔

کروی خول۔ اس صورت میں ظاہر ہے کہ ق کی قیمت کسی نقطہ ن پر محض خول  
کے مرکز سے اُس نقطہ کے فاصلہ پر منحصر ہونی چاہیئے اور ط اور ف کے بالکل غیر تابع  
ہونی چاہیئے

∴ دفعہ ۷۰ کی مساوات (۱) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جفت س}}{\text{جفت س}} = \left( \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت س}} \right) = \text{اس لئے } \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت س}} = \text{مستقل}$$

$$\text{یعنی } ق = \frac{۱}{س} + ب$$

(۱) اگر نقطہ ن خول کے اندر ہو تو صریحاً حاصل کشش  $\frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت س}}$  مرکز پر صفر ہونی چاہیئے  
اس لئے ل = ۰۔

اس لئے ق کردی خول کے اندر سب نقطوں پر مستقل ہے اور

$$= \text{اس کی قیمت مرکز پر} = \text{جب } \frac{\text{کمیت}}{\text{شعاع قطر}}$$

(۱۱) اگر ن خول کے باہر ہو تو چونکہ قہ کو لاتنا ہی پر صفر ہونا چاہیئے اس لئے حاصل ہوتا ہے  
اسب =۔۔ نیز چونکہ قہ مسلسل ہے اس لئے اس صورت میں سطح پر اس کی قیمت  
ہونی چاہیئے جو اندرونی نقطہ کے لئے قہ کی قیمت سطح پر ہوتی ہے اس لئے

$$\frac{1}{r} = \text{جب } \times \frac{\text{کمیت}}{\text{شعاع قطر}} \quad \text{یعنی } 1 = \text{جب } \times \text{م}$$

$$\text{اس لئے خول کے باہر قہ} = \text{جب } \frac{1}{r}$$

تھوس کرہ۔ اندرونی نقطہ۔ چونکہ قہ صاف اور قہ کے غیر تابع ہے اس لئے پوٹینون  
کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{r} \frac{\text{جب}}{\text{جب}} = \left[ \frac{2}{r} \frac{\text{جب}}{\text{جب}} \right] - \pi \text{ جب م} \\ \therefore \frac{2}{r} \frac{\text{جب}}{\text{جب}} = \frac{\pi \text{ جب م}}{3} - \pi \text{ جب م} + \text{گ}$$

$$\text{اب } \left( \frac{\text{جب}}{r} \right) = \text{مرکز پر حاصل کشش} = \text{اس لئے گ} =$$

$$\therefore \frac{\text{جب}}{r} = \frac{\pi \text{ جب م}}{3} - \pi \text{ جب م} + \text{ب} \quad \text{یعنی قہ} = \frac{\pi \text{ جب م}}{3} - \pi \text{ جب م} + \text{ب}$$

$$\text{لیکن صریحاً قہ کی قیمت مرکز پر} = \frac{\pi \text{ جب م}}{3} - \pi \text{ جب م} + \text{ب} = \frac{\pi \text{ جب م}}{3} - \pi \text{ جب م} + \text{ب} \\ \therefore \text{قہ} = \pi \text{ جب م} - \frac{\pi \text{ جب م}}{3} - \pi \text{ جب م} + \text{ب}$$

$$\text{۳۰۹۔ مشتق} = \text{دو لاتنا ہی اسطوانوں} = \frac{1}{r} \text{ اور } \frac{1}{r} \text{ کے درمیان مادہ اسطح}$$

منقسم ہے کہ کثافت متناسب ہے۔۔۔ کے اور محور کے متوازی سمت میں کمیت فی اکائی

طول م ہے۔ توہ کا کلیہ مادہ کے اندر کے لئے معلوم کرو۔ اور ثابت کرو کہ بیرونی اور اندرونی سطحوں پر کے توؤں کا فرق

$$\frac{2}{15} \text{ جم (۲۹ - ۳۳ لوک ٹرو) ہے۔}$$

$$\text{اگر کثافت } \rho \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \text{ ہو تو}$$

$$M = \int_0^R \rho \times 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{3} \rho R^3 \quad (1)$$

توہ قدر چکا صرف رک کا تفاعل ہے، پس پوائن کی مساوات (دفعہ ۳۰۷ کا نتیجہ ۳) ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{جفت } Q}{\text{جفت } R} + \frac{1}{r} = \frac{\text{جفت } Q}{\text{جفت } R} + \frac{4\pi R^2 \rho}{r} = 0$$

$$\therefore \frac{\text{جفت } Q}{\text{جفت } R} + \frac{4\pi R^2 \rho}{r} = 0 \quad (2)$$

اب  $\frac{\text{جفت } Q}{\text{جفت } R}$  فرس کی قیمت اندرونی سطح کے لئے (گاؤس کے مسئلہ کی رو سے)

صفر ہے اور  $\frac{\text{جفت } Q}{\text{جفت } R}$  تشاغل سے اندرونی سطح پر مستقل ہے، اس لئے

$$\therefore \frac{\text{جفت } Q}{\text{جفت } R} = 0 \quad \text{جبکہ } r = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{4\pi R^2 \rho}{r} \quad (3)$$

$$\therefore (2) \text{ سے حاصل ہوتا ہے } 0 = \frac{4\pi R^2 \rho}{r} - \frac{1}{r} \quad \text{ب}$$

[نیز بڑے اسطوانہ کے باہر کے کسی نقطہ کے لئے اپلاس کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے:

ق = - ج لوک ر + جہاں لا انتہائی مستقل ہے کیونکہ ق کو نہ چکا لا انتہائی پر صفر

ہونا چاہیئے۔ نیز چونکہ مادہ کے اندر اور باہر کے ق تفاعل کی قیمت اسطوانہ کے باہر کی سطح

پراکیت ہی ہے اس لئے ظاہر ہے کہ با بھی لامتناہی مستقل ہوگا

$$= \frac{[ \frac{29}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{42} - \frac{2}{2} ]}{\frac{2}{9}} - \frac{1}{2} = \text{ادک} - \frac{1}{2}$$

$$= ( \text{لوک} + \frac{29}{18} \pi \text{جول} = \frac{2}{15} ) ( 29 - 33 \text{ لوک} )$$

مشق ۲ :- اگر قوت کی ایک قیمت جو لاپلاس کی مساوات

$$= \frac{\text{جفت}^2}{\text{جفت}^2} + \frac{\text{جفت}^2}{\text{جفت}^2} + \frac{\text{جفت}^2}{\text{جفت}^2}$$

کو قطبی محدودوں میں پورا کرے ف (ط، ذ) ہو تو قوت = ر (ن+۱) ف (ط، ذ) بھی لاپلاس کی مساوات کو پورا کرے گی۔

۳۱۰۔ مساوی قوتہ سطحیں۔ کشش کرنے والی کمیت م کا کسی نقطہ ن

(لا، ما، می) پر قوتہ اس کے محدودوں لا، ما، می کا کوئی تفاعل ف (لا، ما، می) ہوگا

یعنی قوتہ = ف (لا، ما، می)۔ اُن تمام نقطوں کا طریق جہاں قوتہ کی قیمت مستقل

گ کے مساوی ہے مساوات ذیل سے حاصل ہوگا

$$\text{ف (لا، ما، می)} = \text{گ} \quad (۱)$$

سطح (۱) ایسی سطح ہے کہ اسکے ہر نقطہ پر کشش کرنے والے مادہ کا قوتہ مستقل

ہے لہذا اس سطح کو مساوی قوتہ سطح کہتے ہیں۔ مستقل گ کو مختلف قیمتیں دینے سے

مساوی قوتہ سطحوں کا ایک جٹ حاصل ہوگا۔ حسیاً یہی نتیجہ حاصل ہوگا خواہ قوتہ کو کسی

محدودوں میں بیان کیا جائے۔

مثلاً ایک سلاخ (ب) (دفعہ ۲۹۸) کا قوتہ کسی نقطہ ن پر جس کے فاصلے سلاخ

کے سروں سے ۱ اور ۲ ہیں یہ ہے

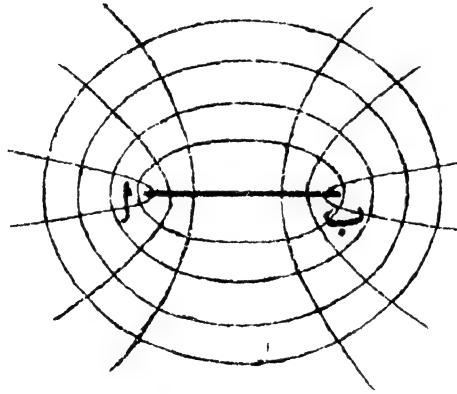
$$\text{جک مر لوک} = \frac{1 + 2 + 1}{1 - 2 + 1}$$

اور بناءً علیہ یہ مستقل رہیگا اگر  $r + r$  مستقل ہو۔

لیکن اگر  $r + r$  یعنی  $2r$  + بن مستقل ہو تو کاغذ کے مستوی میں  $N$  کا طریق قطع ناقص ہوگا جس کے  $a$  کے  $a$  اور  $b$  ہیں۔

پس نقصان میں اس کا طریق وہ سطح ہوگی جو اس ناقص کو  $a$   $b$  کے گرد گھمانے سے حاصل ہو۔

اس لئے مسادی قوہ سطحیں ایسے گردشی ناقص نما ہیں جو  $a$   $b$  اور  $b$   $a$  ہم آہنگی ناقصوں کو  $a$   $b$  کے گرد گھمانے سے حاصل ہوں۔ چند ایسے ناقص شکل میں دکھائے گئے ہیں۔



نیز دفعتاً (۳۰) اور (۳۱) کے کردوں اور کردی خولوں کی صورت میں کسی نقطہ پر قوہ مرکز سے اُس نقطہ کے صرف فاصلہ پر منحصر ہوتا ہے لہذا ان سب نقطوں پر جو ایک ہم مرکز کردہ کی سطح پر واقع ہوں اس کی قیمت وہی ہوگی۔ پس ان کردوں میں مساوت۔

ہم مرکز کردوں کے نظام پر مشتمل ہوگی۔



۳۱۱۔ کسی نقطہ ن پر قوت کشش ن میں سے گزرنے والی مساوی قوتہ سطح پر عمود وار ہوتی ہے۔

کیونکہ اگر اس مساوی قوتہ سطح پر ن کے قرب میں کوئی اور نقطہ ن ہو تو دفعہ (۲۹۴) کے بموجب ن کی سمت میں کشش

ن پر قوتہ - ن پر قوتہ = کیونکہ ن مساوی قوتہ سطح پر واقع

ہیں۔ اس لئے ہر ایسی سمت ن کیلئے جو نقطہ ن پر ماسی مستوی میں واقع ہے قوت کشش صفر ہوگی۔

اس لئے نقطہ ن پر حاصل قوت کشش مساوی قوتہ سطح کے نقطہ ن پر عماد کی سمت میں عمل کرے گی۔

اس نتیجہ کو تحلیل بطور پر یں ثابت کیا جاسکتا ہے۔

فرض کر دو کہ (لا، ما، سی) = ج (مستقل کوئی مساوی قوتہ سطح ہے تب چونکہ اس پر کے کسی خاص نقطہ ن (لا، ما، سی) پر سطح مذکور کے عماد کی سمتی بموجب

التمام بالترتیب جف لا، جف ما، جف ن کے متناسب ہیں اس لئے اگر

سطح مستوی کے (نقطہ ن پر کے) ماسی - ماسی پر کوئی خط لیا جائے اور اس کی سمتی بموجب التمام ل، م، ن ہوں تو

ل جف لا + م جف ما + ن جف ن = کیونکہ اس خط اور عماد کے

درمیان زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

لیکن چونکہ جف لا، جف ما، جف ن محوروں کی سمت میں قوت

کشش کے اجزاء ترکیبی ہیں اس لئے یہ مساوات اس امر کو بیان کرتی ہے کہ خط (ل، م، ن) کی سمت میں حاصل قوت کشش کا جزو ترکیبی صفر ہے۔ یہ بات ماسی مستوی میں تمام خطوط کے لئے صحیح ہے اس لئے حاصل قوت کشش مساوی

قوت سطح کے عماد کی سمت میں عمل کرتی ہے اور اس لئے مادہ کی کشش ذرہ پر کوئی کام نہیں کرتی جبکہ ذرہ کو مساوی قوت سطح کے ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ پر منتقل کیا جائے۔

۳۱۲۔ اگر کسی مساوی قوت سطح پر کے کسی نقطہ N سے سطح مذکور کا عماد کھینچا جائے اور اس عماد کا جو جزو اس سطح اور متصل مساوی قوت سطح کے درمیان ہے وہ مفعول ہو تو N پر کی کشش کی قوت مفعول کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔ کیونکہ اگر N پر قوت ہو اور N پر مساوی قوت سطح کا عماد متصل مساوی قوت سطح سے N پر ملے اور N پر قوت + مفعول ہو تو ظاہر ہے کہ

$$\frac{N \text{ پر قوت} - N \text{ پر قوت}}{N} = \frac{(Q + M) - Q}{M} = \frac{M}{M} = 1$$

اس لئے ان سب نقطوں پر جو قوت والی مساوی قوت سطح پر واقع ہیں حاصل قوت کشش مفعول کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔

۳۱۳۔ مساوی قوت سطحوں کو زمین کے ساتھ ایک مشابہت ہونے کی وجہ سے ہموار سطحیں بھی کہتے ہیں کیونکہ اگر ہم کشش زمین کو مستقل فرض کریں تو کسی نقطہ میں سے گزرنے والی مساوی قوت سطح افقی سطح مستوی ہے یا زیادہ صحیح طور پر زمین سے ہم مرکز ایک بہت بڑے کرہ کا حصہ ہے جس طرح کسی وزن کو چکے افقی مستوی پر حرکت دینے میں جاذبہ کے خلاف کوئی کام نہیں ہوتا اسی طرح مادہ کی کشش کے خلاف کوئی کام نہیں ہوتا اگر ایک ذرہ کو اس کے مساوی قوت سطح پر حرکت دیا جائے۔

۳۱۴۔ قوت کے نقطہ۔ اگر کسی نقطہ N سے ایک چھوٹا سا خط N، N پر کی عماد کشش کی سمت میں کھینچا جائے اور پھر N، نقطہ N پر کی عماد کشش کی سمت میں ایک چھوٹا سا خط کھینچا جائے اور علیٰ ہذا تقیاس N، N وغیرہ ... تو ہمیں ایک شکستہ خط حاصل ہوگا جو N، N، ... کو ایک دوسرے کے

نہایت قریب لینے سے ایک مسلسل منحنی بن جائیگا اس منحنی کو قوت کا خط کہتے ہیں۔  
بالفاظ دیگر قوت کا خط ایک ایسا منحنی ہوتا ہے جس کے کسی نقطہ پر کا  
ماس اس نقطہ پر کشش کی سمت کو تعبیر کرتا ہے۔

چونکہ  $\dot{N}$ ،  $\dot{N}$ ،  $\dot{N}$ ،  $\dot{N}$ ،  $\dot{N}$ ،  $\dot{N}$  میں سے ہر ایک خط

$\dot{N}$ ،  $\dot{N}$ ،  $\dot{N}$ ،  $\dot{N}$ ،  $\dot{N}$  میں سے گزرنے والی مساوی قوتہ سطحوں کے عماد ہیں اس لئے  
قوت کا خط اپنے طول کے ہر ایک نقطہ پر متناظر مساوی قوتہ سطح پر علی القواکم ہے۔  
اس لئے قوت کے خطوط ایسے خط ہوتے ہیں جو مساوی قوتہ سطحوں کے نظام  
کو علی القواکم کاٹتے ہیں۔

کروی خولوں یا کروں (دفعہ ۳۰۰ اور ۳۰۱) کی صورت میں قوت کے خط  
خطوط مستقیم ہوتے ہیں جو مرکز  $O$  میں سے گزرتے ہیں۔ یہ سب کے سب مساوی  
قوتہ سطحوں یعنی اہم مرکز کروں کو علی القواکم کاٹتے ہیں۔

ایک پتلی سلاخ  $AB$  کی صورت میں مساوی قوتہ منحنی قطع ناقص ہوتے ہیں  
اور ان سب کے ماسکے  $A$  اور  $B$  پر ہوتے ہیں (شکل دفعہ ۳۱۰)۔

اس اہم جانتے ہیں کہ ہم ماسکے ناقصوں کے ایک نظام کو اسی نظام کے ہم ماسکے  
زائد علی القواکم کاٹتے ہیں پس پتلی سلاخ کے قوت کے خطوط ایسے زائد ہیں جن کے ماسکے  
سلاخ کے سرے ہیں ان میں سے بعض زائد دفعہ (۳۱۰) کی شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

۳۱۵۔ قوت کی نمایاں اگر ایک چھوٹے سے

بند منحنی کے خط جانتے ہر ایک نقطہ سے

قوت کے خط کھینچتے جائیں تو ہمیں ایک قسم

کی نلی سی حاصل ہوتی ہے جس کو قوت کی نلی

کہتے ہیں۔

قوت کے خط کی تعریف کی بنا پر ظاہر ہے

کہ قوت کی نلی کی منحنی سطح کے کسی نقطہ پر کشش

اس سطح کے (نقطہ مذکور پر سے) عماد کی سمت



میں صفر ہوگی۔

قوت کی نلی کے ایسے حصہ پر غور کرو جو دو چھوٹی عمادی تراشوں میں اور  
میں سے گھرا ہوا ہے۔ اور فرض کرو کہ سروں میں اور میں پر عماد کی سمت  
میں کششیں بالترتیب ف، اور ف، ہیں۔

نیز فرض کرو کہ قوت کی نلی کے اس حصے کے اندر کوئی مادہ نہیں ہے۔  
اب نلی کے اس حصہ پر دفعہ (۳۰۳) کا مسئلہ لگاؤ۔ نلی کی سطح پر کے تمام  
نقطوں کے لئے سطحی تکملہ صفر ہے کیونکہ اس نقطہ پر عمادی قوت صفر ہے۔  
پس سطحی تکملہ کی کل مقدار صرف مستوی سروں کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔ پس  
مسئلہ مذکور سے حاصل ہوتا ہے

$$ف، س + (- ف،) س = -$$

اس لئے ف، س = ف، س۔

خواہ نلی کا طول کچھ ہی ہو ہر حالت میں یہ مسئلہ درست رہتا ہے اس لئے ف، س  
کی قیمت وہی رہتی ہے تا وقتیکہ ہم ایک ہی نلی پر قائم رہیں یعنی ایک ہی نلی کے  
کسی نقطہ پر کشش کی قوت نلی کی عمادی تراش کے رقبہ کے بالعکس متناسب  
ہوتی ہے۔

۴۱۶۔ اس مسئلہ کی ایک خاص صورت کے طور پر کسی بیرونی نقطہ پر ایک ٹھوس  
کرہ کی کشش پر غور کرو۔ قوت کی نلیاں پتلے مخروط ہیں جن سب کے راس کرہ  
کے مرکز پر ہیں۔ پس اس قسم کی مخروط کی عمودی تراش سے اور اس لئے  
اس کا رقبہ مرکز سے فاصلہ کے مربع کے متناسب ہے۔ اس لئے اس سے یہ نتیجہ  
نکلتا ہے جیسا کہ دفعہ (۲۸۷) میں ثابت کیا گیا تھا کہ ایک ٹھوس کرہ کی کشش کسی  
بیرونی نقطہ پر مرکز سے اس نقطہ کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہوتی ہے۔  
اسی طرح ایک لامتناہی مجسم مستدیر اسطوانہ پر غور کرو۔ تشاکل سے ظاہر ہے  
کہ اس کے محور پر کسی نقطہ سے جو قوتی خطوط نکلتے ہیں وہ سیدھے خط ہیں  
اور محور پر عمود وار ہیں پس اس صورت میں قوت کی نلیاں فائے کی مانند ہیں اور

تراش میں کا رقبہ محور و اسے اس کے فاصلہ کے متناسب ہے۔ اس لئے ایک لائن ہی اسطوانہ کی کشش کسی بیرونی نقطہ پر محور سے نقطہ مذکور کے فاصلہ کے بالعکس متناسب ہوتی ہے (مقابلہ کرو دفعہ ۲۸۵ مشق ۲)۔

## مثالیں

۱۔ ش اور ج ایک مقناطیس کے قطب ہیں۔ اگر ط اور ذ وہ زاوے ہوں جو ش ن اور ج ن ش ج محورہ کے ساتھ بناتے ہیں اور ش ن = ر اور ج ن = س تو اس مقناطیس کے قوت کے خطوط کی مساوات ہے

جم ط - جم ذ = مستقل

اور مساوی قوتہ سطحیں ش ج کے گرد منحنیات  $\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \frac{1}{r}$  مستقل کو گردش دینے سے حاصل ہونگی۔

۲۔ دو لائنیں مستقیم سلاخیں جو ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں ایک دوسرے کو علی التوائم قطع کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کی سطح مستوی میں مساوی قوتہ منحنی قائم زائد ہونگے۔  
۳۔ ایک پتلی بیکیاں سیدھی سلاخ کی کشش کا قانون معلوم کعب کا قانون ہے ثابت کرو کہ مساوی قوتہ سطحیں خط ابتدائی کے گرد ذیل کے منحنیوں کی گردش سے حاصل ہوتی ہیں

$$(r^2 + \frac{1}{r^2} - 2) = 2r^2 \text{ (جم ط)} = 2r^2 \text{ (ج رجب ط)} \text{ (ج رجب ط)}$$

جہاں ۱۲ سلاخ کا طول ہے اور ج ایک مبدل ہے۔

۴۔ ایک ہی کثافت کی دو لائنیں سلاخوں کی مساواتیں یہ ہیں

$$a = \text{لامس } a' \text{ ج} = \text{ج} \text{ اور } a = \text{لامس } a' \text{ ج} = \text{ج}$$

ان کی مساوی قوتہ سطحوں کی مساواتیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اگر ایک ذرہ کو لا کر محور پر رکھا جائے تو وہ فضا جس میں ذرہ مذکور کے بٹاؤ تعادل قائم پسید کرتے ہیں اور وہ فضا جس میں تعادل غیر قائم ہوتا ہے ایک دوسرے سے سطحوں





سے علیحدہ کر کے لاتنا ہی پر لے جانے میں ان ذروں کی باہمی کششیں جو کام کرتی

ہیں وہ  $== \frac{1}{4} \text{ آؤ } \text{فرم}$

پس ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ جب کوئی جسم ایک تشکیل سے ہٹ کر دوسری تشکیل ب میں آ جائے تو اس کے ذروں کی باہمی کششیں کیا کام کرتی ہیں۔ کیونکہ

یہ کام = ان ذروں کی کششوں کا کام جو ان کششوں نے جسم کے ذروں کو تشکیل سے نکال کر لاتنا ہی تک لیجانے میں کیا + وہ کام جو انہی ذروں کی کششوں نے لاتنا ہی سے تشکیل ب میں لانے میں کیا (اور یہ

$== \frac{1}{4} \text{ آؤ } \text{فرم} + \frac{1}{4} \text{ آؤ } \text{فرم}$

جہاں پہلا تکملہ تشکیل ا میں تمام نظام پر لیا گیا ہے اور دوسرا تکملہ تشکیل ب میں تمام نظام پر۔

۳۱۸۔ ایک جاذب بالذات کرہ کی کثافت یکساں اور ث کے مساوی ہے اور اس کا نصف قطر  $\rho$  ہے، یہ کرہ بدل کر ایک اور یکساں کثافت والا کرہ بن جاتا ہے جس کا نصف قطر  $b$  ہے ثابت کر دو کہ اس کی باہمی کشش کی قوتوں نے جو کام

کیا وہ  $\frac{3}{5}$  جو  $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$  ہے جہاں مرکز کی کثیت ہے۔

پہلی شکل میں مرکز سے فاصلہ لا پر توہ (بجوب دفعہ ۳۰۱)

$$\pi \text{ جث } (2 - \frac{2}{3}) =$$

$$\therefore \frac{1}{4} \text{ آؤ } \text{فرم} = \frac{1}{4} \int \pi \text{ جث } (2 - \frac{2}{3}) \times \pi \text{ لائن فرلا}$$

$$= \pi \text{ جث } \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{15} \right\} = \frac{14}{15} \pi \text{ جث } \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \text{ ج } \frac{2}{1}$$



اسی طرح  $\frac{1}{5}$  [۱] قہ فرم تشکیل ب کے لئے  $\frac{3}{5}$  جہ  $\frac{3}{5}$  ہے۔  
پس مطلوبہ کام =  $\frac{3}{5}$  جہ  $\frac{3}{5}$  (ب -  $\frac{1}{5}$ )

## مثالیں

۱۔ ثابت کرو کہ اگر زمین کی کثافت کو یکساں فرض کیا جائے تو زمین کو کشف کر کے ایک پتلے کردی خول میں منتقل کر دینے میں جگہ خول کا نصف قطر دہی ہو جو کام کرنا پڑتا ہے وہ  $\frac{1}{2}$  فٹ پونڈ ہے جہاں م زمین کی کیت ہے پونڈوں میں اور زمین کا نصف قطر ہے فوٹوں میں۔

۲۔ ایک کرہ کا نصف قطر اسے اور کیت م ہے، اگر اس کے کسی نقطہ پر کثافت مرکز سے نقطہ مذکور کے فاصلہ کے بالعکس تناسب ہو تو ثابت کرو کہ کرہ کے ذروں کو اتنا ہی سے موجودہ تشکیل میں لے میں جو کام باہمی کششیں انجام دیتی ہیں وہ  $\frac{1}{2}$  جہ  $\frac{1}{2}$  ہے۔

۳۔ ایک مستدیر قرص کے ذروں کو اکٹھا کرنے میں جبکہ قوت کا قانون نیوٹن کے کلیہ کے مطابق ہو  $\frac{1}{r^2}$  جہ  $\frac{1}{r^2}$  کام کرنا پڑتا ہے جہاں م قرص کی کیت ہے اور اس کا نصف قطر ہے

[اسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ مرکز سے فاصلہ لا پروفہ =  $\frac{1}{2}$  جہ  $\frac{1}{2}$  لا جب ط فرط

اس لئے مطلوبہ کام =  $\frac{1}{2}$  [۱] قہ  $\times \pi r^2$  لا فرلا =  $\pi r^2$  جہ  $\frac{1}{2}$  لا فرلا [۱] لا جب ط فرط

=  $\pi r^2$  جہ  $\frac{1}{2}$  لا [۱] لا جب ط فرلا فرط =  $\pi r^2$  جہ  $\frac{1}{2}$  لا [۱] لا جب ط فرط

=  $\pi r^2$  جہ  $\frac{1}{2}$  لا [۱] لا جب ط فرط =  $\frac{\pi r^2}{3}$  جہ  $\frac{1}{2}$  لا [۱] لا جب ط فرط +  $\frac{1}{3}$  جہ ط

$$= \frac{\pi^2 \text{ جہ } 2 \text{ و } 3}{3} \left[ \text{جب } 2 \text{ و } 3 \text{ مس } \frac{1}{2} \right] = \frac{\pi^2 \text{ جہ } 2 \text{ و } 3}{3} \left[ \frac{8}{3} - \frac{\pi^2 \text{ جہ } 2 \text{ و } 3}{3} \right] \text{ چنانچہ ثابت ہے}$$

۴۔ ایک متجانس پیچھے کرنا کا غرض مرکز جب ہر نیم محور اعظم و اوج کیست م ہے، ثابت کرنا کہ اس کے ذروں کو موجودہ تشکیل سے لاتنا ہی پرے جانے میں ان کی باہمی

تجاوزی قوتوں کے خلاف  $\frac{3}{2}$  جہ  $\frac{1}{2}$  سے کام کرنا پڑتا ہے۔

۵۔ ایک کشش کرنے والے اذہ کی کیت م، اس کا قوتہ ذ اور اس کی حال کشش نقطہ (لا، ا، ا، ا) پر سا ہے۔ ثابت کرنا کہ

$$\frac{1}{2} \text{ قہ فرم} = \frac{1}{\pi^2 \text{ جہ}} \left[ \text{سنا فرلا فرما فرمی} \right]$$

جہاں موخر الذکر حکم کو کل فضا میں پھیلا یا گیا ہے۔  
ایک ٹپوں متجانس کر کے لئے اس مسئلہ کی تصدیق کرو۔

تکملہ  $\left[ \text{قہ قہ فرلا فرما فرمی} \right]$  پر غور کرو جبکہ عمل مکمل کو تمام فضا پر مبنی لیا گیا ہے  
نصف قطر والے دائرے سے گھری ہوئی فضا پھیلا یا جائے۔  
مکمل بالخصوص سے

$$\left[ \text{قہ جہ قہ فرلا} \right] \left\{ \text{مف م مفی} = \left[ \text{قہ جہ قہ} \right] \left[ \text{مف م مفی} \right] \right\}$$

$$- \left[ \left( \frac{\text{جہ قہ}}{\text{جہ لا}} \right) \text{ فرلا} \right] \left[ \text{مف م مفی} \right] \dots \dots (1)$$

یہاں  $\left[ \text{قہ جہ قہ} \right]$  کو وہ قیمتیں دینی چاہئیں جو اس کی ان نقطوں پر ہیں جہاں قاعدہ  
(مف م مفی) پر کا متوازی السطوح جس کے باقی رخ دلا کے متوازی ہیں لاتنا ہی  
کر کے لیا ہے اس لئے اگر کر کے سطح کا وہ حصہ جو اس متوازی السطوح سے منقطع ہوتا ہے  
مف م ہو تو مف م م مفی = مف م م حجم لہ جہاں لہ وہ زاویہ ہے جو مف م پر

کا عماد محور لاکہ مثبت سمت کے ساتھ بناتا ہے۔

$$\therefore \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{لا}} \end{matrix} \right] \text{مف}^{\text{ما}} \times \text{مف}^{\text{ی}} = \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{لا}} \end{matrix} \right] \text{فرس} \times \text{جہم}^{\text{لہ}} \\ \text{جہاں محور الذکر تکمیل کو لا متناہی کرہ کی کل سطح پر پھیلانا چاہیئے۔}$$

اب  $\frac{\text{جف}^{\text{ق}}}{\text{جف}^{\text{لا}}}$  اس فاعلیہ کے معکوس کعب درجہ کی مقدار ہے جو مف سے اوکشتش کرنے والے مادہ کے کسی نقطہ کے درمیان ہے اور مف میں اسی فاصلہ کے مربع کے درجہ کی مقدار ہے۔ اس لئے

$$\left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{لا}} \end{matrix} \right] \text{فرس} \times \text{جہم}^{\text{لہ}} = 0$$

$$\therefore (1) \text{ سے حاصل ہوتا ہے } \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{لا}} \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری} = - \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{لا}} \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری}$$

$$\text{لہذا } \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{لا}} \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری} = - \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{لا}} \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری} + \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{ما}} \end{matrix} \right] + \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{ی}} \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری}$$

$$= - \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{لا}} \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری}$$

اب کشتش کرنے والے مادہ کے اندر لفت  $ق = ۳۴$  جہم  $۳۸$  جہاں مرکشتت ہے۔ اور باہر لفت  $ق = ۳۸$  جہم  $۳۴$  جہاں مرکشتت ہے۔

$$\text{اس لئے } \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{لا}} \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری} = \frac{1}{34} \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{لا}} \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{34} \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{لا}} \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری} = \frac{1}{34} \left[ \begin{matrix} \text{جف}^{\text{ق}} \\ \text{جف}^{\text{لا}} \end{matrix} \right] \text{فرلا فرما فری}$$

ایک ٹھوس کرہ کی صورت میں دائیں طرف کارکن  $ق = ۳۴$  جہم  $۳۸$  جیسا کہ دفعہ ۳۱۸ میں دکھایا

گیا ہے۔ کرہ کے اندر  $ق = ۳۴$  جہم  $۳۸$  اور اس کے باہر  $ق = ۳۸$  جہم  $۳۴$  (دفعہ ۳۸۷)۔



کرنے والی قوتوں کے زیر عمل تعادل میں ہو تو تعادل ہمہ قسم کے ہٹاؤں کے لئے قائم نہیں ہو سکتا۔

کیونکہ اگر یہ ذرہ کسی نقطہ ن پر متعادل ہو اور اسے ذرا سا ہٹا کر نقطہ ق پر

لے جائیں اور یہ پھرن پر آنا چاہیے تو ضروری ہے کہ جھٹ ق کی قیمت ق پر منفی

ہو، اگر تعادل سب سمتوں میں قائم ہو تو سب ہٹاؤں کی یہی کیفیت ہونی چاہیے یعنی ق کی قیمت ن پر بڑی سے بڑی ہوئی چاہیے جو دفعہ ما قبل کی رو سے ناممکن ہے۔

نیز تعادل غیر قائم بھی نہیں ہو سکتا۔ کیونکہ اس سے جھٹ ق کا تمام سمتوں کے

لئے مثبت جونا اور بناؤ علیہ ق کا ن بر اقل ہونا لازم آتا ہے۔

فرع ۲۔ اگر ق کی قیمت ایک بند سطح میں کے سب نقطوں پر ایک ہی مستقل کے مساوی ہو اور اس بند سطح کے اندر کوئی کشش کرنے والا مادہ نہ ہو تو اس کی قیمت سطح مذکور کے اندر سب نقطوں پر یکساں رہی ہوگی۔

کیونکہ اگر ایسا نہ ہو تو اس کے اندر کوئی نہ کوئی نقطہ ایسا ضرور ہوگا جس پر ق وہیں کے اندر کے کسی دوسرے نقطہ پر کے ق وہ کی نسبت یا بڑا ہوگا یا چھوٹا ہوگا یعنی کوئی نہ کوئی نقطہ ضرور ایسا ہوگا جس پر ق وہ بڑے سے بڑا یا چھوٹے سے چھوٹا ہوگا لیکن یہ مسئلہ ما قبل کی رو سے ناممکن ہے۔

۳۰۔ اگر کسی تقسیم مادہ کے ق وہ کی قیمت فضا کے تمام نقاط کے لئے معلوم ہو تو ہم اسکے جواب میں مادہ کی تقسیم دریافت کر سکتے ہیں۔ کیونکہ ق کے معلوم ہونے سے ہم فضا کے ہر نقطہ پر ق کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ جہاں کہیں یہ صفر ہو دیاں پائیموں کی مسادات سے ظاہر ہے کہ کثافت صفر ہوگی یعنی ان نقطوں پر مادہ موجود

نہ ہوگا۔ جہاں کہیں صفر نہ ہو دیاں کثافت مادہ  $\frac{ق}{جھٹ ق}$  ہوگی۔

اگر ق وہ تفاعل کی شکل ایک سطح میں کے اندر کے نقطوں کے لئے اور باہر کے نقطوں کے لئے مختلف ہو اور اگر جھٹ ق کی قیمت میں جبکہ ہم اس سطح

کی ایک طرف سے دوسری طرف جائیں دقتہ تغیر واقع ہو تو اس پر مادہ کی سطحی تقسیم دفعہ ۲۸۲ کی رو سے حاصل ہوگی کیونکہ اگر اس کے عین اندر توہ قم اور اس کے عین باہر توہ قب ہو تو دفعہ ۲۸۲ کے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ

$$(- \text{جف قب} / \text{جف ع}) - (- \text{جف قو} / \text{جف ع}) = ۳۴ \text{ جہ شہ}$$

$$\text{یعنی شہ} = \frac{۱}{۳۴ \text{ جہ}} \left[ \frac{\text{جف قو}}{\text{جف ع}} - \frac{\text{جف قب}}{\text{جف ع}} \right] \dots \dots (۱)$$

جہاں شہ اس پر مادہ کی سطحی کثافت ہے۔  
مستق۔ مادہ کی تقسیم دریافت کردہ جو یہ توہ پیدا کرے

$$\frac{\text{جہ م}}{۱} (-۱ - \frac{۱}{۳۴}) \text{ یا } \frac{\text{جہ م}}{ر} (-۱ - \frac{۱}{۳۴})$$

جگر ر (=  $\sqrt{۱ + ۱ + ۱}$  سٹی) بالترتیب اس سے کم ہو یا زیادہ ہو۔

فرض کرو کہ نصف قطر اس کے کرہ کے اندر توہ قم ہے اور باہر قم

$$\text{پس قم} = \frac{\text{جہ م}}{۱} (-۱ - \frac{۱}{۳۴}) \text{ اور قم} = \text{جہ م} (\frac{۱}{۳۴} - ۱)$$

تفرق کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

لفاقم = اور لفاقم = اس لئے کہ وہی خول ر = اس کے اندر اور باہر کوئی مادہ نہیں ہے۔

کردی سطح پر کی تقسیم کے لئے

$$\frac{\text{جف قو}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جہ م}}{۳۴} \text{ اور } \frac{\text{جف قو}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف قو}}{\text{جف ع}}$$

$$\text{اس لئے کہ وہی سطح پر } \frac{\text{جف قو}}{\text{جف ع}} = \frac{\text{جف قو}}{\text{جف لا}} \times \frac{۱}{ر} = \frac{\text{جہ م}}{۳۴} \times \frac{۱}{ر}$$

$$\text{نیز جہت قدم} = \frac{[ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} ]}{\text{جہم}} = \frac{1}{12}$$

$$\text{اور جہت قدم} = \frac{[ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} ]}{\text{جہم}} = \frac{1}{6} \text{ اور جہت قدم} = \frac{[ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} ]}{\text{جہم}} = \frac{1}{6}$$

اس لئے ہر جہت ر = ۱ تو

$$\frac{\text{جہت قدم}}{\text{جہت لا}} = \frac{\text{جہم}}{3 \times 1 - 1 \times 1 - 1 \times 1}$$

$$\frac{\text{جہت قدم}}{\text{جہت لا}} = \frac{\text{جہم}}{1} \times \frac{1}{(1-1)} \text{ اور } \frac{\text{جہت قدم}}{\text{جہت سی}} = \frac{\text{جہم}}{1} \times \frac{1}{(1-1)}$$

$$\text{پس کردہ} = \frac{1}{1} \times \frac{\text{جہت قدم}}{\text{جہت لا}} + \frac{1}{1} \times \frac{\text{جہت قدم}}{\text{جہت لا}} + \frac{1}{1} \times \frac{\text{جہت قدم}}{\text{جہت سی}} = \frac{1}{1} \times \frac{\text{جہت قدم}}{\text{جہت لا}} + \frac{1}{1} \times \frac{\text{جہت قدم}}{\text{جہت لا}} + \frac{1}{1} \times \frac{\text{جہت قدم}}{\text{جہت سی}}$$

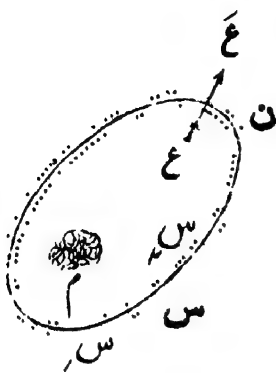
$$\text{جہم} = \frac{3 \times (1 + 1 + 1) \times (1-1)}{3 \times 1 - 1 \times 1 - 1 \times 1} \times \text{جہم} = \frac{3 \times 3 \times 0}{3 \times 1 - 1 \times 1 - 1 \times 1}$$

اس لئے (۱) سے ش =  $\frac{1}{3 \times 1 - 1 \times 1 - 1 \times 1}$  جس سے کردی سطح پر کے کسی نقطہ پر کشاف معلوم ہوتی ہے۔

۳۲۱۔ اگر س، قوہ قد کی ایک بند مساوی قوہ سطح ہو جس کے جاذب مادہ کی کثیت م ہے اور اگر جاذب مادہ کی ایک پتلی تہ س پر چڑھائی جائے اور کسی نقطہ

$$\text{ن پر اس کی کثافت ہر} = \frac{1}{3 \times 1 - 1 \times 1 - 1 \times 1} \times \text{جہت قدم}$$

جہاں جہت نقطہ ن پر باہر کی طرف کھینچے ہوئے مادہ کا ایک چھوٹا جزو ہے تو س کے باہر کے سب نقطوں پر پتلی تہ کا قوہ، م کے قوہ کے مساوی ہوگا نیز پتلی تہ اور م کا مجموعی قوہ س کے تمام اندرونی نقطوں پر مستقل اور قوہ کے مساوی ہوگا جہاں م جاذب مادہ کا وہ حصہ ہے جس کے باہر ہے۔



پہلے ہم تکی کثافت کسی نقطہ ن پر ایسی  
معلوم کرتے ہیں کہ س کے ہر نقطہ پر اس کا  
اور م کا قہ ملکہ = قہ  
اب م اور م کا (جو کشش کرنے  
والے مادہ کی کل کمیت ہے) س کے  
ہر نقطہ پر قہ = قہ  
اس لئے کل قہ کا قہ = س کے

ہر نقطہ پر م کا قہ  
اس لئے اگر کثافت م کی علامت بدل دیں یعنی نظام کو تجا ذی نظام سے بدل کر  
انذفاعی نظام بنا دیں تو م اور نقطہ ن پر۔ م کثافت والی قہ کا قہ سطح س  
کے سب نقطوں پر (جو س کے عین باہر واقع ہے) صفر ہوگا۔  
لیکن م اور تہ (-) کا قہ لا انتہا نصف قطر والے کرہ پر بھی صفر ہے۔  
اس لئے وضع ۳۱۹ کی فرع ۲ کی رو سے (یونکہ س اور لا انتہا ہی کرہ کے اندر کی  
فضا میں کمیت م اور تہ کا کوئی جزد نہیں ہے) م اور تہ (-) کا قہ س  
اور لا انتہا ہی کرہ کے اندر کی سب فضا میں ہر جگہ صفر ہے یعنی س کے باہر کی  
کل فضا میں صفر ہے۔

یعنی م کا قہ = انتہا میں س کے باہر کی تمام فضا میں کثافت م والی قہ کا  
قہ (۱)

نیز دفعہ ۳۸ کی اسی فرع کے بموجب چونکہ تہ اور م کا قہ سطح س کے تمام  
نقطوں پر جو س کے عین اندر کی سطح ہے قہ کے مساوی ہے اس لئے یہ  
نتیجہ نکلتا ہے کہ س کے اندر ہر جگہ ان کے قہ کا مجموعہ مستقل ہے اور قہ کے  
مساوی ہے (کیونکہ س کے اندر کوئی کشش کرنے والا مادہ جو تہ اور م پر مشتمل  
ہے موجود نہیں ہے) اور اس لئے انتہا میں سطح س کے اندر قہ مستقل  
اور قہ کے مساوی ہے (۲) .. ..

فرض کرو کہ سطح کے نقطہ ن پر تہ کے عین اندر اور عین باہر کے نقطوں پر



قوت کشش کے عادی جزو تحلیل جیکہ دونوں باہر کی طرف ناپے گئے ہوں بالترتیب  
ع اور ع ہیں، تب دفعہ ۲۸۲ کی رو سے

$$۳۴ جہ مر = ع - ع \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (۳)$$

اب (۲) سے ظاہر ہے کہ ع + م کی نقطہ ن پر عادی کشش =  
اور (۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$ع = ن پر م کی عادی کشش$$

اس لئے (۳) سے حاصل ہوتا ہے

۳۴ جہ مر = ن پر م کی عادی کشش + ن پر م کی عادی کشش  
(چونکہ عادی کششوں کو باہر کی طرف ناپا گیا ہے)

= کل کشش کرنے والی کیت کی ن پر عادی کشش باہر کی طرف

$$= \frac{\text{جفت ق}}{\text{جفت ع}}$$

اس لئے یہ کی کثافت مر نقطہ ن پر =  $\frac{۱}{۳۴ جہ جفت ع} \times \text{جفت ق}$

فرع ۱ — چونکہ کیت م اور تہ کے قہ س کے باہر کے سب نقطوں پر مساوی  
ہیں اس لئے یہ لاتنا ہی پر بھی مساوی ہیں۔

اس سے ظاہر ہے کہ تہ کی کیت = م  
مبادل ثبوت

تہ کی کیت = ل مر فرس =  $\frac{۱}{۳۴ جہ ل جفت ع} \times \text{فرس}$

$$= \frac{۱}{۳۴ جہ} \times \text{عادی کشش کا سطحی تکمیلی سطح س پر}$$

= کیت س کے اندر بموجب دفعہ ۳۰۳ = م  
فرع ۲ — فرض کرو کہ س کے باہر کوئی کشش کرنے والی کیت نہیں ہے یعنی

فرض کرو کہ  $m$  صفر ہے، تب  $s$  کے باہر کی فضا کے ہر نقطہ پر  $t$  کا قوہ  $= m$  کا قوہ

نیز  $s$  کے اندر  $t$  کا قوہ  $= t$  = سطح  $s$  پر  $m$  کا قوہ

۲۲۔ دفعہ با قبل کی ایک آسان مثال ذیل میں درج کی جاتی ہے۔ فرض کرو کہ نقطہ و پکیت  $m$  کا ایک ذرہ ہے اور  $m$  صفر ہے۔ تب  $s$  ایک کرہ ہوگا جس کا مرکز  $O$  اور نصف قطر کسی مقدار  $r$  کے مساوی ہے۔

$$\text{اس لئے } m = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \times \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \times \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \left( \frac{m}{r} \right)$$

$$= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

اس لئے  $s$  کے باہر اس کرہ کا قوہ  $=$  ذرہ  $m$  کا قوہ  $=$  نقطہ سے فاصلہ  $r$  سے فاصلہ  $r$  پر اور  $s$  کے اندر اس کرہ کا قوہ مستقل ہے اور  $= m$  کا قوہ کرہ کی سطح پر

$$= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

یہ دفعہ ۳۰ کے نتائج ہیں۔

۲۳۔ مشق۔ ایک متجانس تیلی سیدھی سلاخ کا طول ۲ ج اور کیت  $m$  ہے۔ اس کے مساوی قوہ منحنیوں میں سے ایک منحنی کے محور اعظم کا طول ۲ ہے۔ ثابت کرو

$$\text{اگر اس منحنی پر اداہ کی تقسیم اس طرح ہو کہ کسی نقطہ ن پر کثافت } \frac{1}{\pi m} \times \frac{1}{(2 - \frac{1}{2})} = \frac{m}{\pi}$$

ہو (چنانچہ سلاخ کے وسطی نقطہ سے  $n$  پر منحنی کے ماس پر عمود کا طول ہے) تو اس قوہ سطح مذکور کے باہر کے کسی نقطہ پر سلاخ کے قوہ کے مساوی ہوگا۔

فرض کرو کہ سلاخ  $AB$  ہے اور  $A = B$  اور  $B = n$  اور  $n$  سے

$AB$  پر عمود ما ہے۔

تب - جفت = ن پر سلاخ کی کشش =  $\frac{۲ \text{ جک مر جب } \frac{۱}{۲} \text{ ان ب}}{۲}$  (دفعہ ۲۷۷)

$$\frac{۲ \text{ جک مر } ۲ \times \text{ج جب } \frac{۱}{۲} \text{ ان ب}}{۲} = \frac{۲ \text{ جک مر جب } \frac{۱}{۲} \text{ ان ب}}{۲}$$

اب جم  $\frac{۱}{۲} \text{ ان ب} = \text{جب (ب ن ت)}$  جہاں ن ت نقطن پر سادی قوہ

$$\frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲}$$

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲ \text{ جک مر جب } \frac{۱}{۲} \text{ ان ب}}{۲} = \frac{۲ \text{ جک مر جب } \frac{۱}{۲} \text{ ان ب}}{۲}$$

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

مسادی قوہ مسخنی کے باہر تہ اور سلاخ کے قوہ تمام نقطوں پر سادی ہیں۔  
مسادی قوہ مسخنی کے اندر دفعہ ۳۲۱ کے فرع (۲) کی رد سے تہ کا قوہ سب نقطوں پر  
وہی ہے اور = قوہ مسخنی کے سب نقطوں پر سلاخ کا قوہ

$$\frac{۲ + ۲ + ۲}{۲} = \frac{۲ + ۲ + ۲}{۲}$$

$$\frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲}$$

مثالیں

۱۔ ایک ثابت نقطہ سے ایک نقطہ کا فاصلہ ہے اور اس پر قوہ

$$ق = \pi r^2 \text{ جہر } (r^2 - b^2) \quad \text{اگر } r > b$$

$$ق = \pi r^2 \text{ جہر } (r^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{r^2}{3} - \frac{r^2}{3}) \quad \text{اگر } b > r$$

$$ق = \pi r^2 \text{ جہر } \frac{r^2 - b^2}{r} \quad \text{اگر } b > r$$

ثابت کرو کہ کشش کرنے والا مادہ ایک کردی خول ہے جسکی کثافت ہرے اور جسکی حدود در مرکز واسے ہم مرکز کرے ہیں جن کے نصف قطرہ اور ب ہیں۔  
۳۔ بتاؤ کہ مادہ کی کس تقسیم سے ذیل کے قوہ حاصل ہو سکتے ہیں

$$ق = \frac{\pi r^2 \text{ جہر } r}{r} \quad \text{جبکہ } r < b$$

$$ق = \pi r^2 \text{ جہر } \frac{r^2 + r^2 + r^2 - r^2}{3} \quad \text{جبکہ } r > b \text{ جہاں } r^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$[ \text{کرہ} = r \text{ کے اندر کثافت ہے } \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ اور اس کے باہر صفر ہے} ]$$

$$\text{اس کی سطح پر سطحی کثافت } \frac{4}{3} \pi r^3 (1 - \frac{r^2}{a^2}) \text{ ہے}$$

۳۔ مادہ کی ایک خاص تقسیم کا قوہ کسی نقطہ لاء، ما، می پر

$$\frac{2}{3} \pi r^2 \text{ جہر } \frac{r^2}{r} + \frac{\pi r^2 \text{ جہر } r}{15} \times \frac{r^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{r^2} \quad \text{جبکہ } r < b$$

$$\text{اور } \frac{2}{3} \pi r^2 \text{ جہر } \frac{r^2}{r} + \frac{\pi r^2 \text{ جہر } r}{15} \times \frac{r^2 (a^2 - b^2 - c^2)}{r^2} \quad \text{جبکہ } r > b$$

تقسیم معلوم کرو۔

(کرہ  $r = 1$  کی سطح پر سطحی کثافت  $m$  لائے، کرہ کے اندر اور باہر کوئی مادہ نہیں۔)  
۴۔ ایک استوائی سطح کے کنارے محوری کے متوازی ہیں۔ اس کے باہر قوہ صفر ہے اور  
اندر  $ق = \frac{4}{3} \pi r^3 m - \frac{4}{3} \pi r^3 m \frac{r^2}{a^2} = \frac{4}{3} \pi r^3 m (1 - \frac{r^2}{a^2})$  تقسیم معلوم کرو۔

۵۔ مادہ کی کس تقسیم سے ذیل کے قوت پیدا ہوتے ہیں۔

$$ق = ۱، ناقص نما \frac{لا}{مر۱} + \frac{ما}{مر۲ب} + \frac{می}{مر۳ج} = ۱ کے اندر (مر > ۱)$$

$$ق = ۱ - \frac{۱}{مر} [۱ - \frac{لا}{مر۱} - \frac{ما}{مر۲ب} - \frac{می}{مر۳ج}] \text{ اوپر کے ناقص نما اور ناقص نما}$$

$$\frac{لا}{مر۱} + \frac{ما}{مر۲ب} + \frac{می}{مر۳ج} = ۱ کے اندر اور$$

$$ق = ۰، ناقص نما \frac{لا}{مر۱} + \frac{ما}{مر۲ب} + \frac{می}{مر۳ج} = ۱ کے باہر۔$$

۶۔ کشش کرنے والے مادہ کی معلوم مقدار کا قوت کسی نقطہ (لا، ما، می) پر

$$ج = \frac{لا(لا-ما) + ۲(ما-می) + لا}{۲(لا+ما)}$$

سطحی کثافت  $\frac{۱}{\pi r^2} \sqrt{\frac{ب+لا}{۳(لا+ما)}}$  تمام بیرونی نقطوں پر وہی قوت پیدا کرے گی جو اصلی کثیت پیدا کرتی ہے۔

۷۔ ایک کرہ کا نصف قطر  $r$  ہے۔ اس کی سطح پر وہ کثافت معلوم کرو جس کی وجہ سے اس کے

مرکز سے فاصلہ  $r$  پر کے نقطہ پر قوت  $ل (۲-۳)$  ہو جبکہ  $ر > ل$  اور  $ل < \frac{۲}{۳}ر$  ہو جبکہ  $ل < \frac{۲}{۳}ر$

$$[مر = \frac{۳ل}{\pi ج} \text{ کرہ کے اندر، } مر = ۰ \text{ اس کے باہر، اور } مر = \frac{ل}{\pi ج} \text{ اس کی سطح پر}]$$

# سوطھواں باب

## کم لچک والے شہتیروں کا تعادل

۳۴۔ اگر ہم ایک ایسی پتلی سلاح یا شہتیر کی شکل معلوم کرنا چاہیں جو کسی طرح بوجھ کو لدی ہوئی ہے تو ہمیں سلاح کی شکل اور جھکاؤ کے معیار اثر میں کوئی رشتہ معلوم ہونا چاہیے۔ ہم یہاں فرض کریں گے کہ جھکاؤ کا معیار آخر انخنا کے متناسب ہوتا ہے

یعنی جھکاؤ کا معیار اثر =  $\frac{1}{r}$  جہاں شہتیر کا نصف قطر انخنا سا ہے اور  $\frac{1}{r}$  کو خفاؤ کی استواریت کہتے ہیں۔

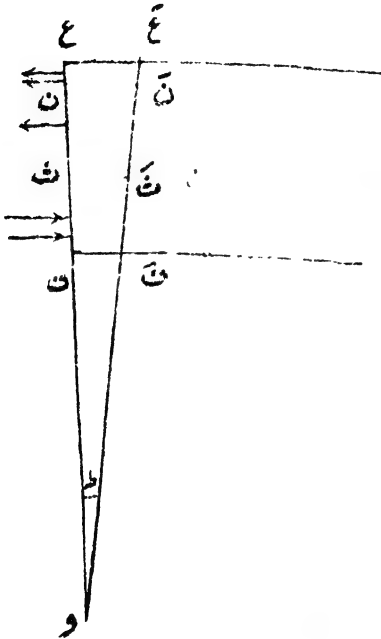
اگر وزن ڈالنے سے پہلے شہتیر کا انخنا اسی نقطہ پر رہتا تھا تو جھکاؤ کا

معیار اثر  $\frac{1}{r}$  (  $\frac{1}{r} - \frac{1}{r}$  ) ہو گا۔

یہ مفروضہ پہلے پہل برزولی اور یولر نے استعمال کیا تھا۔ اس کی تصدیق معمولی شہتیروں کی صورت میں جن کے طول ان کی تراشوں کے ابعاد کے مقابل میں بہت زیادہ ہوں تجربہ کے ذریعہ ہو چکی ہے۔ دفعہ ذیل میں چند امور کو تسلیم کر کے جن کا تسلیم کرنا درحقیقت پورے طور پر صحیح نہیں ہے۔ برزولی کے مفروضہ کا ثبوت دیا گیا ہے ۳۵۔ ایک مستطیلی شہتیر کو بغیر تناؤ کے جھکایا گیا ہے۔ ثابت کر دیا کہ کسی نقطہ پر جھکاؤ کا معیار اثر اُس نقطہ پر کے انخنا کے متناسب ہوتا ہے۔

جب ایک شہتیر کو قدرتی طور پر بالکل سیدھا تھا جھکا کر ذیل کی شکل میں لایا جاتا ہے تو ظاہر ہے کہ

اوپر کے حصے کے ریشے یعنی ع کے نزدیک کے ریشے تناؤ کی حالت میں ہونگے اور نیچے کے حصے کے ریشے جوف کے نزدیک ہیں پچکاؤ کی حالت میں ہوں گے۔ خط ث ث کو جو تناؤ اور پچکاؤ کی حالت والے ریشوں کو علیحدہ کرتا ہے تو یہی خط کہتے ہیں۔



اب ہم یہ مان لیتے ہیں اور یہاں کرنا حقیقت سے کچھ زیادہ بعید نہیں ہے کہ شہتیر کی کوئی مستوی تراش جو محور کے علی القواہم سے جھکاؤ کے بعد بھی مستوی تراش کی شکل قائم رکھتی ہے۔

فرض کرو کہ تعدیلی خط ث ث پر کے دو قریب کے نقطوں پر کے عماد ایک

دوسرے سے ور ملتے ہیں اور  $و ث = س$

فرض کرو کہ کاغذ کی سطح مستوی میں ث ث کے ع کی جانب میں کوئی ریشہ ن ن ہے۔ اگر اس ریشہ کے لئے ہک کا مقیاس پچکاؤ ہو تو اس کا تناؤ فی اکائی رقبہ  $ل = \frac{ن - ث}{ث} \times \frac{ل}{س} = \frac{(س + ل) - س}{س} \times \frac{ل}{س}$

جہاں  $ث ن = ل$ ۔

اس لئے اگر ن پر کے ریشے کی عمودی تراش کا رقبہ صف ل ہو تو اس کا

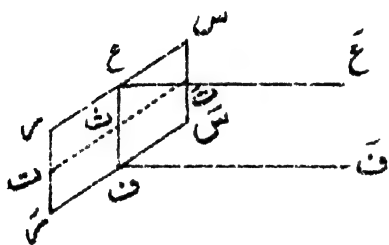
تناؤ  $ل = \frac{ل}{س} \times صف ل$ ۔

[ اگر ن، ث کے دوسری جانب واقع ہو یعنی ف کی طرف ہو تو لا منفی

ہوگا اور یہ تناؤ پچکاؤ میں بدل جاتا ہے ]

چونکہ شہتیر میں تناؤ نہیں ہے اس لئے وع پر عمود اور ریشوں کے  
تناؤں کا مجموعہ صفر ہے۔

اس لئے  $\frac{3}{4}$  مع  $1 = 0$  جبکہ جمع کا عمل 1 میں سے گزرنے والی کاغذ کی سطح پر علی القوائم تراش کے کل رقبہ 1 میں سے 1 پر پھیلایا گیا ہے۔  
اس لئے  $\frac{3}{4} \times 1 = 0$



کسی رقبہ کا مرکز نقل معلوم کرنے کے لئے جو ضابطے ہیں اُن سے ظاہر ہے کہ مثلاً اس خط پر واقع ہے جو تراش سرس میں آتا ہے مرکز نقل میں سے کاغذ کی سطح پر علی القوائم کھینچا جائے۔ لہذا اگر کاغذ کی سطح مستوی شہتیر کی مشاکل

تراش ہو تو ت کو تراش س س س کا مرکز ثقل ہونا چاہیے۔  
 خط ث ت کے گرد جو کا فذ کی سطح مستوی پر عمود وار ہرے معیار اثر لینے سے  
 ظاہر ہے کہ اس کے گرد ماحل جفت

$$\sum \frac{L}{r} \times \text{مفا} = \sum \frac{L}{r} \times \text{مفا} \times \frac{L}{r}$$

(مہربانوں کے ادھر کے ریشوں کے تناؤ نیچے کے ریشوں کے پکڑوں کے ساتھ مل کر جفت بناتے ہیں)

لیکن تراش ساس سس سر کا جمود کا معیار اثر خط ثت کے گرد  
 لا مع ہے اس کو عموماً حج سے تغیر کیا جائے گا۔



اس لئے حاصل جفت یعنی جھکاؤ کا معیار اثر  $\frac{فرما}{مجلہ}$  کے مساوی ہے جہاں لہ بک کا مقیاس بچک ہے، اس تبدیلی خط کا نصف قطر انحنائے اور مجہ شہتیر کی عمودی تراش کے جہود کا معیار اثر اس خط کے گرد ہے جو تراش کے مرکز ثقل میں سے شہتیر کی لمبائی پر علی القوائم ہے۔

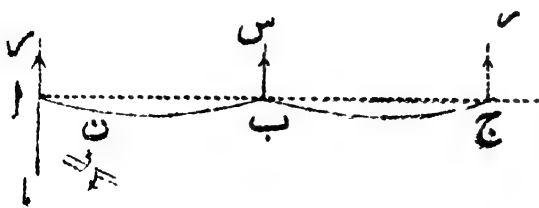
۳۲۶۔ جب شہتیر بہت ہی خفیف طور پر خاؤنڈیر ہو یعنی جب مقدار لہ مج بہت بڑی ہو تو مقدار لہ  $\frac{مجلہ}{مجر}$  کو مختصر کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{کیونکہ} \quad \frac{1}{\text{مجر}} = \pm \frac{\frac{فرما}{فرلا}}{\left\{ 1 + \left( \frac{فرما}{فرلا} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

اگر سلاخ تقریباً سیدھی ہو یعنی خط استقیم سے زیادہ متفاوت نہ ہو تو  $\frac{فرما}{فرلا}$  بہت چھوٹا ہوگا جبکہ لا کو انفا اور ما کو انتصابا ناپا جائے۔

اس صورت میں  $\frac{1}{\text{مجر}}$  کی قیمت تقریباً  $\pm \frac{فرما}{فرلا}$  ہوگی یعنی جھکاؤ کا معیار اثر  $\pm \frac{فرما}{فرلا}$  مج  $\frac{فرما}{فرلا}$  ہوگا۔ مشتبہ علامت کی تحقیق  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی علامت پر منحصر ہے۔

۳۲۷۔ مشق۔ ایک یکساں تھوڑی سی ٹرسکینے والی سلاخ ل ج کا طول ۲ فٹ ہے اس کے اس کے دو کناروں پر اور نیز



اس کے وسطی نقطہ پر سہارا لگایا ہے۔ سہارے کے تینوں مقام ایک ہی خط استقیم میں واقع ہیں، ان پر کے دباؤ معلوم کرو اور نیز سلاخ جس سخنی کی شکل میں ساکن ہے اس کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ لب کے اندر کوئی نقطہ ن ہے۔  
تب ن پر کا جھکاؤ کا معیار افرن کے بائیں طرف کے حصہ پر  $\frac{لہ}{س}$  مج

ہے جو اس سمت میں عمل کرتا ہے۔ نیز اگر ما کا محور انتصافاً نیچے کی طرف ہو  
تو ن پر فرما کی قیمت گھٹتی ہے اور اس لئے  $\frac{فرما}{وزلا}$  منفی ہے لہذا  $\frac{لہ}{س}$  تقریباً  
-  $\frac{فرما}{وزلا}$  کے مساوی ہے۔

اگر ا پر کا تعادل نہ ہو اور سلاخ کا وزن فی اکائی طول د ہو تو حصہ ن کے  
لئے ن کے گرد معیار اثر لینے سے

$$- لہ مج = \frac{فرما}{وزلا} = \frac{لہ}{س} = ن س \times لا - د لا \times \frac{لا}{س} \dots \dots (۱)$$

$$\therefore - لہ مج فرما = ن س لا - \frac{د لا^2}{۴} + د \dots \dots (۲)$$

لیکن تشاغل سے  $\frac{فرما}{وزلا} =$  جبکہ  $لا = د$

$$\therefore د = \frac{د لا^2}{۴} - ن س \frac{لا^2}{۲}$$

$$\therefore - لہ مج ما = ن س لا - \frac{د لا^2}{۲} + \left( \frac{د لا^2}{۴} - ن س \frac{لا^2}{۲} \right) \dots \dots (۳)$$

تکمل کا مستقل صفر ہے کیونکہ لا اور ما ایک ساتھ معدوم ہوتے ہیں۔  
نیز  $ما =$  جب  $لا = د$

$$\therefore = ن س لا - \frac{د لا^2}{۲} + \left( \frac{د لا^2}{۴} - ن س \frac{لا^2}{۲} \right)$$

$$\therefore ن س لا = \frac{۲}{۸} د لا - \frac{۳}{۱۶} \times کل وزن$$

نہیں = وسطی سہارے کا دباؤ =  $\frac{5}{8} \times$  کل وزن  
نہیں کی یہ قیمتیں (۱)، (۲)، (۳) میں درج کرنے سے

$$- \text{ لہجہ فرما } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \right) \dots \dots \dots (۴)$$

$$- \text{ لہجہ فرما } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \dots \dots \dots (۵)$$

$$\text{اور لہجہ فرما} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{8} - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{8} - \frac{12}{8} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{-9}{8} \right) = -\frac{9}{16}$$

(۴) سے ظاہر ہے کہ لا =  $\frac{3}{8}$  =  $\frac{3}{8}$  (ب) پر ایک مخالف خاؤ کا نقطہ ہے

نیز جھکاؤ کا معیار اثر بڑے سے بڑا ہوتا ہے جبکہ لا =  $\frac{3}{8}$  اور اس وقت جھکاؤ کا معیار اثر  $\frac{9}{16}$  سمت میں ہوگا۔ سرے ب پر جھکاؤ کا معیار اثر  $\frac{9}{16}$

مقابل سمت میں ہے، اس لئے شہتیر پہلے ب پر ٹوٹے گا۔

(۵) سے ظاہر ہے کہ صلاح کا بڑے سے بڑا جھوک اس مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{1}{4} (1 + 3) = 1 \times 3 = 3$$

ایک شہتیر کے نقاط انعطاف کو بالعموم اس کے قبضے یا موہوم جوڑ کہتے ہیں کیونکہ ان نقطوں پر جھکاؤ کے معیار اثر کی عدم موجودگی کی وجہ سے شہتیر کے تعادل میں بغیر خلل ڈالے ان نقطوں پر قبضے یا جوڑ لگائے جاسکتے ہیں۔  
۳۲۸ - دفعہ ۱۲۹ میں یہ ثابت کیا گیا تھا کہ

$$\text{بوجھ} = - \frac{\text{فرق}}{\text{جزئی زور}}$$

$$\text{اور } \text{جزئی زور} = \frac{\text{فرق}}{[\text{جھکاؤ کا معیار اثر}]}$$

اور دفعہ ۳۲۶ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ خفیف سے بچکدار شہتیروں کی صورت میں

$$\text{جھکاؤ کا معیار اثر } \infty \text{ فی } \frac{\text{فر}}{\text{ڈھال}} [ \text{ڈھال} ]$$

$$\text{اور } \text{ڈھال} = \frac{\text{فر}}{\text{فر}} [ \text{انصراف} ]$$

اس لئے بوجھ کے منحنی، جزوی زور کے منحنی اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی میں باہم اسی طرح کا ربط ہے جیسا کہ جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی ڈھال کے منحنی اور انصراف کے منحنی میں ہے۔

اس لئے ہمیں دفعہ ۳۳ کی طرح ایک مسئلہ حاصل ہوتا ہے یعنی انصراف کے منحنی کے کوئی دو ماس جس نقطہ پر قطع کرتے ہیں وہ جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کے تناظر حصہ کے مرکز ثقل کے انشعاب یا نیچے ہوتا ہے۔ ہم آسانی سے اس امر کی تصدیق دفعہ ۱۱ قبل کی مثال کی صورت میں کر سکتے ہیں۔

حصہ اب کے لئے جھکاؤ کے معیار اثر کا منحنی ہے

$$M = \frac{W}{4} \left[ \frac{13}{14} - \frac{2}{14} \right] \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{اور انصراف کا منحنی ہے } \frac{2}{14} = M = \frac{2}{14} - \frac{2}{14} + \frac{2}{14} \dots \dots \dots (2)$$

(۲ کے نقطہ (۱، ۱) پر کا ماس ہے

$$\frac{2}{14} = M = \frac{2}{14} - \left[ \frac{2}{14} + \frac{2}{14} - \frac{2}{14} \right] - \frac{2}{14}$$

یہ (۱، ۱) پر کے ماس کو قطع کرتا ہے جہاں

$$\frac{[ (1 - 1) - (1 - 1) ]}{(1 - 1) - (1 - 1)} = 1$$

نیز مسخنی (۱) کے متناظر حصہ کے مرکز ثقل کا فصل

$$\frac{\frac{K_1}{(3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2})} \times 1}{\frac{K_2}{(3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2})} \times 1} = \frac{\frac{K_1}{(3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2})} \times 1}{\frac{K_2}{(3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2})} \times 1}$$

$$\frac{[ (3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2}) - (3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2}) ]}{(3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2}) - (3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2})} = \frac{(3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2}) - (3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2})}{(3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2}) - (3 \times 10^{-2} - 3 \times 10^{-2})}$$

پس مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

## مثالیں

۱۔ ایک خفیف سے جھک جانے والے شہتیر کے سرے دو افقی سہاروں پر ساکن ہیں۔ ثابت کرو کہ ایک سرے سے فاصلہ پر انصراف ہوگا

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{(1 - \lambda)}{\lambda} \left\{ \lambda + \lambda + \lambda + \lambda \right\} \quad \text{جہاں } k \text{ انصراف کی استواریت ہے،}$$

۲۔ شہتیر کا طول ہے، و اس کا کل وزن ہے۔

۳۔ ایک یکساں پل جس کا وزن و ہے ایک ہی تختہ سے بنا ہوا ہے۔ پل کناروں کے سہاروں پر ساکن ہے۔ ایک شخص اس پل پر ایسے مقام پر کھڑا ہے جس کے فاصلے کناروں سے ۱ اور ۲ ہیں۔ ثابت کرو کہ اس مقام پر انصراف

$$\frac{(1 + 3 \times 10^{-2} + 10^{-2})}{(1 + 10^{-2})} \times 10^{-2}$$

۴۔ جہاں و اس شخص کا وزن ہے۔

۵۔ ایک چکدار سلاخ کے ایک سرے کو شنگھ کے ذریعہ اس طرح ثابت کر دیا گیا ہے کہ سلاخ کی سمت اس مقام پر افقی ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے سرے کا انصراف اس انصراف

کا ۳ ہے جو اس کے سرے پر اس کے وزن کے مساوی وزن لگا دینے سے چال ہوتا۔  
۴۔ ایک یکساں شہتیرا ب کا طول ل ہے اس کو اس کے سروں سے سہارا گیا  
ہے اور اس کے ایک نقطہ ق پر وزن و باندھا گیا ہے ل = ۱ اگر شہتیر کے وزن کو  
نظر انداز کیا جائے تو ثابت کرو کہ ل ق کی مساوات ہے

$$ل ب م = \frac{(ل - ۱)}{۶} [۱(۱ - ل) - ۱(۱ - ل) - ۱(۱ - ل)]$$

اور ق ب کی مساوات ہے

$$ل ب م = \frac{۱}{۶} [(ل - ۱)(ل - ۱) - (ل - ۱)(ل - ۱) - (ل - ۱)(ل - ۱)]$$

ثابت کرو کہ کسی نقطہ ن پر کا انصراف جبکہ بوجھ ق پر ہو مساوی ہوتا ہے ق پر کے  
انصراف کے جبکہ وہی بوجھ ن پر ہو۔

۵۔ ایک وزنی یکساں سلاخ دو سہاروں پر افقاً ساکن ہے جن میں سے ایک سہارا ایک  
سرے پر ہے۔ اگر سلاخ کے وسطی نقطہ پر جھکاؤ کا معیار اثر صفر ہو تو ثابت کرو کہ دوسرا سہارا  
اول الذکر سرے سے سلاخ کے طول کے دو تہائی فاصلہ پر ہونا چاہیے۔

۶۔ ایک کم لچکدار شہتیرا ب کا وزن و اور طول ۲ ہے اس کو سروں پر اور وسطی  
نقطہ ج پر سہارا گیا ہے۔ اگر سہاروں پر کے و باء مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ج کی گہرائی

ب کے نیچے  $\frac{۷}{۱۴}$  ہے اور یہ گہرائی اس گہرائی کا  $\frac{۷}{۱۵}$  ہے جو شہتیر کو صرف  
پر سہارنے کی صورت میں ہوتی۔

۷۔ ایک یکساں شہتیر کو اس کے تثلیث کے نقطوں ل اور ب پر سہارا گیا ہے۔

ب متوازی الافق ہے۔ ثابت کرو کہ شہتیر کے وسطی نقطہ کی ل ب کے اوپر بلندی کو  
شہتیر کے دونوں سروں کی ل ب کے نیچے گہرائی کے ساتھ نسبت ۱۹:۲۸ ہے۔

۸۔ ایک پتلی یکساں خفیف طور پر لچکدار سلاخ کا طول ۴ ہے اس کے وسطی نقطہ  
کے ساتھ وزن و بندھا ہے۔ سلاخ کو دو ایسے نقطوں پر سہارا گیا ہے جن کے وسطی نقطہ

سے فاصلے ہیں اگر سہارے کے مقاموں پر کے ماس افقی کے متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ و سلاخ کے وزن کے چھ حصے کے مساوی ہے۔

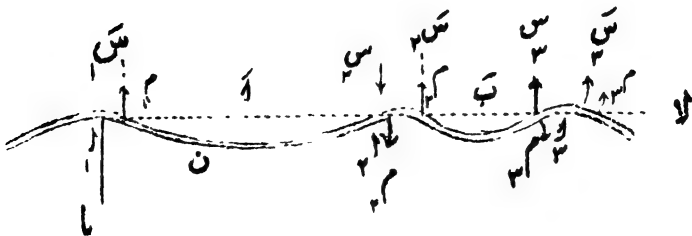
۹۔ ایک منزکز بوجھ شہتیر کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ جنماؤ کے منحنیوں کے ڈھالوں کی نسبت ۲ سے شروع کر کے  $\frac{1}{2}$  تک بدلتی ہے اور موخر الذکر قیمت اس وقت اختیار کرتی ہے جبکہ بوجھ ایک سرے سے شہتیر کے ایک تہائی طول کے فاصلہ پر ہو۔

۱۰۔ ایک ریل کا پل دو شہتیروں سے بنا ہوا ہے اور اس پر ریل کی ایک پٹری پڑی ہے سہاروں کے درمیان ہر ایک شہتیر کا طول ۴ فٹ ہے۔ ایک انجن کا کل وزن ۶۸ ٹن ہے اور یہ ۴ دھروں پر منقسم ہے جس میں سے اگلے دھرے پر ۸ ٹن وزن ہے اور باقی تینوں دھروں میں سے ہر ایک پر ۱۲ ٹن وزن ہے۔ اگلے اور باقی تینوں دھروں کے فاصلے پل کے ایک سرے سے بالترتیب ۶ فٹ، ۱۳ فٹ، ۲۱ فٹ اور ۲۹ فٹ ہیں شہتیر کا بڑے سے بڑا انصراف معلوم کرو اور بتاؤ کہ یہ کس مقام پر ہے۔

۳۲۹۔ تین معیار اثروں کے متعلق کلاسیکی ردن کی مساوات۔ اگر ایک یکساں طور پر لدے ہوئے شہتیر کے جھکاؤ کے معیار اثر سہارے کے تین مقاموں  $L_1$ ،  $L_2$ ،  $L_3$  کے گرد بالترتیب  $M_1$ ،  $M_2$ ،  $M_3$  مہوں جہاں سہارے کے مقام ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں تو ثابت کرو کہ

$$L_1 M_1 + L_2 M_2 + L_3 M_3 = (L_1 + L_2 + L_3) M$$

جہاں  $M$  شہتیر کے فی اکائی طول کا وزن ہے اور  $L_1$ ،  $L_2$  اور  $L_3$  =



فرض کرو کہ آپ کے عین دائیں جانب جڑی زور س ہے اور س اور س اور س ہے جڑی زور ہیں آپ کے عین بائیں اور دائیں جانب۔

اِس کو مبداء فرض کرو اور اِس اِس کو لاکا محور مانو اور فرض کرو کہ ماکا محور  
انتصافاً نیچے کی طرف کھینچا گیا ہے۔

تب ۱۰۰ کے اندر کسی نقطہ کے لئے جس کا فاصلہ ۱۰ سے لا ہو  
اسی ن کے بائیں طرف کے حصے کے لئے معیار اختیار لینے سے دفعہ ۳۲۷  
کے مطابق حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{مجر فرما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{زجر}}{\text{س}} = \text{س لا} - \frac{\text{و لا}}{2} - \text{م} \dots \dots (1)$$

نیز ۱۰ کے گرو میاں اثر لینے سے ہمیں حصہ ۱۰ کے لئے حاصل ہوتا ہے

مس =  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{2}$  - س، و + م " " " " " (۲)  
س کو ساقط کر دینے سے

$$(3) \dots \dots \dots \frac{U}{J} \int_0^1 - \left( \frac{U}{J} - 1 \right) \int_0^1 - (U - 1) \frac{1}{J} = \frac{U^2}{2J} - \frac{U^2}{2J} = 0$$

اس لئے درج فرما  $\frac{1}{2} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \dots$  (۳)

اور۔۔۔ مجہا =  $\frac{1}{2} \left( \frac{3}{12} - \frac{3}{4} \right) - \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right) - \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) + \frac{3}{4}$  ج لا + د  
اب ما = . جبکہ لا = یا و - اس لئے د = ۰ اور

$$(5) \quad \dots \dots \dots - \frac{1}{22} - \frac{1}{4} \mu + \frac{1}{3} \mu = 7$$

اس لئے (۴) سے

اس سے (۴) سے

$$[- \text{لہجہ فزیا}] \text{ کی قیمت نقطہ } 1 = \text{ج} = \frac{1}{3} \text{ م} + \frac{1}{4} \text{ م} - \frac{1}{2} \text{ م} = \frac{2}{12} - \frac{3}{12} = -\frac{1}{12}$$

(۶) - - -



اور [لہجہ فریلا] کی قیمت نقطہ لہ پر  $\frac{۲}{۱۲} \frac{۱}{۳} - (م + مہ) \frac{۱}{۲} + ج$

$$= \frac{۲}{۳۳} \frac{۱}{۳} - م \frac{۱}{۶} - مہ \frac{۱}{۳} \dots \dots (۷)$$

اسی طرح حصہ لہ لہ کے تعادل کے لئے (۶) کے نمونہ کا نتیجہ حسب ذیل حاصل ہوگا

$$[لہجہ فریلا] کی قیمت نقطہ لہ پر  $= مہ \frac{۱}{۳} + م \frac{۱}{۶} - مہ \frac{۱}{۳} - م \frac{۱}{۶} \dots \dots (۸)$$$

چونکہ نقطہ لہ پر سمت میں تبدیلی واقع نہیں ہوتی اس لئے نتائج (۷) اور (۸) ایک ہی ہونے چاہئیں ان کو مساوی رکھنے سے

$$م \frac{۱}{۶} + مہ \frac{۱}{۳} = مہ \frac{۱}{۳} + م \frac{۱}{۶} \dots \dots (۹)$$

[یہ بات قابل غور ہے کہ دفعہ ہذا میں م، مہ اور مہ کی مثبت سمت وہ نہیں ہے جو کہ دفعہ

۱۲۹ اور ۱۳۲ میں ہے بلکہ اس کے مقابل ہے]

کسی سہارے پر کے تعادل کو جھکاؤ کے معیار اثروں م، مہ، مہ کی رقوم میں بیان کرنا۔ لہ لہ کے تعادل سے

$$س - سہ = مہ \frac{۱}{۳}$$

$$\text{پس (۲) سے } س - سہ = مہ \frac{۱}{۳} - مہ \frac{۱}{۳}$$

حصہ لہ لہ کے لئے (۲) کے نمونے کی مساوات سے

$$س - سہ = مہ \frac{۱}{۳} + مہ \frac{۱}{۳}$$

$$\text{اس لئے سہارے لہ پر کا تعادل } س - سہ = س - سہ = مہ \frac{۱}{۳} + مہ \frac{۱}{۳} - مہ \frac{۱}{۳} - مہ \frac{۱}{۳}$$

۳۳۔ اگر نقطہ لم، نقاط لم اور لم کی ہمواری پر ہونے کی بجائے ان سے بالترتیب لم اور لم طول نیچے ہو تو آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ تین معیار اثروں میں رشتہ حسب ذیل ہے

$$\begin{aligned} \text{م} ۱ + ۲ \text{م} ۲ + ۳ \text{م} ۳ &= \text{م} ۱ \text{ب} + (\text{۱} + ۲ \text{ب}) \frac{\text{د}}{\text{م}} - (\text{۱} + ۲ \text{ب}) \text{م} ۲ - (\frac{\text{۱}}{\text{م}} + \frac{\text{۲}}{\text{ب}}) \text{م} ۳ \\ \text{۳۳۔ مشق ۱۔} &\text{فرض کرو کہ دفعہ ۳۲۹ کی مشق میں شہتیر کے سرے لم اور لم ہیں۔} \\ &\text{یعنی شہتیر سہاروں لم، لم، لم پر قائم ہے جہاں لم لم اور لم لم = ب} \\ &\text{تب م} ۱ = \text{م} ۲ = \text{م} ۳ \quad \text{اور م} ۲ = \frac{\text{د}}{\text{م}} - (\text{۱} + ۲ \text{ب} + \text{ب}) \\ &\text{جہاں شہتیر کافی اکائی طول وزن ہے۔} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{فرض کرو کہ لم، لم، لم پر تعامل سہ، سہ، سہ ہیں۔ لم کے گرد معیار اثر لینے سے} \\ &\text{م} ۲ = \frac{\text{د}}{\text{م}} - \frac{\text{۱}}{\text{م}} - \frac{\text{۲}}{\text{ب}} - \frac{\text{۳}}{\text{ب}} \\ &\text{اور اس لئے سہ} = \frac{\text{د}}{\text{م}} - \frac{\text{۱}}{\text{م}} - \frac{\text{۲}}{\text{ب}} - \frac{\text{۳}}{\text{ب}} \\ &\text{اور اسی طرح سے سہ} = \frac{\text{د}}{\text{م}} - \frac{\text{۱}}{\text{م}} - \frac{\text{۲}}{\text{ب}} - \frac{\text{۳}}{\text{ب}} \\ &\text{اور سہ} = \frac{\text{د}}{\text{م}} - \frac{\text{۱}}{\text{م}} - \frac{\text{۲}}{\text{ب}} - \frac{\text{۳}}{\text{ب}} \end{aligned}$$

فرض کرو کہ لم، ب، تب سہ منفی ہوگا اگر  
 $\text{۱} + ۲ \text{ب} + ۳ \text{ب} < \frac{\text{د}}{\text{م}}$  یعنی اگر  $\frac{\text{د}}{\text{م}} < (۱ + ۳ + ۱)$

یعنی اگر  $\frac{\text{د}}{\text{م}} < ۴$  تقریباً  
 اس صورت میں سرے لم کو سہارے کے ساتھ مس کرتا ہوا رکھنے کے لئے اس پر مزید وزن

رکھنا پڑیگا۔

نیز جھکاؤ کا معیار اثر م کسی نقطہ پر جو اسے فاصلہ لا پر ہو

$$= \frac{W_1}{2} - \frac{W_2}{2} = \frac{W_1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{W_2}{2} - \frac{W_1}{2} = \frac{W_2}{2}$$

اس لئے یہ بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ لا =  $\frac{3}{4}$  اور اس مقام پر جھکاؤ

کے معیار اثر کی قیمت

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{3}{4} W_2 + W_1 - W_2 \right) \dots \dots (1)$$

نیز ل پر جھکاؤ کا معیار اثر = م =  $\frac{1}{2} (W_1 - W_2 + W_2)$

پس لم پر کا معیار اثر (۱) سے بڑا ہوگا اگر

$$14 W_2 (W_1 + W_2) < (3 W_2 + W_1 - W_2)$$

$$\text{یعنی اگر } (14 W_2 + W_1 - W_2) > 12 W_2$$

$$\text{یعنی اگر } W_1 - W_2 > (11 - 12) W_2 > 13 W_2 \times (13.34)$$

$$\text{یسی اگر } (W_1 - W_2) > (13.34) \times W_2 < 0 \text{ جو امر صحیح ہے۔}$$

پس اگر شہتیر ٹوٹے تو ہیں تمام لم پر ٹوٹے گا۔

(مذکورہ بالا میں سب سب اس کے لئے جو نتائج حاصل کئے گئے ہیں ان کی

تصدیق لا اور ب کی مختلف قیمتوں کے لئے تجربہ سے ہو سکتی ہے۔ اس طرح ہم دفعہ ۳۲ کے مفروضہ کی تصدیق کر سکتے ہیں)

مشتق ۲ — ایک یکساں سلاخ لم کو سبوں پر اور دو اور مقاموں لم لم پر جو شہتیر کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں سہارا گیا ہے۔ سہارے کے سب مقام ایک ہی ہمواری پر واقع ہیں۔ ان پر دباؤ اور نیز ان پر وزن کی رقم میں جھکاؤ کے معیار اثر معلوم کرو۔





$$م_۱ ب_۱ + م_۲ ب_۲ + م_۳ ب_۳ = ۰ \quad (۳)$$

(۱)، (۲) اور (۳) کو حل کرنے سے

$$م_۱ = \frac{۱}{۲۴} (۲ ب_۱ + ب_۲ - ب_۳) = \frac{۱}{۲۴} (۱ + ب_۱) (۲ - ۱ - ۱)$$

$$م_۲ = \frac{۱}{۱۲} (۱ - ۲ ب_۱ + ب_۲)$$

$$م_۳ = \frac{۱}{۲۴} (۲ ب_۱ + ب_۲ - ۱) = \frac{۱}{۲۴} (۱ + ب_۱) (۲ - ۱ - ۱)$$

نیز حصہ ا ب کے لئے ب کے گرد معیار اثر لینے سے

$$م_۱ = \frac{۱}{۲} - م_۲ - م_۳$$

$$\text{اس لئے} \quad م_۱ = \frac{۱}{۸} [۲ - ۲ ب_۱ + ۲ ب_۲] = \frac{۱}{۸} [۲ - ۲ ب_۱]$$

$$\text{نیز اسی طرح} \quad م_۲ = \frac{۱}{۸} [۲ - ۲ ب_۱ + ۲ ب_۲]$$

$$\therefore م_۱ = \frac{۱}{۸} (۲ - ۲ ب_۱) = \frac{۱}{۸} (۲ - ۲ ب_۱) = \frac{۱}{۸} (۲ - ۲ ب_۱) \times \text{سلاخ کا کل وزن}$$

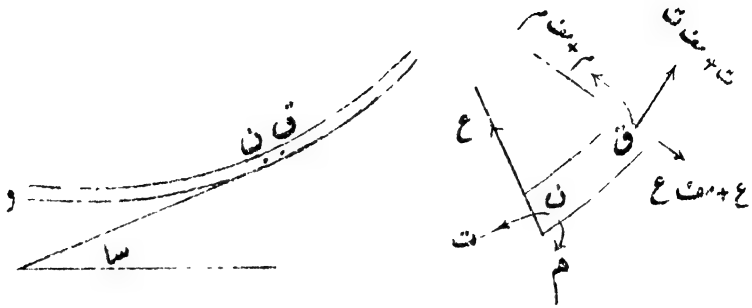
اگر ا کے محور کو انتہا با نیچے کھینچا جائے تو ا سے فاصلہ لا پر کے نقطہ ن پر کی تراز

کے گرد معیار اثر لینے سے ہیں حصہ ا ب کے لئے حاصل ہوتا ہے۔ لہٰذا  $\frac{۱}{۲۴} = م_۱$ ۔

۲۔ لا ۲۔ قیمتیں درج کرنے سے ہیں منحنی ا ب کی مساوات حاصل ہو جاتی ہے

نیز نقطہ ب پر منحنی کا میلان افق کے ساتھ معلوم ہو جاتا ہے۔

۳۔ ایک سلاخ کو ایک ہی سطح مستوی میں موڑا گیا ہے اس کے متبادل کی عام شرائط۔



فرض کرو کہ  $ن ق$  سلاخ کا کوئی جزو ہے اور  $ون = س$  جہاں  $و$  کوئی ثابت نقطہ ہے اور  $ن ق = مع$  س، نیز فرض کرو کہ  $ن$  اور  $ق$  پر کے ماس محور لاس کے ساتھ زاویہ  $سا$  اور  $سا + مع$  سا بنائے تے ہیں۔

فرض کرو کہ  $ن$  پر تناؤ  $ت$  اور  $ق$  پر تناؤ  $ت + مع$  ہے۔  
فرض کرو کہ جزو  $ن ق$  کے نقطہ  $ن$  پر کا جزوی زور  $ع$  ہے جسے عماد کی اندرونی جانب کی سمت میں ناپا گیا ہے اور بناؤ علیہ  $ق$  پر جزوی زور  $ع + مع$  ہے جسے  $ق$  پر کے عماد کی سمت میں باہر کی طرف ناپا گیا ہے۔

فرض کرو کہ جزو  $ن ق$  کے نقطہ  $ن$  پر ہکاؤ کا معیار اثر  $م$  ہے اور نقطہ  $ق$  پر  $م + مع$  ہے اور ان کی سمتیں شکل میں دکھائی گئی ہیں۔  
فرض کرو کہ جزو  $ن ق$  پر ماسی اور عمادی قوتیں  $نی$  اکائی طول اور  $گ$  ہیں۔  $ن$  پر کے ماس اور عمادی سمت میں تحلیل کرنے سے

$ت - (ت + مع) = جم مع سا + (ع + مع) جب مع سا + ون مع س =$   
اور  $ع - (ع + مع) = جم مع سا + (ت + مع) جب مع سا + گ مع س =$   
انتہا میں جب مع سا لا انتہا چھوٹا ہو تو ان مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فرت}{فرس} + \frac{ع}{س} + ف = 0 \quad (1)$$

(جہاں  $س$  نصف قطر انحناء ہے)

$$\text{فرس} - \frac{\text{ت}}{\text{ر}} - \text{گی} = \dots \dots \dots (۲)$$

نیز جزدن ق کے لئے ن۔ کے گرد معیار اثر لینے سے

$$\text{م۔} - (\text{م} + \text{مف م}) + (\text{ع} + \text{مف ع}) - \text{مف س} - \text{گ مف س} \times \frac{1}{2} \text{ مف س} = \dots$$

انتہا میں اس سے جاہل ہوتا ہے

$$\text{فرس} - \frac{\text{فرم}}{\text{ع}} = \dots \dots \dots (۳)$$

یہ مساوات اس امر کو ظاہر کرتی ہے کہ کسی نقطہ پر بڑی زور قوس کے لحاظ سے جب کاؤ سکے، معیار اثر کا تغیر کر رہے۔

اگر سلاخ کا نقطہ ن پر نصف قطر اخٹا ہو جبکہ سلاخ پر کوئی دباؤ نہ ہو تو ہمیں یہ مزد مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{م} = \text{ک} \left[ \frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{سہا}} \right] \dots \dots \dots (۴)$$

جہاں ک سلاخ کے خاؤ کی استواریت ہے۔

ان چار مساواتوں سے ت، ع، م اور سلاخ کے منحنی کی مساوات معلوم ہوتی ہے۔

## مثالیں

ایک جکساں خفیف طور پر پچکدار سلاخ کا طول ۱۰ + ب ہے، یہ ایک متوازی الاضلاعی تین سہاروں پر قائم ہے یہ سہارے سلاخ کے سروں (ا) اور ب پر اور نیز ایک ج پر جس کا فاصلہ ا سے ۱ ہے واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ سلاخ کے انحراف کے نقطہ ٹر سر حصوں ا ج اور ج ب میں واقع ہیں اور ایسے ہیں کہ

$$\frac{1}{2} \times \text{ج ب} = \frac{1}{2} \times \text{ج ا} = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ب} + \frac{1}{2} \text{ب} \right)$$



۲۔ ایک شہتیر پر جس کا طول ۴۰ فٹ ہے ۲ ٹن فی فٹ طول کا وزن ہے اس شہتیر کو ایک سرے سے ۸ فٹ کے فاصلے پر ایک ستون پر سہارا گیا ہے اور اس کا دوسرا سر اینٹوں کے ایک پشتہ پر سہاروں پر جھکاؤ کے معیار اثر معلوم کرو اور پیمانہ کے مطابق جزی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو۔  
[۲۲۴ اور ۲۳ فٹ ن]

۳۔ ایک یکساں گاڑا آب کا وزن و اور طول ل ہے۔ اس کا ایک سر (۱) ایک پشتہ کے اندر اس طرح مدفون ہے کہ یہاں گاڑی کی سمت متوازی الافقی ہے اور دوسرا سر (۲) ل میں سے گزرنے والے افقی خط میں واقع ہے ثابت کرو کہ (۱) پر جھکاؤ کا معیار اثر اور

جزی زور بالترتیب  $\frac{1}{8}$  اور  $\frac{5}{8}$  ہیں۔ تمام شہتیر کے لئے جزی زور اور جھکاؤ کے معیار اثر کے منحنی کھینچو اور ثابت کرو کہ جن نقطوں پر جھکاؤ کا معیار اثر صفر یا بڑے سے بڑا ہے ان کے فاصلے ل سے  $\frac{1}{4}$  اور  $\frac{5}{8}$  ہیں۔

ثابت کرو کہ شہتیر جس شکل میں ساکن ہے اس کی مساوات ہے  $۴۸$  لہ مج مال = و  
لا (۱ - لا) (۳ ل - لا) (۵۲ - لا)

۴۔ ایک سلاح آب کا طول ل ہے۔ اس کے نقطہ ق (لق = ل) پر وزن و رکھا گیا ہے اور شہتیر کے وزن کو نظر انداز کیا گیا ہے۔ اگر سروں کو متوازی الافقی محصل میں ساکن رکھا جائے تو ثابت کرو کہ لق کی مساوات ہے

$$\text{لہجہ} = \frac{و(ل - ل)}{۶ل} \quad \text{لا} \quad [۳ل - ل - ۲لا - ل - لا]$$

اور بق کی مساوات ہے لہجہ =  $\frac{د}{۶ل} (ل - لا) (۳ل - لا - ۲لا - ل - لا)$

۵۔ ایک نحیف طور پر مڑ سکنے والی سلاح کا طول ۲ ل ہے، اس کے ایک سرے کو متوازی الافقی محل میں ثابت کیا گیا ہے۔ ایک سہارے کو سلاح کے وسطی نقطہ کے نیچے اس طرح رکھا گیا ہے کہ آزاد سر ثابت سر سے کی ہمواری پر ہو ثابت کرو کہ وسطی نقطہ کی اونچائی سرے



کی وجہ سے بڑے سے بڑا باؤ جو پیدا ہوتا ہے وہ  $\frac{3}{4}$  حصہ ہے جہاں دگاؤ کی

گہرائی ہے اور لحب معمول نیگ کا مقیاس بچک ہے۔

۱۔ ایک مسلسل شہیر کی تراشیں یکساں ہے اور یہ یکساں ہمواری کے چار سہاروں پر قائم ہے جن سے شہیر ۱۰۰ فٹ کے تین مساوی فصلوں میں منقسم ہو جاتا ہے۔ گاہڑ کا وزن ۲ ٹن فی فٹ ہے تمام گاہڑ کے لئے پیمانہ کے مطابق جھکاؤ کے معیار اثر کا معنی کھینچو اور ہر ایک سہارے پر کا دباؤ محسوب کرو۔

(۲۲۰، ۲۲۰، ۲۲۰، ۸۰، ۲ ٹن وزن)

۱۔ ایک درنی نچلے اور سلاخ پائے اسٹور سہاروں پر یونیک ہی افقی خط میں واقع ہیں سہارے جوئی ہے۔ ان چار سہاروں میں سے سلاخ کے سروں پر واقع ہیں اور دو ان سروں سے متساوی الفاصلہ سہاروں پر۔ جب سلاخ اپنے ذریعہ کے ذریعہ دھکے دیا جائے تو سہاروں پر کے دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ سلاخ کا دباؤ سروں پر کے سہاروں پر معدوم ہو جائے گا جبکہ کسی اور درنی سہارے کا قریب سے لے کر سلاخ سے خاصہ سلاخ سے گزرنے سے تقریباً ۲۱۴ گنا سے کم ہو۔

۲۔ ایک ایکسٹنڈر ایک ہی افقی خط میں چار سہاروں پر قائم ہے۔ جب سلاخ کے سروں پر دھکے دیے جائیں تو سہاروں پر کے دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ سلاخ کا دباؤ سروں پر کے سہاروں پر معدوم ہو جائے گا جبکہ کسی اور درنی سہارے کا قریب سے لے کر سلاخ سے خاصہ سلاخ سے گزرنے سے تقریباً ۲۱۴ گنا سے کم ہو۔

۳۔ ایک ایکسٹنڈر (جس کا وزن ۲ ٹن ۱۶ اور خاؤ کی انتہا ۱۱ کلو گرام ہے) کو اس کے دو سروں پر اور دھکے پر اور ہر دو نقاط تثلث ب اور ج پر اس طرح سہارا دیا گیا ہے کہ سب سہاروں پر دباؤ متساوی ہیں اور سلاخ کو ۱ اور ۲ پر اس طرح ساکن کیا گیا ہے کہ ان نقطوں پر کے محاس متوازی الافقی ہیں۔ ثابت کرو کہ ۱ اور ۲

۱۔ جب اور ج کے اوپر  $\frac{2}{3}$  حصہ ہے اور ۱ جب اور ج کے وسطی نقطے

انتظام کے نقطے ہیں اور ب اور ج پر اپنا بغیر تبدیل علامت معدوم ہو جاتا ہے۔

۱۴۔ ایک وزنی یکساں خفیف طور پر پکڑا ر سلاخ یا پنج سہاروں کے مقاموں پر جو سب کے سب ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں ساکن ہے۔ دو سہارے سلاخ کے سروں پر واقع ہیں ایک سہارا وسطی نقطہ پر ہے اور دو وسطی نقطہ اور سروں کے درمیانی فاصلہ کی تنصیف کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ سہاروں کے نقاط پر کے دباؤ نسبت ۱۱:۲۶:۳۲ میں ہیں۔

نیز ثابت کرو کہ مرکز پر جھکاؤ کا معیار اثر  $\frac{1}{54}$  دل ہے اور اس کے قریب کے سہاروں کے مقاموں پر جھکاؤ کا معیار اثر  $\frac{3}{112}$  دل ہے جہاں و سلاخ کا وزن ہے اور  $\frac{1}{112}$  سلاخ کا طول ہے۔

۱۵۔ ایک تار جس کی تراش یکساں اور مستدیر ہے اور جو ابتداءً سیدھا تھا سروں پر کے دو سہاروں پر ساکن ہے ثابت کرو کہ اگر کسی تراش پر ریشوں کا بڑے سے بڑا تناؤ ت ہو تو جھکاؤ کا جفت  $\frac{1}{112}$  ت ہوگا اور نیز اگر ۲ سہاروں کے مقاموں کا درمیانی فاصلہ ہو تو تار کے مرکز سے فاصلہ لا پر تناؤ

$$ت = \frac{2t_1 - t_2}{4r}$$

ہوگا جہاں و اسی کثافت کے ایسے تار کا وزن ہے جس کی تراش کا رقبہ اکائی ہے۔

۱۶۔ ایک یکساں خفیف سی پکڑا ر سلاخ کا وزن و ہے یہ سلاخ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا وسطی نقطہ ایک سہارے کے مقام پر ہے۔ اس کے سروں کے ساتھ ایک سی وزنی و باندھی گئی ہے جو زنجیر کی شکل میں ٹنگ رہی ہے ثابت کرو کہ سلاخ کے سروں پر

$$\text{انفرات نسبت } 1 + \frac{4}{3} : \frac{9}{5}$$

میں برہ جائیگا۔

۱۷۔ ایک تین قبضوں والے محراب کے پایوں اور چوٹی پر ایک ایک قبضہ ہے اس کی شکل نصف دائرہ کی ہے محراب کے پایوں کا درمیانی فاصلہ نصف اور چوٹی کی بلندی پایوں سے ۲۵ فٹ ہے۔ اس محراب کے دائیں نصف پر افقاً یکساں طور پر تقسیم کیا ہوا

۲۵۔ ٹین کا وزن ہے۔ بتاؤ کہ محراب کے دو نصف حصوں پر جھکاؤ کے معیار اثر کے مستثنیٰ کس طرح کیجئے چاہئیں۔

۱۸۔ ایک فرش پر بہت سی مسادی، انفصل بیخیں ایک خط مستقیم میں گاڑی گئی ہیں درہر درہر متشکل میخوں کا درمیانی فاصلہ اسے اور ایک بتلی یکساں سلاح کو جو قدرتی طور پر سیدھی ہے ان کے درمیان اندر اور باہر موڑا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سلاح اور متواتر میخوں کے درمیان دباؤ سما، سما، ... ہوں تو

س<sub>۱</sub> - ۲ س<sub>۱</sub> + س<sub>۱۰</sub> = ۲۸ لہج ج ۱ - ۳ جہاں ج میخ کی موٹائی ہے ۱ لہجینگ کا مقیاس لچک ہے اور مجہ سلاح کی عمودی تراش کے رقبہ کا تراش کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط کے رد و جوہد کا معیار اثر ہے۔

۱۹۔ ایک یکساں طور پر وزنی خفیف سی لچکدار سلاح ۱ ب کا طول ۲ ج ہے تین سہاروں پر ساکن ہے۔ ثابت کرو کہ سلاح قومی ترین ہوگی یعنی اس کے ہر مقام پر ٹوٹنے کا امکان کم سے کم ہوگا اگر ایک سہارے کو مرکز پر رکھا جائے اور باقی دو سہاروں کو مرکز سے فاصلوں  $\frac{۶۷}{۵}$  - ۶ ج پر رکھا جائے۔

۲۰۔ ایک آسانی سے ٹوٹ جانے والا مستند بر حلقہ زمین پر اس طرح ساکن ہونے کے اس کی سطح انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ حلقہ کے وزن کی وجہ سے ٹوٹنے کا سیار اثر جس مقام پر بڑے سے بڑا ہے اُس کا زاویہ فاصلہ اس سے ط ہے جہاں س<sub>۱</sub> ط = ۰۔

۳۳۔ ایک سلاح یا تار کو جھکانے میں دباؤ کے جھڑوں کا کام۔

فرض کرو کہ ن ن سلاح کی قوس مفت س ہے اور اسکے آخری جھکے ہوئے محل میں سروں پر کے مما سوں کے درمیان زاویہ سا بنتا ہے۔ لہذا ن پر دباؤ کا جھٹ =  $\frac{لہج}{مفت س}$  سا جہاں س نصف قطر انحناء ہے۔

ابتدائی سیدھی شکل اور آخری جھکی ہوئی شکل کے درمیان کسی محل میں فرض کرو

کہ اس قوس مفت س کے سرور پر کے ماسوں کے درمیان زاویہ فہ بنتا ہے  
لہذا متناظر دباؤ کا جفت  $\frac{\text{لہ جج}}{\text{مفت س}} \times \text{فہ ہوگا۔}$

اب اگر فہ بڑھ کر فہ + مفت فہ ہو جائے تو اس جفت کے خلاف جو کام

$$\text{کیا گیا وہ} = \frac{\text{لہ جج}}{\text{مفت س}} \times \text{فہ} \times \text{مفت فہ} \quad [\text{دفعہ ۹۷}]$$

پس کل کام جو اس قوس پر ہوا جبکہ فہ صفر سے بڑھ کر سا ہو جائے

$$= \text{کل} \frac{\text{لہ جج}}{\text{مفت س}} \times \text{فہ فر فہ} = \frac{1}{2} \frac{\text{لہ جج}}{\text{مفت س}} \times \text{سا}^2 = \frac{1}{2} \frac{\text{لہ جج}}{\text{مفت س}}$$

پس سلاخ پر جو کل کام ہوا وہ  $= \frac{1}{2} \frac{\text{لہ جج}}{\text{مفت س}}$

یہاں تیس تکمل پورے طول پر کرنا چاہیئے۔

اگر سلاخ ابتدا سے سیدھی نہ ہوتی بلکہ اس کا انحنان پر  $\frac{1}{2}$  ہوتا

$$\text{جہاں} \frac{1}{\text{مفت س}} = \frac{\text{سا}}{\text{مفت س}}$$

تو دباؤ کا جفت  $= \frac{\text{لہ جج}}{\text{مفت س}} (\text{فہ} - \text{سا})$

اور کل کام  $= \text{کل} \left[ \frac{\text{لہ جج}}{\text{مفت س}} (\text{فہ} - \text{سا}) \right]$

$$= \text{کل} \frac{\text{لہ جج}}{\text{مفت س}} [\text{سا} - \text{سا}] = \frac{1}{2} \frac{\text{لہ جج}}{\text{مفت س}} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{فر س}$$

مثالیں

۱۔ طول ۱ کی ایک سلاخ کی شکل زنجیرہ کی ہے جس کا مہبل ۱ ہے اور سلاخ کا ایک سر

اس پر ہے اس سلاح کو موڑ کر نصف قطر کے ایک دائرے کے قوس کی شکل میں لایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ دباؤ کے جفت کے خلاف جو کام کرنا پڑا ہے وہ  $\frac{ک}{۱۱۹} [۱۰ - \pi ۳]$  ہے جہاں ک سلاح کے ہر ایک نقطہ پر خماد کی استواریت کی قدر ہے۔

$$\text{زنجیر کے لئے } س = ۱ \text{ مس سا جس سے } ۱ = \frac{\text{فرس}}{\text{فرسا}} = \text{قطر}^۲ \text{ سا} = \frac{س^۲ + س^۲}{۱}$$

نیز  $س = ۱$

$$\therefore \text{کام جو کرنا پڑا وہ} = \frac{ک}{۲} \int_0^1 \left[ \frac{۱}{س + ۲} - \frac{۱}{۲} \right] فرس$$

$$= \frac{ک}{۱۲} \int_0^{\pi} \text{قطر}^۲ \text{ سا} - ۲ + \text{جم}^۲ \text{ سا} [ فرسا$$

$$س = ۱ \text{ مس سا رکھنے سے}$$

$$= \frac{ک}{۱۲} [ \text{مس سا} - \frac{س^۳}{۲} + \frac{۱}{۴} \text{ جب } ۲ \text{ سا} ]$$

$$= \frac{ک}{۱۱۹} (۱۰ - \pi ۳)$$

۲۔ ایک یکساں سلاح جس کا طول ۱۲ اور وزن وہ ہے ایک چکنے افقی میز پر بڑی ہے۔ سلاح کو اس کی وسطی ترانش پر قوت لگا کر اٹھایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جب اس کے سر سے میز پر سے عین اٹھنے کو ہوں تو اس کے مرکز کی اونچائی سردوں کے اوپر  $\frac{۱۱۹}{۳}$  ہوگی۔

$$\text{اور جو کام سر انجام پائیگا وہ} = \frac{۲}{۳۰} \frac{۱}{۲۰} \text{ ہوگا۔}$$

۳۔ ایک یکساں وزنی سلاح جس کا طول ۱ اور وزن وہ ہے ابتداءً سیدھی ہے اور اس کو اس کے سردوں پر سہارا گیا ہے سلاح اپنے وزن کے زیر عمل جھک جاتی ہے۔

$$\text{ثابت کرو کہ اس کو جھکانے میں جاذبہ ارض نے} \frac{۱}{۳۰} \frac{۱}{۲۰} \text{ کام کیا ہے۔}$$

۴۔ ایک سیدھے تار کو جس کا طول  $۱\pi ۲$  ہے ایک پیہ کے کنارے کے گرد موڑا گیا ہے اگر پیہ کا نصف قطر ۱ ہو تو ثابت کرو کہ جھکانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ  $\frac{\pi}{2}$  ہے۔  
 ۵۔ ایک تار کو جس کا طول ۲ ہے ایک زنجیرہ کی شکل میں موڑا گیا ہے۔ زنجیرہ کا سبیل ج ہے۔ ثابت کرو کہ موڑنے میں

$$\frac{\pi}{2} \left( \text{مس} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \text{ کام کرنا پڑتا ہے}$$

۶۔ ایک وزنی نہخیت طور پر لچکا ہوا تار کے ایک سرے کو جو ایک ربع دائرہ کی شکل کا ہے ایک انتہائی دیوار میں اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ تار کی سطح مستوی انتصابی ہے اور ثابت سرے پر تار کا ماس افق کے متوازی ہے۔ یہ فرض کر کے کہ کسی نقطہ پر انحناء کی تبدیلی اس نقطہ پر جھکانے والے جفت کے معیار اثر کے تناسب سے ثابت کرو کہ آزاد سرے پر افقی انحراف  $\frac{\pi}{8}$  ہے جہاں کہ انحناء کی استواریت ہے، تار کے اکائی

طول کا وزن ہے اور ۱ دائرہ کا نصف قطر ہے۔

۷۔ ایک یکساں سخت تار کا وزن  $\pi$  و ۱، اور عماد کی استواریت ک ہے۔ اس کی قدرتی شکل ایک نصف دائرہ کی ہے جس کا نصف قطر ۱ ہے۔ اس کو ایک انتصابی سطح مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کے سرے ایک افقی میز پر واقع ہیں۔ ثابت کرو کہ تار جو شکل اختیار کرتا ہے اس کی ذاتی مساوات تقریباً یہ ہے

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \pi^3 - \frac{1}{2} \pi^4 + \dots$$

جہاں  $s$  کو بلند ترین مقام سے ناپا گیا ہے۔

۸۔ ایک سخت تار کی ابتدائی شکل نصف دائرہ ہے جس کا نصف قطر ۱ ہے۔ اس کو انتصابی مستوی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ سرے افقی میز پر ہیں ثابت کرو کہ منحنی کی ذاتی

$$\text{مساوات تقریباً یہ ہے } s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \pi^3 - \frac{1}{2} \pi^4 + \dots$$

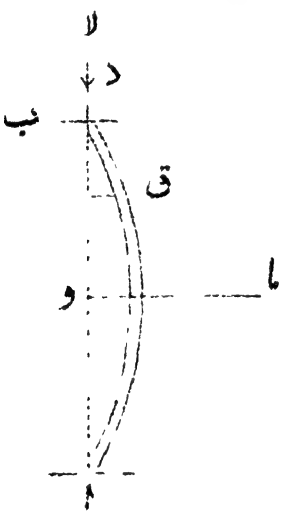


جہاں و فی اکائی قوس وزن ہے ک خاؤ کی استواریت اور یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ  $\frac{۳۱}{۳۳}$  بہت چھوٹی مقدار ہے۔

۳۳۔ لمبے ستونوں کا جھکاؤ۔

فرض کرو کہ ایک ستون یا فشار بند سلاح ایسی ہے کہ اس کا طول اس کی تراش کے ابعاد کے مقابلہ میں بہت بڑا ہے۔ نیز ستون یکساں طاقت کا ہے اور ابتداءً سیدھا ہے۔

اس کو سیدھا کھڑا کیا گیا ہے اور اس کے اوپر کے سرے پر دباؤ د ڈالا گیا ہے



یہ فرض کر کے کہ انصاف بہت چھوٹا ہے ستون کی شکل معلوم کرنا مقصود ہے۔

ستون کے زمین والے سرے اور دباؤ کے نقطہ عمل کے درمیان وسطی نقطہ کو مبدأ فرض کرو اور و ما اور و لا کو بالترتیب افقی اور متعصبی محور فرض کرو۔

اگر ستون کا وزن دباؤ د کے متقابل میں چھوٹا ہو تو تعادل کی مساوات ہے

$$\text{لہ مج} \frac{۲۱}{۲۳} = \frac{\text{لہ سر}}{۳} = د \times م$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{۲۱}{۲۳} = \frac{د}{۳} \times م$$

$$۱ = \text{اجم} [لا] \sqrt{\frac{د}{۳}} + \text{ب جب} [لا] \sqrt{\frac{د}{۳}} \quad (۱)$$

جہاں ۱ اور ب اختیاری مستقل ہیں۔

تشاکل سے ظاہر ہے کہ  $\frac{۲۱}{۲۳}$  = جبکہ لا = اس لئے ب = ۰

اب فرض کرو کہ ستون کے سرے گول کر دئے گئے ہیں تاکہ سرور پر کے  
ماس کوئی سی سمت اختیار کر سکتے ہیں، لیکن چونکہ سرور پر کوئی جفت کام نہیں  
کر رہا ہے اس لئے  $\frac{L}{2}$  اور بناءً علیہ  $\frac{L}{2}$  ہر سرے پر صفر ہے یعنی  $\frac{L}{2} = 0$ ۔

جبکہ  $L = \pm \frac{L}{2}$  جہاں  $L$  ستون کا طول ہے۔

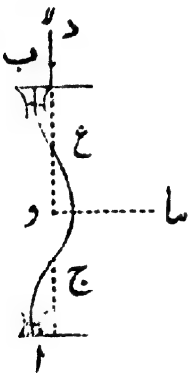
$$\therefore \text{ا} \text{ جم } \left[ \frac{L}{2} \right] \text{ یا } \left[ \frac{L}{2} \right] = 0$$

$$\text{اس لئے } \frac{L}{2} \text{ یا } \left[ \frac{L}{2} \right] = \frac{\pi}{2} \text{ جس سے } d = \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2}$$

اس سے ہمیں سرے پر کے اس وزن کی مقدار معلوم ہو جاتی ہے جو ایک دفعہ خم پیدا  
ہو جانے کے بعد ستون کو جھکی ہوئی حالت میں رکھنے کے لئے کافی ہے۔  
اگر  $d$  اس قیمت سے بڑھ جائے تو ستون ٹوٹ جائے گا۔

چونکہ مستدیر ستون کی صورت میں مچ کی قیمت قطر کی چوٹی قوت کے تناسب  
ہوتی ہے اس لئے (۲) کی مدد سے نتیجہ نکلتا ہے کہ ایک ہی مادہ سے بنے ہوئے  
ستونوں کے لئے سرے پر کا بڑے سے بڑا ممکن دباؤ قطر کی چوٹی قوت کے بالراست  
اور ستون کے طول کے مربع کے بالعکس بدلتا ہے۔ بسے ستون یا فشار بند سلاخ کے  
جھکاؤ کے بارے میں اس کلیہ کو یاد رکھنا چاہیے کہ

۵۳۳۔ دفعہ ماقبل میں اگر سرے  $L$  اور  $b$   
ثابت ہوں اور بناءً علیہ ان پر کے ماس متصالی  
ہوں تو حل مختلف ہوگا۔ سرے  $b$  پر ایک جفت  
گ لے کر عمل کریگا اس جفت اور  $b$  پر عمل کرنے  
والے دباؤ  $d$  کا حاصل ایک متوازی قوت  
 $d$  ہوگی جو شکل میں دکھائی گئی ہے۔ اگر اسکے خط  
عمل کو محور لا مانا جائے تو تعادل کی مساوات



دفعہ ما قبل کی مانند حاصل ہوتی ہے اور ان کا حل بھی ویسا ہی ہے یعنی مساوات (۱)۔

$$\text{اس صورت میں فرض کرو کہ } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = 0 \quad \text{جبکہ } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = 0 \quad \text{یا } \pm \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = 0 \quad \text{اور } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = 0 \quad \text{جب } \left[ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right] \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \quad \text{اس لئے } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$$

اس ستون کا تعدیلی خط جھکاؤ کے بعد جس مخنی کی شکل اختیار کرتا ہے اس کی مساوات ہے

$$\text{ما} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{اس لئے نقاط انعطاف ہیں جہاں } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = 0 \quad \text{یعنی جہاں } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = 0$$

یہ نقطے ج اور ع ہیں اور اس خط پر واقع ہیں جو ب پر کے جہت اور دباؤ کی محال قوت کا خلیا مل ہے۔

۳۳۶۔ دھروں کی ٹوری گروٹس۔ فرض کرو کہ ایک پیلا اسطوانی انتصابی دھرا اپنی جوں میں محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ اگر گھماؤ کی زاویائی رفتار کافی زیادہ ہو تو یہ پہلو کی جانب جھکنے کا سیلان رکھنے لگتا۔



فرض کرو کہ جھکاؤ کا معیار اثر گ ل ہے

اور نیچے کی جوں و پرافتی دباؤ اس ہے۔ نیز

چونکہ کسی نقطہ (لا، ما) پر مرکز گزیر قوت

لا، مر سے ما، فرلا ہے، جہاں دھرے کا

نصف قطر اور کثافت ہر ہے اور چونکہ یہ فرض

کر لیا گیا ہے کہ انحراف بہت تھوڑا ہے اور

فرلا اور فرس تقریباً مساوی ہیں اس لئے



$$\begin{aligned} \therefore \frac{\text{جم مہ} - \text{جز مہ}}{\text{جب مہ} - \text{جز مہ}} &= \frac{\text{جب مہ} + \text{جز مہ}}{\text{جم مہ} - \text{جز مہ}} \\ \therefore \frac{\text{جم مہ} - \text{جز مہ}}{\text{جب مہ} - \text{جز مہ}} &= \frac{\text{جم مہ} + \text{جز مہ}}{\text{جم مہ} - \text{جز مہ}} \\ \therefore \text{جم مہ} - \text{جز مہ} &= \text{جب مہ} - \text{جز مہ} \end{aligned}$$

اس مساوات سے مہ کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور اس لئے (۵) سے  $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$  کی قیمت معلوم ہوتی ہے اور بنیاد علیہ منحنی (۴) کی شکل معلوم ہوتی ہے۔

لیکن (۴) سے  $\frac{\text{مہ}}{\text{ل}} = \frac{\text{مہ}}{\text{ل}} = \frac{\text{مہ}}{\text{ل}}$  اس لئے  $\frac{\text{مہ}}{\text{ل}} = \frac{\text{مہ}}{\text{ل}}$  جس سے معلوم

زاویہ رفتار معلوم ہوتی ہے۔ اگر سہ اس قیمت سے بڑا ہو تو دھرا اور زیادہ نکلتا چلا جائیگا۔ جم مہ اور قطر مہ کے منحنیوں کو مرتسم کرنے سے ہم آسانی سے دیکھ سکتے ہیں کہ (۶) کا حل تقریباً  $\frac{\pi^3}{4}$  ہے، اب اگر  $\frac{\pi^3}{4} + \text{صد رکھا جائے جہاں صد}$

چھوٹا ہے تو (۶) سے دوسرے درجہ کا تقریبی حل حسب ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\text{صد} = \frac{1}{\frac{\pi^3}{4}} = \frac{1}{5554} = 5.018 \text{ جدولوں سے}$$

$$\therefore \text{مہ} = 5.018 + \frac{\pi^3}{4} = 3543 \text{ دوسرا تقریبی حل}$$

$$(۵) \text{ میں درج کرنے سے } \frac{\text{ب}}{\text{ا}} = 5.98 \text{ تقریباً}$$

اب (۴) سے اس منحنی کی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی شکل دھرا اختیار کرتا ہے

فولاد کے لئے  $\text{ل} = \text{تقریباً } 3 \times 10^3$  پونڈ وزن فی مربع انچ ہے اور مہ = تقریباً ۳۸۰ پونڈ فی مربع فٹ ہے۔

۳۳۔ دفعہٴ ثانی میں فرض کرو کہ شبتیر کے سروں کو انتصابی سمت میں رکھنے کے لئے کوئی پابندی نہیں ہے بلکہ دھڑے کے سروں کو صرف آزادانہ طور پر نکا دیا گیا ہے لہذا  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  سروں پر صفر ہوگا لیکن  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  صفر ہوگا کیونکہ جبکاؤ کا معیار انٹر ہر دو سروں پر صفر ہے۔

اس صورت میں جبکاؤ کا معیار انٹر گ صفر ہے۔ مساوات (۲) حسب سابق ہے اور اس کا حل ہے

$$۱ = \frac{\text{ا}}{\text{ل}} + \frac{\text{ب}}{\text{ل}} + \frac{\text{ج}}{\text{ل}} + \frac{\text{د}}{\text{ل}} \quad \text{جبکہ لا} = ۰ \quad \text{تو} = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$$

$$\therefore \frac{\text{ا}}{\text{ل}} + \frac{\text{ب}}{\text{ل}} = ۰ \quad \text{اور} \quad - \frac{\text{ا}}{\text{ل}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ل}} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰ \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{ا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ب}}{\text{ل}} = ۰$$

$$\text{اسی طرح جبکہ لا} = ۰ \quad \text{تو} = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$$

$$\therefore \quad \text{ب} = \text{ج} = \text{د} = ۰$$

$$\therefore \quad \text{ب} = \text{ج} = \text{د} = ۰$$

$$\therefore \quad \text{ب} = \text{ج} = \text{د} = ۰$$

$$\therefore \quad \text{ا} = \text{ب} = \text{ج} = \text{د} = ۰$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$$

جس سے سہ کی کم سے کم قیمت حاصل ہوتی ہے

$$\text{سہ} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

نیز منحنی کی شکل اس صورت میں ہے  $\text{ما} = \text{ب} \cdot \text{جب} \frac{\pi}{\text{لا}}$ ۔

۳۳۸۔ ایک پتلے یکساں ستون کو انتصاً با کھڑا کیا گیا ہے۔ بتاؤ کہ اس کی بلندی زیادہ سے زیادہ کتنی ہو سکتی ہے کہ یہ اپنے ہی وزن کے زیر عمل شکست نہ چھو جائے۔ اگر مبدا و ستون کے بالائی سرے پر لیا جائے، دلا کو انتصاً با نیچے کی طرف کھینچا جائے اور دما کو متوازی الافق تو تھا دل کی مسادات ہے

-- لہ جم  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ب} \cdot \text{و فرضا (ما - عا)}$  جہاں و وزن ہے ستون کے

اکائی طول کا اور جھکاؤ کو بہت چھوٹا فرض کیا گیا ہے۔

تفرق کرنے اور  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{م}$  اور  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ع}$  رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{م} \cdot \text{ع فرضا} = \text{م ع لا}$$

اگر لا = ع اور ع = غا ت رکھیں تو یہ مسادات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرع}} + \frac{\text{ا}}{\text{ع}} \frac{\text{فرت}}{\text{فرع}} + \text{ت} \left[ \frac{\text{م}}{\text{ع}} - \frac{\text{ا}}{\text{ع}} \right] = ۰$$

فرض کرو کہ ق =  $\frac{\text{م}}{\text{ع}} = \frac{\text{م}}{\text{ع}} = \frac{\text{م}}{\text{ع}}$  اور ق = ع = و

$$\text{تب} \quad \frac{\text{فرت}}{\text{فروا}} + \frac{\text{ا}}{\text{و}} \frac{\text{فرت}}{\text{فروا}} + \text{ت} \left[ \frac{\text{ا}}{\text{و}} - \frac{\text{ا}}{\text{و}} \right] = ۰$$

$$\text{ت} = \text{ا} \cdot \text{جے} \cdot (\text{و}) + \text{ب} \cdot \text{جے} \cdot (\text{و})$$

جہاں جے (و) بیل کان دیں رتبہ کا تفاعل ہے۔

$$\text{ع} = \text{لا} \cdot \left[ \text{ا} \cdot \text{جے} \cdot (\text{ق لا}^2) + \text{ب} \cdot \text{جے} \cdot (\text{ق لا}^2) \right]$$

اب  $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} =$  جبکہ لا = کیونکہ بالاترین نقطہ پر جھکاؤ کا معیار انحصار ہے۔





فی مربع انچ ہے اسلئے مندرجہ بالا ضابطہ سے حاصل ہوگا  $ل = ۲۶۰$  فٹ تقریباً۔

## مثالیں

۱۔ ایک سیدھی فولادی سلاخ کو جس کا طول ۲۰ فٹ اور قطر ایک انچ ہے انتصاباً کھڑا کیا گیا ہے اور اس کے سروں کو اس طرح ثابت کیا گیا ہے کہ ان پر کے ماس انتصابی ہیں۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑا وزن جو سلاخ برداشت کر سکتی ہے تقریباً ۱۰۱۰ پونڈ ہے۔

۲۔ ایک سیدھی یکساں فولادی سلاخ جس کی تراش دائرہ ہے ۵ فٹ لمبی ہے۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ اگر سلاخ کو سروں پر سادہ طرح ٹیکا جائے اور وسط میں ۲۰ پونڈ کا وزن سہارا جائے تو سلاخ ایک انچ جھک جاتی ہے اس سلاخ کو گول سرے والی انتصابی فشار بند سلاخ کی طرح استعمال کیا جائے تو زیادہ سے زیادہ کتنا وزن رکھا جاسکتا ہے

(جواب تقریباً ۲۴۷ پونڈ)

۳۔ ایک فولادی تیکے کو جس کا قطر ۳/۴ انچ ہے دو ایسی چلوں کے اندر سہارا گیا ہے جس کی نشستیں کروی ہیں اور یہ فی منٹ تین ہزار چکر لگاتا ہے۔ بتاؤ کہ چلوں کے مرکروں کے درمیان زیادہ سے زیادہ کتنا فاصلہ ہونا چاہئے کہ ٹکلا گھومنے نہ پائے۔

(۱۶۲۱ فٹ تقریباً)

۴۔ ایک لمبی پتلی سلاخ (ب کو انتصاباً نصب کیا گیا ہے اور اس کے سرے ب پر وزن ورکھا گیا ہے اور نیچے کے سرے کو انتصاباً قائم کر دیا گیا ہے اگر سلاخ ذرا سی لچکدار ہو اور اس کا طول  $ل$  ہو تو ثابت کرو کہ یہ سلاخ جس سختی کی شکل اختیار کرتی ہے اس کی مساوات ہے

$$۱ = ۱ - \frac{۱۱}{۲۲} \text{ جم}$$

$$\frac{۲}{۲۲} = \frac{۱}{۲} \text{ جم} \text{ اور } ۱ = ۱ - \frac{۱۱}{۲۲} \text{ جم}$$

اس سے اور دفعہ ۳۳۵ سے نتیجہ نکلتا ہے کہ سلاخ جس کے دونوں سرے اس طرح

ثابت ہوں کہ اُن پر کے ماس انتصابی ہوں تو سلاخ اُس وزن کا ۱۶ گنا سہار سکے گی جو وہ اس صورت میں سہارتی جبکہ صرف نیچے کا سہرا انتصاباً ثابت رہے اور اوپر کا سہرا گول ہو اور بناؤ علیہ جانبی حرکت اختیار کرنے کے قابل]

۵۔ اگر دفعہ ۳۳ کے سوال میں پچھلے سرے کو اس طرح ثابت رکھا جائے کہ آئیں کا ماس انتصابی ہے اور اوپر کے سرے پر ایسی قوت لگائی جائے کہ یہ ثابت پچھلے سرے میں سے گزرنے والے انتصابی خط میں ہمیشہ رہے تو ثابت کرو کہ

$$\frac{L}{2} = \text{نسب} \left[ \frac{L}{2} \right] \text{ پس } \left[ \frac{L}{2} \right] \times L = ۳۳۰۴۳$$

$$\text{اور اس لئے ثابت کرو کہ } ۵ = ۲۰۵۸۷ \times \frac{L}{2} = ۲۵۰۴۵ \times \frac{L}{2} \text{ تقریباً}$$

۶۔ دفعہ ۳۳ کے سوال میں اگر دوسرے کے ایک سرے کو انتصابی رکھا جائے اور دوسرے سرے کو آزادانہ طور پر سہارا جائے تو ثابت کرو کہ مہ کی قیمت مساوات مس مہ = مس مہ سے حاصل ہوتی ہے اور بناؤ علیہ یہ تقریباً ۳۳۰۴۳ کے مساوی ہے۔

اگر دوسرا سہرا بالکل آزاد ہو تو ثابت کرو کہ مہ کی قیمت مساوات جم مہ جزمہ = ۱۔ سے حاصل ہوتی ہے اور بناؤ علیہ یہ تقریباً ۱۵۸۷ کے مساوی ہے۔ اس صورت میں تہری زور

اور نیز جھکاؤ کا معیار از دوسرے سرے پر صفر ہے، لہذا  $\frac{F}{2}$  اور  $\frac{F}{2}$  دونوں صفر ہیں [۷۔ اگر ایک یکساں مادہ کی ایک کمان بنائی جائے تو ثابت کرو کہ رسی کو کھینچنے سے اس

$$\text{کی ذاتی مساوات یہ ہوتی ہے } \frac{F}{2} \text{ جب } \frac{F}{2} = ۱ \text{ جب } \frac{F}{2}$$

اگر کمان صرف خفیف طور پر بچکے اور اگر رسی کا طول ۲ ل اور رسی کا طول ۱۲ ہو جہاں ل اور ۱ تقریباً مساوی ہیں تو ثابت کرو کہ یہ جس منحی کی شکل اختیار کرتی ہے اس کی مساوات

$$\text{ہے } \frac{L}{2} = \frac{(1-L)}{2} \text{ جب } \frac{L}{2} \text{ ہے اور رسی کا تناؤ } \frac{L}{2} \text{ ہے}$$

۸۔ ایک افقی بریکٹ جس کا طول ۱ ہے ایک انتصابی ستون کے اوپر کے سرے

پر لکایا گیا ہے ستون کی بلندی  $l$  ہے اور ستون کا پچلا سر از مین کے اندر مدفون ہے۔ جب شکنجہ کے سرے پر وزن  $w$  ہو تو ستون تھوڑا سا جھک جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ستون کے خم کاؤ کی وجہ سے (خواہ سرکیٹ کا طول کچھ ہی ہو) قاعہ ہر جھکاؤ کا معیار اثر نسبت قط  $\left(\frac{w}{l} \times l\right)$  میں بڑھ جاتا ہے جہاں  $l$  بنگ کا مقیاس ہے اور جب تراش کا جمود کا معیار اثر اس نقطہ کے گرد ہے جو تراش کے مرکز میں سے جھکاؤ کی سطح مستوی پر عمود وار کھینچا جائے۔

۵۔ ایک سیدھا شہتیر جس کی تراش یکساں ہے پچک جانے والے مادہ کی ایک افقی تہ پر رکھا گیا ہے شہتیر کے اُس نقطہ پر جہاں گہراؤ  $a$  یا  $b$  ہے یہ دیکھا گیا ہے کہ شہتیر اور  $l$  کے درمیان دباؤ (ک)  $l$  میں فی انچ طول ہے۔

اگر شہتیر کے اُس نقطہ پر جس کا فاصلہ شہتیر کے دونوں سروں سے مساوی ہے  $l$  و  $l$  وزن رکھا جائے تو ثابت کرو کہ دباؤ کی تقسیم  $\frac{1}{2} w$  و  $\frac{1}{2} w$  [جمعد  $l$  + جب  $l$ ]

$l$  میں فی انچ طول ہے جہاں  $l$  کو وزن کے نقطہ سے ناپا گیا ہے اور  $l$   $\frac{1}{2} w$   $\frac{1}{2} w$  اور تعیناتی محور کے گرد شہتیر کی تراش کا جمود کا معیار اثر  $l$  ہے اور شہتیر کے مادہ کے لئے پچک کا مقیاس ہے۔





# اصطلاحات

## سکونیات اعلیٰ

Angle of repose	سہراؤ کا زاویہ
Astatic equilibrium	اچل توازن
Attraction	کشش
Ball and socket	گولہ گردانگ
Bending moment	جھکاؤ کا معیار اثر
Binormal	ثنائی عماد
Brake	بریک
Breaking tension	ٹوٹنے والا تناؤ
Cardiod	خط صنوبری، قلب
Catenary	زنجیرہ
Central axis	مرکزی محور
Centrifugal	مرکز گزیز
Chain wheel	زنجیر ہتھیہ
Circle of inflexions	انعطافوں کا دائرہ
Circle of stability	قائمیت کا دائرہ
Coefficient of friction	رگڑ کی قدر

Composition	ترکیب
Compression	چپکاؤ
Concentric	ہم مرکز
Configuration	رہنما
Constrained bodies	مقید اجسام
Couple	جفت
Curvature	انحناء
Cyclical order	مستدیر ترتیب
Cycloid	خط تدویر
Cylindroid	اسطوانہ نما
Deflection	انحراف
Differential pulley	فرقی چرنی
Displacement	ہٹاؤ
Dyname	حرکیہ
Dynamics	حرکیات
Eccentric	خارج المرکز
Eccentricity	خروج المرکز
Effort	طاقت
Element	عنصر
Equilibrium	توازن - توازن
Equipotential surfaces	مساوی قوت سطحیں
Extension	کھینچاؤ
Flexural rigidity	خمناؤ کی استواریت
Frame work	قالب - ڈھانچہ
Friction	رگڑ

Fulcrum	نصاب
Funicular polygon	رسمیاتی کثیر الاضلاع
Generator	کون
Groove	ناہلی
Helix	مرغولہ
Hinges	قبضے
Horse-power	اسبی طاقت
Hypocycloid	درتدویر
Inclined plane	سطح مائل
Indicator Diagram	مظہار نقشہ
Invariants	غیر متغیرہ
Keel	پنیدا
Lamina	پترا
Lemniscate	اٹیرن ، خشمہ شمنی
Like (forces)	موافق (قوتیں)
Limiting friction	انتہائی رگڑ
Lines of force	قوت کے خط
Mechanical advantage	جیلی فائدہ
Modulus	مقیاس
Moment	معیار اثر
Neutral line	تعدیلی خط
Normal	عماد
Null lines	صفری خطوط
Osculating plane	بوسندہ مستوی
Parallelopiped	متوازی السطوح

Pedal	پدال
Potential	قوه
Pulley	چرخي
Reaction	تفاعل
Reciprocal	متكافئ
Resistance	مزاومت
Resolution	تحليل
Rigid	استوار
Roulette	گردونه
Sag	جھوک
Screw-press	پنجشکني
Shear	جزي
Shearing stress	جزي زور
Shell	خول
Slope	دھال
Smooth	چکنا
Spherical Excess	کروی اضافہ
Spherical triangle	مثلث کروی
Stable	قائم
Steam Engine	بھاپ انجن
Steel yard	تھک
Strut	فشار بند
Suspension bridge	جھول پل
Tension	تناؤ
Tie	بند صحن



Tube of force	قوت کی لٹی
Unlike (forces)	مخالفت (قوتیں)
Unstable	غیر قائم
Virial	سکت
Virtual work	سہوم کام
Wedge	فانہ
Wheel & axle	پر خ اور محور
Work function	توتی تفاعل
Wrench	نہنج













